माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An Easy Textbook

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

NCERT ZONE

अध्याय 1 वास्तविक संख्याएँ

(Real Numbers)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) ज्ञात करने के लिए यूक्लिड-विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए :

(i) 135 और 225 (ii) 196 और 38220 (iii) 867 और 255

हल : (i) दी गई संख्याएँ = 135 और 225

$\because$ $225 > 135$

$\therefore$ **चरण 1.** दी गई संख्याओं 225 और 135 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$225 = (135 \times 1) + 90 \quad (\because \text{ शेषफल } 90 \neq 0)$$

$\therefore$ **चरण 2.** संख्याओं 135 और 90 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$135 = (90 \times 1) + 45 \quad (\because \text{ शेषफल } 45 \neq 0)$$

$\therefore$ **चरण 3.** संख्याओं 90 और 45 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$90 = (45 \times 2) + 0 \quad (\because \text{ शेषफल } = 0)$$

135)225(1
135
90)135(1
90
45)90(2
90
×

$\because$ शेषफल शून्य है और भाजक = 45

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 45** **उत्तर**

- **(ii)** दी गई संख्याएँ = 196 और 38220 और चूँकि $38220 > 196$

$\therefore$ **चरण 1.** दी गई संख्याओं 196 व 38220 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$38220 = (196 \times 195) + 0 \quad (\because \text{ शेषफल } = 0)$$

$\because$ शेषफल शून्य है और भाजक = 196

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 196** **उत्तर**

196)38220(195
196
1862
1764
980
980
×

- **(iii)** दी गई संख्याएँ = 867 और 255

$\because$ $867 > 255$

$\therefore$ **चरण 1.** दी गई संख्याओं 867 और 255 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$867 = (255 \times 3) + 102 \quad (\because \text{ शेषफल } 102 \neq 0)$$

$\therefore$ **चरण 2.** संख्याओं 255 व 102 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$255 = (102 \times 2) + 51 \quad (\because \text{ शेषफल } 51 \neq 0)$$

$\therefore$ **चरण 3.** संख्याओं 102 व 51 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$$102 = (51 \times 2) + 0 \quad (\because \text{ शेषफल } = 0)$$

255)867(3
765
102)255(2
204
51)102(2
102
×

$\because$ शेषफल शून्य है और भाजक = 51

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 51** **उत्तर**

प्रश्न 2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : माना a एक विषम धन पूर्णांक है जो 6 से बड़ा है
और b एक धन पूर्णांक इस प्रकार है कि $b = 6$
तब, यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका से,

$$a = bq + r \qquad \text{जहाँ } 0 \le r < b$$

$$\Rightarrow \qquad a = 6q + r, \qquad 0 \le r < 6 \qquad (\because b = 6)$$

तब, r का मान 6 से कम होना चाहिए।
तब, r के सम्भव मान $= 0, 1, 2, 3, 4, 5$
तब, $a = 6q + 0$ या $a = 6q + 1$ या $a = 6q + 2$
या $a = 6q + 3$ या $a = 6q + 4$ या $a = 6q + 5$
$\because$ a एक विषम संख्या है; अत: $a = 6q + 0, 6q + 2$ और $6q + 4$ नहीं हो सकते क्योंकि ये राशियाँ 2 से विभाज्य हैं।
तब, विषम संख्या $a = 6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$

अत: **एक धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होगा।** **Proved.**

प्रश्न 3. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तम्भों में मार्च करना है। उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं?

हल : स्तम्भों (lines) की अधिकतम संख्या टुकड़ी के सैनिकों की संख्या 616 और बैंड के सदस्यों की संख्या 32 का महत्तम समापवर्तक होगी।

तब, **चरण 1.** 616 और 32 के लिए यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से,

$$616 = (32 \times 19) + 8 \qquad (\because \text{शेषफल } 8 \neq 0)$$

तब, **चरण 2.** 32 और 8 के लिए यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका से,

$$32 = (8 \times 4) + 0 \qquad (\because \text{शेषफल} = 0)$$

$\because$ शेषफल शून्य है और भाजक 8 है।
$\therefore$ महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) $= 8$

अत: **सेना 8 स्तम्भों में मार्च कर सकती है।** **उत्तर**

प्रश्न 4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है।

हल : माना a तथा b दो धन पूर्णांक ऐसे हैं कि $a > b$ और $b = 3$
तब, यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका से,

$$a = 3q + r \qquad \text{जबकि} \qquad 0 \le r < 3$$

तथा q एक पूर्णांक है।
तब, r के सम्भव मान $= 0, 1, 2$
तब, $a = 3q + 0$ या $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$
तब, $a^2 = (3q + 0)^2$ या $a^2 = (3q + 1)^2$ या $a^2 = (3q + 2)^2$

यदि $a^2 = (3q + 0)^2$ तो $a^2 = 9q^2 = 3 . (3q^2) = 3m,$ (जहाँ $m = 3q^2$, एक पूर्णांक है।)

यदि $a^2 = (3q + 1)^2$ तो $a^2 = 9q^2 + 6q + 1$
$= 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1,$ (जहाँ $m = 3q^2 + 2q$, एक पूर्णांक है।)

यदि $a^2 = (3q + 2)^2$ तो $a^2 = 9q^2 + 12q + 4$
$= (9q^2 + 12q + 3) + 1$
$= 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$
$= 3m + 1,$ (जहाँ $m = 3q^2 + 4q + 1$, एक पूर्णांक है।)

a^2 के सभी विस्तारों से स्पष्ट है कि a^2, 3 से विभाजित होता है और शेषफल या तो शून्य बचता है या 1 बचता है।

$$\therefore \qquad a^2 = 3m + 0 \qquad \text{या} \qquad a^2 = 3m + 1$$

अत: **किसी धन पूर्णांक का वर्ग किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है।** **Proved.**

प्रश्न 5. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।

हल : माना a तथा b दो धन पूर्णांक ऐसे हैं कि $a > b$ और $b = 3$

तब, यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका से,

$$a = 3q + r \qquad \text{जहाँ} \qquad 0 \le r < 3$$

तथा q एक पूर्णांक है।

तब, r का मान 3 से कम होना चाहिए।

तब, r के सम्भव मान = 0, 1, 2

तब, $a = 3q + 0$ या $a = 3q + 1$ या $a = 3q + 2$

जब $a = 3q + 0$ तो $a^3 = (3q+0)^3 = 27q^3$

$\Rightarrow$ $a^3 = 9(3q^3)$ ...(1)

जब $a = 3q + 1$ तो $a^3 = (3q+1)^3$

$= (3q)^3 + 3 \,.\, 3q \,.\, 1\,(3q+1) + (1)^3$

$= (27q^3 + 27q^2 + 9q) + 1$

$\Rightarrow$ $a^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$ ...(2)

जब $a = 3q + 2$ तो $a^3 = (3q+2)^3$

$= (3q)^3 + 3 \,.\, 3q \,.\, 2\,(3q+2) + (2)^3$

$= [27q^3 + 18q\,(3q+2)] + 8$

$\Rightarrow$ $a^3 = 9\,[3q^3 + 6q^2 + 4q] + 8$ ...(3)

तब समीकरण (1), (2) व (3) को ध्यान से देखिए।

कि ये 9 से विभाज्य है।

तब, इन्हें क्रमशः $a^3 = 9m$ (जहाँ $m = 3q^3$, एक पूर्णांक है।)

या $a^3 = 9m + 1$ (जहाँ $m = 3q^3 + 3q^2 + q$, एक पूर्णांक है।)

या $a^3 = 9m + 8$ (जहाँ $m = 3q^3 + 6q^2 + 4q$, एक पूर्णांक है।)

लिखा जा सकता है।

अतः **किसी धन पूर्णांक का घन $9m$, $9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।** **Proved.**

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 140 **(ii) 156** **(iii) 3825**

(iv) 5005 **(v) 7429**

हल (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

$= (2)^2 \times 5 \times 7$

अतः $\mathbf{140 = 2^2 \times 5 \times 7}$ **उत्तर**

2	140
2	70
5	35
	7 = अभाज्य संख्या

● **(ii)** $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$= (2)^2 \times 3 \times 13$

अतः $\mathbf{156 = 2^2 \times 3 \times 13}$ **उत्तर**

2	156
2	78
3	39
	13 = अभाज्य संख्या

● **(iii)** $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

$= (3)^2 \times (5)^2 \times 17$

अतः $\mathbf{3825 = 3^2 \times 5^2 \times 17}$ **उत्तर**

3	3825
3	1275
5	425
5	85
	17 = अभाज्य संख्या

● **(iv)** $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

अत: $\mathbf{5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13}$ **उत्तर**

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5005 \\ \hline 7 & 1001 \\ \hline 11 & 143 \\ \hline & 13 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

● **(v)** $7429 = 17 \times 19 \times 23$

अत: $\mathbf{7429 = 17 \times 19 \times 23}$ **उत्तर**

$$\begin{array}{r|l} 17 & 7429 \\ \hline 19 & 437 \\ \hline & 23 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

प्रश्न 2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के महत्तम समापवर्तक (HCF) और लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

(i) 26 और 91 **(ii) 510 और 92** **(iii) 336 और 54**

हल : (i) $26 = 2^1 \times 13^1$

$91 = 7^1 \times 13^1$

26 और 91 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 13^1 = 13$

और 26 और 91 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में)

गुणनफल $= 2^1 \times 7^1 \times 13^1 = 2 \times 7 \times 13 = 182$

अत: **महत्तम समापवर्तक (HCF) = 13 तथा लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) = 182** **उत्तर**

∵ संख्याओं का गुणनफल $= 26 \times 91 = 2366$ और $HCF \times LCM = 13 \times 182 = 2366$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM** **Proved.**

● **(ii)** $92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23^1$

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 510 \\ \hline 3 & 255 \\ \hline 5 & 85 \\ \hline & 17 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

92 और 510 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 2^1 = 2$

तथा 92 और 510 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1 = 23460$

अत: **महत्तम समापवर्तक (HCF) = 2 तथा लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) = 23460** **उत्तर**

∵ संख्याओं का गुणनफल $= 92 \times 510 = 46920$; और

$HCF \times LCM = 2 \times 23460 = 46920$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM** **Proved.**

● **(iii)** $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^4 \times 3^1 \times 7^1$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 336 \\ \hline 2 & 168 \\ \hline 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

तब, दोनों संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 2^1 \times 3^1 = 6$

और दोनों संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 2^4 \times 3^3 \times 7 = 16 \times 27 \times 7 = 3024$

अत: **महत्तम समापवर्तक (HCF) = 6 तथा लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) = 3024** **उत्तर**

∵ संख्याओं का गुणनफल $= 54 \times 336 = 18144$

और $HCF \times LCM = 6 \times 3024 = 18144$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM** **Proved.**

प्रश्न 3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के म० स० (HCF) और ल० स० (LCM) ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 **(ii) 17, 23 और 29** **(iii) 8, 9 और 25**

हल : (i) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

$15 = 3 \times 5 = 3^1 \times 5^1$

और $21 = 3 \times 7 = 3^1 \times 7^1$

संख्याओं के सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 3^1 = 3$

और संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

$= 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

अत: **म० स० (HCF) = 3 तथा ल० स० (LCM) = 420** उत्तर

● **(ii)** $17 = 1 \times 17 = 1 \times 17^1$

$23 = 1 \times 23 = 1 \times 23^1$

और $29 = 1 \times 29 = 1 \times 29^1$

सभी संख्याओं के सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल = 1

और सभी संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 17^1 \times 23^1 \times 29^1$

$= 17 \times 23 \times 29 = 11339$

अत: **म० स० (HCF) = 1 तथा ल० स० (LCM) = 11339** उत्तर

● **(iii)** $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

और $25 = 5 \times 5 = 5^2$

$\because$ 1 के अतिरिक्त सभी संख्याओं का कोई सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है जिससे म० स० = 1

और ल० स० $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1800$

अत: **म० स० (HCF) = 1 तथा ल० स० (LCM) = 1800** उत्तर

प्रश्न 4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ HCF (306, 657) = 9 $\Rightarrow$ 306 और 657 का HCF = 9

सूत्र संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM से,

$\therefore \quad 306 \times 657 = 9 \times \text{LCM}$

$\therefore \quad \text{LCM} = \dfrac{306 \times 657}{9} = 306 \times 73 = 22338$

अत: **LCM (306, 657) = 22338** उत्तर

प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है?

हल : यदि 6^n (जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है) का मान एक ऐसी संख्या है जिसमें इकाई का अंक शून्य है तो 6^n, 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ $6^n = (2 \times 3)^n$ जिसका आशय है कि 6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 या 3 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है।

$\therefore$ 6^n का कोई गुणनखण्ड 5 नहीं हो सकता।

अत: 6^n **, अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकती।** **Proved.**

प्रश्न 6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं?

हल : $\because$ $7 \times 11 \times 13 + 13 = 1001 + 13$

$= 1014$

$= 2 \times 3 \times 13 \times 13$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1014 \\ \hline 3 & 507 \\ \hline 13 & 169 \\ \hline & 13 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

$\because$ दी हुई संख्या $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल $(2 \times 3 \times 13 \times 13)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अत: **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ एक भाज्य संख्या है।**

इसी प्रकार, $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5 = 5040 + 5$

$= 5045$

$= 5 \times 1009$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5045 \\ \hline & 1009 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

$\because$ दी गई संख्या $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ को 5×1009 अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

अत: **संख्या $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार एक भाज्य संख्या है।**

उत्तर

प्रश्न 7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए कि वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल : सोनिया और रवि जिस स्थान से चले थे उसी स्थान पर पुन: मिलने के लिए उन्हें वह समय चाहिए जो 12 मिनट और 18 मिनट दोनों समयों का एक ही गुणज हो और न्यूनतम हो। इसके लिए हमें 12 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात करना होगा।

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = (2)^2 \times 3$$
$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times (3)^2$$

दोनों संख्याओं में अभाज्य गुणनखण्ड 2 की अधिकतम घात का अभाज्य गुणनखण्ड $= (2)^2$

और दोनों संख्याओं में अभाज्य गुणनखण्ड 3 की अधिकतम घात का अभाज्य गुणनखण्ड $= (3)^2$

$\therefore$ लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) = सभी संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल

$$= (2)^2 \times (3)^2 = 4 \times 9 = 36$$

अत: **वे 36 मिनट बाद पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।** **उत्तर**

प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : कल्पना कीजिए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है।

तब, $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ तथा p व q धन पूर्णांक हैं।

माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

अब $\because$ $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$

$\therefore$ $p = \sqrt{5}\, q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $p^2 = 5\, q^2$

$\therefore$ p^2, संख्या 5 से विभाज्य है।

$\therefore$ p भी संख्या 5 से विभाज्य है।

अब $\because p$, 5 से विभाज्य है, तब माना कि $p = 5\, r$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $p^2 = 25\, r^2$

परन्तु हमें यह भी ज्ञात है कि $p^2 = 5\, q^2$

$\therefore$ $5\, q^2 = 25\, r^2$ या $q^2 = 5\, r^2$

तब, q^2, 5 से विभाज्य होगा।

तब, q भी 5 से विभाज्य होगा।

$\because$ p भी 5 से विभाज्य है और q भी 5 से विभाज्य है।

$\therefore$ 5, p और q का सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड है (जो 1 के अतिरिक्त है)।

यह एक विरोधाभास है क्योंकि हमारी मान्यता के अनुसार p और q में (1 के अतिरिक्त) कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

$\therefore$ यह संकेत करता है कि हमारी कल्पना **"$\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है" असंगत एवं त्रुटिपूर्ण है।**

अत: **$\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : माना $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय नहीं, परिमेय संख्या है।

तब, $3 + 2\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ और p तथा q धन पूर्णांक हैं।

$\because$ $\frac{p}{q} = 3 + 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{p}{q} - 3\right) = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $\frac{\left(\frac{p}{q} - 3\right)}{2} = \sqrt{5}$

$\because$ $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तब $\frac{\left(\frac{p}{q} - 3\right)}{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

और $\because$ $\frac{\left(\frac{p}{q} - 3\right)}{2}$ परिमेय संख्या है और $\frac{\left(\frac{p}{q} - 3\right)}{2} = \sqrt{5}$

$\therefore$ $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या है परन्तु यह सर्वमान्य तथ्य है कि $\sqrt{5}$ परिमेय नहीं, अपरिमेय संख्या है। तब यहाँ विरोधाभास है। इस विरोधाभास का कारण हमारी कल्पना "$3 + 2\sqrt{5}$ को परिमेय मानना" ही है। इसलिए $3 + 2\sqrt{5}$ परिमेय नहीं है।

अत: **दी गई संख्या $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

हल : (i) माना दी गई संख्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय है।

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ (जहाँ $q \neq 0$ और p तथा q धन पूर्णांक हैं)

माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है।

$\because$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$ $\Rightarrow$ $\frac{p^2}{q^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $q^2 = 2p^2$

$\therefore$ q^2, 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ q भी 2 से विभाज्य है।

तब, माना $q = 2r$

$\therefore$ $q^2 = 4r^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\because$ $q^2 = 4r^2$ और $q^2 = 2p^2$ $\Rightarrow$ $2p^2 = 4r^2$

$\Rightarrow$ $p^2 = 2r^2$

$\therefore$ p^2, संख्या 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ p भी दो से विभाज्य है।

तब, p व q दोनों 2 से विभाज्य हैं।

$\therefore$ p व q में 1 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड 2 भी सार्वनिष्ठ है जो कि हमारी मान्यता के विपरीत है। इस विरोधाभास का कारण हमारी मान्यता कि "$\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय है" का असंगत एवं त्रुटिपूर्ण होना है।

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय नहीं है।

अत: **$\frac{1}{\sqrt{2}}$ अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

- **(ii)** कल्पना कीजिए कि संख्या $7\sqrt{5}$ परिमेय है।

तब, $7\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ होना चाहिए (जहाँ $q \neq 0$ और p तथा q धन पूर्णांक हैं)

$\because \quad \dfrac{p}{q} = 7\sqrt{5} \quad$ या $\quad \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{p}{q} = \sqrt{5}$

$\because \quad \dfrac{p}{q}$ परिमेय संख्या है तो $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{p}{q}$ भी परिमेय संख्या होगी।

अब $\because \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{p}{q}$ परिमेय संख्या है और $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{p}{q} = \sqrt{5}$

तब, $\sqrt{5}$ भी परिमेय संख्या होनी चाहिए।

परन्तु यह तथ्य सर्वमान्य है कि $\sqrt{5}$ परिमेय नहीं है। यहाँ एक विरोधाभास है जिसका कारण हमारी मान्यता कि ''संख्या $7\sqrt{5}$ परिमेय है'' असंगत और त्रुटिपूर्ण है।

अत: **$7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

- **(iii)** कल्पना कीजिए कि संख्या $6+\sqrt{2}$ परिमेय है।

तब, $6+\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ होना चाहिए (जहाँ $q \neq 0$ तथा p और q धन पूर्णांक हैं)

$\because \quad 6+\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$

$\therefore \quad \sqrt{2} = \dfrac{p}{q} - 6$

$\because \quad \dfrac{p}{q}$ परिमेय है; अत: $\left(\dfrac{p}{q} - 6\right)$ भी परिमेय होगी।

और $\because \left(\dfrac{p}{q} - 6\right) = \sqrt{2}$ तथा $\left(\dfrac{p}{q} - 6\right)$ परिमेय है।

$\therefore \quad \sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या है।

परन्तु यह तथ्य कि ''$\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है'' असंगत एवं त्रुटिपूर्ण तथा अमान्य है जिसके लिए हमारे द्वारा की गई गलत कल्पना ही उत्तरदायी है।

$\therefore$ संख्या $6+\sqrt{2}$ परिमेय नहीं हो सकती।

अत: **संख्या $6+\sqrt{2}$ अपरिमेय होगी।** **Proved.**

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 1. बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं :

(i) $\dfrac{13}{3125}$ **(ii)** $\dfrac{17}{8}$ **(iii)** $\dfrac{64}{455}$ **(iv)** $\dfrac{15}{1600}$

(v) $\dfrac{29}{343}$ **(vi)** $\dfrac{23}{2^3 . 5^2}$ **(vii)** $\dfrac{129}{2^2\ 5^7\ 7^5}$ **(viii)** $\dfrac{6}{15}$

(ix) $\dfrac{35}{50}$ **(x)** $\dfrac{77}{210}$

हल : (i) $\dfrac{13}{3125} = \dfrac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \dfrac{13}{2^0\times5^5}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3125 \\ \hline 5 & 625 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

$\because$ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 5 है जो $2^0\times5^5$ अर्थात $2^n\times5^m$ रूप का है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक हैं।

अत: **$\dfrac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(ii)** $\frac{17}{8} = \frac{17}{2 \times 2 \times 2} = \frac{17}{2^3 \times 5^0}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

$\because$ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 2 है जो $2^3 \times 5^0$ अर्थात $2^n \times 5^m$ रूप का है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।

अत: $\mathbf{\frac{17}{8}}$ **का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(iii)** $\frac{64}{455} = \frac{64}{5 \times 7 \times 13}$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 455 \\ \hline 7 & 91 \\ \hline & 13 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

$\because$ हर में 5 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड 7 व 13 भी हैं। जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\mathbf{\frac{64}{455}}$ **का दशमलव प्रसार असान्त एवं आवर्ती है।** **उत्तर**

- **(iv)** $\frac{15}{1600} = \frac{15}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{15}{2^6 \times 5^2}$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 1600 \\ \hline 2 & 800 \\ \hline 2 & 400 \\ \hline 2 & 200 \\ \hline 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

$\because$ हर में 2 व 5 ही अभाज्य गुणनखण्ड हैं। जो $2^6 \times 5^2$ अर्थात $2^n \times 5^m$ रूप में है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।

अत: $\mathbf{\frac{15}{1600}}$ **का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(v)** $\frac{29}{343} = \frac{29}{7 \times 7 \times 7} = \frac{29}{7^3}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 343 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

$\because$ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 7 है। जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\mathbf{\frac{29}{343}}$ **का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है।** **उत्तर**

- **(vi)** $\frac{23}{(2)^3 \,.\, (5)^2}$ के हर में 2 व 5 अभाज्य गुणनखण्ड हैं। जो $2^3 \times 5^2$ अर्थात $2^n \times 5^m$ रूप में है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।

अत: $\mathbf{\frac{23}{2^3 \,.\, 5^2}}$ **का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(vii)** $\frac{129}{(2)^2 . (5)^7 . (7)^5}$ के हर में 2 व 5 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड 7 भी है। जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\mathbf{\frac{129}{2^2 . 5^7 . 7^5}}$ **का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है।** **उत्तर**

- **(viii)** $\frac{6}{15} = \frac{3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2^0 \times 5^1}$ (सरलतम रूप)

$\because$ हर में अभाज्य गुणनखण्ड केवल 5 है। जो $2^0 \times 5^1$ अर्थात $2^n \times 5^m$ रूप में है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।

अत: $\mathbf{\frac{6}{15}}$ **का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(ix)** $\frac{35}{50} = \frac{5 \times 7}{5 \times 5 \times 2} = \frac{7}{5 \times 2}$

$\because$ हर में 2 व 5 अभाज्य गुणनखण्ड हैं। जो $2^1 \times 5^1$ अर्थात $2^n \times 5^m$ रूप में है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।

अत: $\mathbf{\frac{35}{50}}$ **का दशमलव प्रसार सांत है।** **उत्तर**

- **(x)** $\frac{77}{210} = \frac{7 \times 11}{7 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{11}{2 \times 3 \times 5}$

$\because$ हर में 2 व 5 के अतिरिक्त एक अन्य अभाज्य गुणनखण्ड 3 भी है। जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\mathbf{\frac{77}{210}}$ **का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है।** **उत्तर**

प्रश्न 2. प्रश्न (1) में दी गई उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो सांत हैं।

हल : सांत दशमलव प्रसार वाली परिमेय संख्याएँ :

$$\frac{13}{3125};\quad \frac{17}{8};\quad \frac{15}{1600};\quad \frac{23}{2^3 \cdot 5^2};\quad \frac{6}{15};\quad \frac{35}{50}$$

- $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \frac{13}{5^5} = \frac{13\times2^5}{2^5\times5^5} = \frac{13\times32}{(10)^5} = \frac{416}{100000} = 0.00416$

अत: $\mathbf{\frac{13}{3125}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{0\cdot00416}$ **उत्तर**

- $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} = \frac{17\times5^3}{2^3\times5^3} = \frac{17\times125}{10^3} = \frac{2125}{1000} = 2.125$

अत: $\mathbf{\frac{17}{8}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{2.125}$ **उत्तर**

- $\frac{15}{1600} = \frac{15}{16\times10\times10} = \frac{15}{2^4\times2^2\times5^2} = \frac{15}{2^6\times5^2} = \frac{15\times5^4}{2^6\times5^6} = \frac{15\times625}{(10)^6}$

$$= \frac{9375}{1000000} = 0.009375$$

अत: $\mathbf{\frac{15}{1600}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{0.009375}$ **उत्तर**

- $\frac{23}{2^3 \cdot 5^2} = \frac{23\times5}{2^3\times5^3} = \frac{115}{10^3} = \frac{115}{1000} = 0.115$

अत: $\mathbf{\frac{23}{2^3 \cdot 5^2}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{0.115}$ **उत्तर**

- $\frac{6}{15} = \frac{6}{3\times5} = \frac{2}{5} = \frac{2\times2}{2\times5} = \frac{4}{10}$

अत: $\mathbf{\frac{6}{15}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{0.4}$ **उत्तर**

- $\frac{35}{50} = \frac{35}{2\times5^2} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10}$

अत: $\mathbf{\frac{35}{50}}$ **का दशमलव प्रसार** $= \mathbf{0.7}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दर्शाए गए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखण्डों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 43.123456789 **(ii) 0.129120012000120000........**

(iii) $43.\overline{123456789}$

हल : (i) $43.123456789 = \frac{43123456789}{1000000000}$ जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप की है।

अत: **43.123456789** एक परिमेय संख्या है।

$$q = 1000000000 = (10)^9 = (2\times5)^9 = 2^9\times5^9$$

अत: **q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 या 5 या दोनों हैं। अर्थात यह $2^n\times5^m$ के रूप में है जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक है।** **उत्तर**

- **(ii)** 0.120120012000120000........ का दशमलव प्रसार असांत एवं अनावर्ती है और इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता अर्थात इसके हर को $2^n\times5^m$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। अत: **यह परिमेय संख्या नहीं है। उत्तर**

- **(iii)** $43.\overline{123456789} = 43.123456789\ 123456789\ 123456789 \ldots\ldots$

$\because$ दी गई संख्या का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है

$\therefore$ दी गई संख्या को परिमेय अर्थात $\frac{p}{q}$ के रूप में बदलना सम्भव है।

तब, q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 5 के अतिरिक्त और भी अभाज्य धन पूर्णांक सम्भव हैं।

अत: **दी गई संख्या परिमेय है** और **q के अभाज्य गुणनखण्ड 2 अथवा 5 के अतिरिक्त भी हैं।** उत्तर