माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An Easy Textbook

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

NCERT ZONE

अध्याय 10

वृत्त
(Circle)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली 10.1

प्रश्न 1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

हल : किसी वृत्त की परिधि पर स्थित प्रत्येक बिन्दु से एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। चूँकि वृत्त की परिधि पर बिन्दुओं की संख्या असंख्य है; अत: **एक वृत्त की असंख्य स्पर्श रेखाएँ सम्भव हैं।**

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे .... बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को .... कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की .... समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते हैं।

हल : रिक्त स्थानों की पूर्ति निम्नवत् है :

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे **एक** बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को **छेदक रेखा** कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की **दो** समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

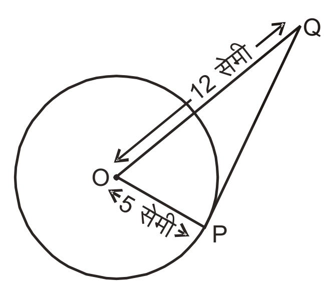
(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को **स्पर्श बिन्दु** कहते हैं।

प्रश्न 3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लम्बाई है :

(a) 12 सेमी (b) 13 सेमी (c) 8.5 सेमी (d) $\sqrt{119}$ सेमी।

हल : चित्र में O केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $OP = 5$ सेमी है।

बिन्दु P पर PQ स्पर्श रेखा इस प्रकार है कि $OQ = 12$ सेमी



$\because$ OP त्रिज्या और PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore$ $OP \perp PQ$

$\therefore$ $\Delta\ OPQ$ समकोण त्रिभुज है।

तब, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OP^2 + PQ^2 = OQ^2$$

$\Rightarrow$ $(5)^2 + PQ^2 = (12)^2$ $\Rightarrow$ $PQ^2 = 12^2 - 5^2$

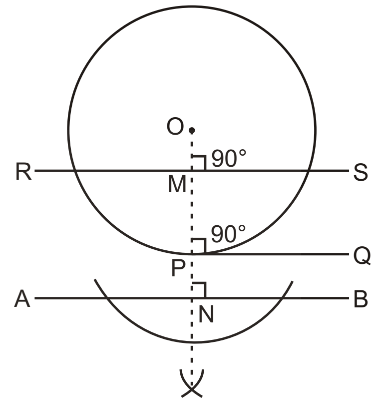
$= 144 - 25 = 119$

$\Rightarrow$ $PQ = \sqrt{119}$ सेमी

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 4. एक वृत्त खींचिए और एक दी गई रेखा के समान्तर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए कि उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।

हल : माना O केन्द्र का एक वृत्त है और AB एक दी गई रेखा है। हमें AB के समान्तर दो रेखाएँ (माना PQ व RS) खींचनी हैं जिनमें PQ स्पर्श रेखा और RS छेदक रेखा हो।



रचना विधि : (i) रेखा AB पर केन्द्र-बिन्दु से लम्ब ON खींचा जो वृत्त को P पर काटे।

(ii) त्रिज्या OP के बिन्दु P पर लम्ब PQ खींचिए। ***PQ* स्पर्श रेखा है।**

(iii) OP पर एक बिन्दु M लेकर M से OP पर लम्ब RS खींचा। ***RS* छेदक रेखा है।**

प्रश्नावली 10.2

● **निर्देश :** सही विकल्प चुनिए एवं उचित कारण दीजिए।

प्रश्न 1. एक बिन्दु *Q* से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 सेमी तथा *Q* की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है :

(a) 7 सेमी (b) 12 सेमी (c) 15 सेमी (d) 24.5 सेमी।

हल : माना वृत्त की त्रिज्या R सेमी है।

$\because$ बिन्दु Q से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई $(T) = 24$ सेमी

और बिन्दु Q से वृत्त के केन्द्र की दूरी $(D) = 25$ सेमी

तब, वृत्त पर किसी बिन्दु से

(स्पर्श रेखा की लम्बाई)^2 = (केन्द्र से दूरी)^2 − त्रिज्या^{2}

$\Rightarrow$ $T^2 = D^2 - R^2$

$\Rightarrow$ $R^2 = D^2 - T^2 = (25)^2 - (24)^2 = 625 - 576$

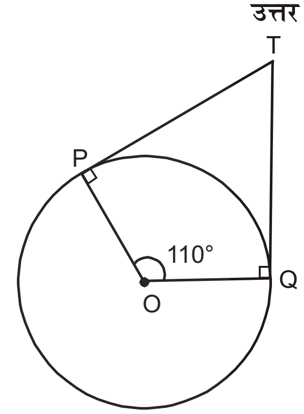
$\Rightarrow$ $R^2 = 49$

$\Rightarrow$ $R = 7$

$\Rightarrow$ त्रिज्या = 7 सेमी

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 2. चित्र में, यदि *TP*, *TQ* केन्द्र *O* वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ बराबर है :



(a) 60° (b) 70°

(c) 80° (d) 90°.

हल : $\because$ दिए हुए वृत्त में OP तथा OQ त्रिज्याएँ हैं और TP तथा TQ स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore$ $\angle P = 90°$ तथा $\angle Q = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $OPTQ$ में, $\angle POQ + \angle PTQ = 180°$

[$\because$ चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।]

$\therefore$ $110° + \angle PTQ = 180°$

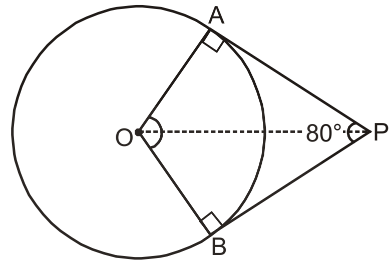
$\Rightarrow$ $\angle PTQ = 180° - 110° = 70°$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि एक बिन्दु *P* से *O* केन्द्र वाले किसी वृत्त पर *PA*, *PB* स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों तो $\angle POA$ बराबर है :

(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°.

हल : $\because$ वृत्त का केन्द्र O है और बिन्दु P से PA व PB वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं जिनके बीच का कोण $\angle APB = 80°$



$\because$ $\angle A = 90°$ व $\angle B = 90°$

$\Rightarrow$ $\angle AOB$ व $\angle APB$ सम्पूरक हैं।

$\therefore$ $\angle AOB + \angle APB = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle AOB + 80° = 180°$ $\Rightarrow$ $\angle AOB = 100°$

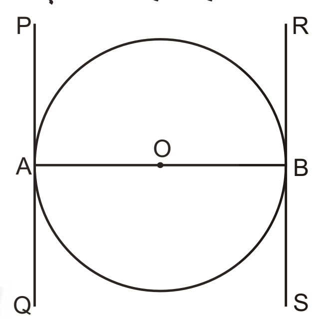
$\because$ रेखा OP, $\angle AOB$ को समद्विभाजित करती है,

$\therefore$ $$\angle POB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$$

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।

हल : दिया है : एक वृत्त का केन्द्र O तथा व्यास AB है। व्यास के सिरों A तथा B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ PAQ तथा RBS खींची गई हैं।



सिद्ध करना है : $PQ \parallel RS$

उपपत्ति : $\because AB$ वृत्त का व्यास है और PAQ तथा RBS बिन्दुओं A तथा B पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore$ $\angle PAB = 90°$

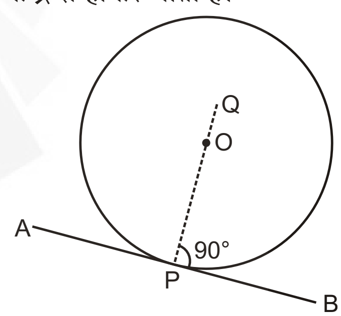
तथा $\angle ABS = 90°$

परन्तु $\angle PAB$ तथा $\angle ABS$ ऋजु रेखाओं PQ तथा RS को तिर्यक रेखा AB के द्वारा काटने से बने समान एकान्तर कोण हैं।

अत: $\boldsymbol{PQ \parallel RS}$ **Proved.**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

हल : दिया है : एक वृत्त का केन्द्र O है और AB वृत्त की स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है। P से वृत्त की स्पर्श रेखा AB पर PQ लम्ब खींचा गया है।



सिद्ध करना है : लम्ब PQ वृत्त के केन्द्र O से जाता है।

उपपत्ति : $\because AP$, वृत्त के स्पर्श बिन्दु P पर स्पर्श-रेखा है।

$\therefore$ AP, वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होगी।

$\because$ $PQ \perp AP$

$\therefore$ PQ रेखा में वृत्त की त्रिज्या समाहित होगी।

$\because$ त्रिज्या का एक सिरा P है, तब दूसरा सिरा केन्द्र O होगा।

$\therefore$ रेखा PQ में केन्द्र O भी समाहित है।

अत: **लम्ब PQ वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है।** **Proved.**

प्रश्न 6. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दु A से वृत्त के केन्द्र की दूरी $(D) = 5$ सेमी,

वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई $(T) = 4$ सेमी

माना वृत्त की त्रिज्या R सेमी है।

$\because$ बिन्दु A से, **(वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई $T)^2$ = (वृत्त के केन्द्र से दूरी $D)^2$ − (त्रिज्या $R)^2$**

$\therefore$ $(4)^2 = (5)^2 - R^2$

$\Rightarrow$ $R^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

$\therefore$ $R = 3$ सेमी

अत: **वृत्त की त्रिज्या $R = 3$ सेमी।** **उत्तर**

प्रश्न 7. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी तथा 3 सेमी हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल : माना O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं जिनकी त्रिज्याएँ OA तथा OP क्रमश: 5 सेमी व 3 सेमी हैं।

बड़े वृत्त की एक जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

$\therefore$ त्रिज्या $OP \perp AB$

$\Rightarrow$ $OP \perp AB$

$\therefore$ $\Delta\, OPA$ समकोणीय त्रिभुज है।

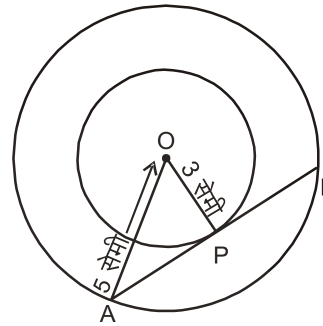
$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AP^2 + OP^2 = OA^2$$

$\Rightarrow$ $AP^2 + (3)^2 = (5)^2$

$\Rightarrow$ $AP^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow$ $AP = 4$ सेमी



परन्तु बड़े वृत्त में, जीवा AB पर केन्द्र O से OP लम्ब है।

$\therefore$ P, AB को अर्द्धित करता है

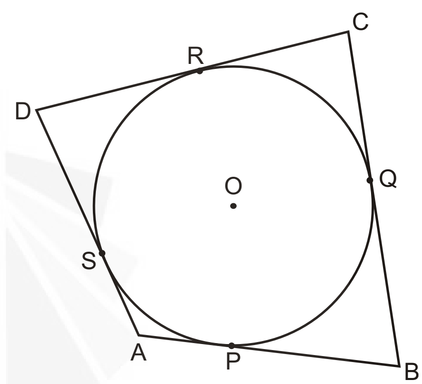
$\therefore$ $AP = BP$ $\Rightarrow$ $BP = 4$ सेमी

तब, जीवा AB की लम्बाई $= AP + BP = 4 + 4 =$ **8 सेमी।** **उत्तर**

प्रश्न 8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है। सिद्ध कीजिए :

$$\boldsymbol{AB + CD = AD + BC}$$

हल : दिया है : O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमश: बिन्दुओं P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है : $AB + CD = AD + BC$

उपपत्ति : $\because$ AB तथा AD वृत्त को P तथा S पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore$ $AP = AS$ ...(1)

पुन: AB तथा BC वृत्त को P तथा Q पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore$ $PB = BQ$ ...(2)

$\because$ BC तथा CD वृत्त को Q तथा R पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore$ $QC = CR$ ...(3)

और CD तथा DA वृत्त को R तथा S पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore$ $DR = SD$ ...(4)

[$\because$ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं।]

$AB + CD = AP + PB + DR + CR$ (चित्र देखिए)

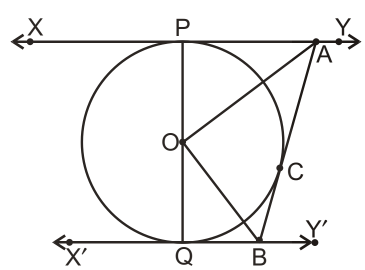
$= AS + BQ + SD + QC$ [समीकरण (1), (2), (3) व (4) से]

$= (AS + SD) + (BQ + QC)$

$= AD + BC$ (चित्र से)

अत: $\boldsymbol{AB + CD = AD + BC}$ **Proved.**

प्रश्न 9. संलग्न आकृति में, XY और $X'Y'$, O केन्द्र वाले एक वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A पर तथा $X'Y'$ को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$ है।



हल : दिया है : O केन्द्र वाले वृत्त की XY तथा $X'Y'$ दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं। वृत्त पर एक बिन्दु C से स्पर्श रेखा AB खींची गई है जो XY को A पर तथा $X'Y'$ को B पर काटती है। OA तथा OB को मिलाया गया है।

सिद्ध करना है : $\angle AOB = 90°$

रचना : रेखाखण्ड OC खींचा।

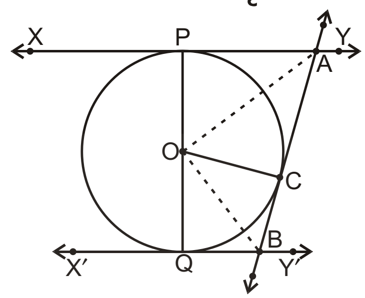
उपपत्ति : $\because XY$ और $X'Y'$ वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं जो वृत्त को (माना) P तथा Q पर स्पर्श करती हैं। C से वृत्त की एक स्पर्श रेखा AB, XY को A पर तथा $X'Y'$ को B पर काटती है।

$\therefore$ बिन्दु A से वृत्त पर AP व AC स्पर्श रेखाएँ हैं।

तब, $\Delta\, OPA$ व $\Delta\, OCA$ में, $OP = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।)

$AP = AC$ (बाह्य बिन्दु A से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)



$$\Delta OPA \cong \Delta OCA \quad \text{(SSS से)}$$

⇒ $\angle POA = \angle AOC$ (C.P.C.T.) ...(1)

इसी प्रकार, बिन्दु B से वृत्त पर BQ और BC स्पर्श रेखाएँ हैं।

तब, ΔOQB तथा ΔOBC में, $OQ = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।)

$BQ = BC$

(बाह्य बिन्दु B से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।)

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\Delta OQB \cong \Delta OBC$ (SSS से)

⇒ $\angle BOQ = \angle COB$ (C.P.C.T.) ...(2)

∵ $\angle POA + \angle AOC + \angle COB + \angle BOQ = 180°$ [∵ चतुर्भुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।]

⇒ $\angle AOC + \angle AOC + \angle COB + \angle COB = 180°$ [समीकरण (1) व समीकरण (2) से]

⇒ $2(\angle AOC + \angle COB) = 180°$

⇒ $\angle AOC + \angle COB = 90°$ [∵ $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$]

अत: $\boldsymbol{\angle AOB = 90°}$ **Proved.**

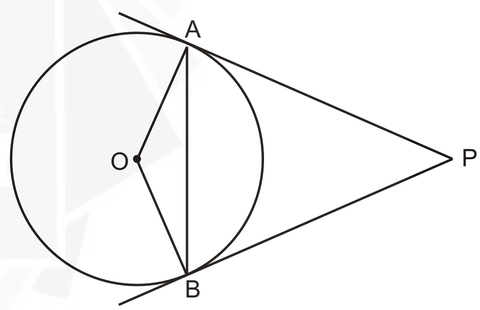
प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूरक होता है।

हल : दिया है : O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर एक बिन्दु P है। P से वृत्त पर PA तथा PB दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं। स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $\angle APB$ है। स्पर्श बिन्दुओं को रेखा AB मिलाती है जो वृत्त के केन्द्र पर $\angle AOB$ बनाती है।

सिद्ध करना है : $\angle APB$, $\angle AOB$ का सम्पूरक है।

उपपत्ति : ∵ OA वृत्त की त्रिज्या है और बाह्य बिन्दु P से PA स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु A पर स्पर्श करती है।

∴ $\angle OAP = 90°$ ...(1)



इसी प्रकार, OB वृत्त की त्रिज्या है और बाह्य बिन्दु P से PB वृत्त की स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु B पर स्पर्श करती है।

∴ $\angle OBP = 90°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$\angle OAP + \angle OBP = 90° + 90° = 180°$ ...(3)

तब, चतुर्भुज $OAPB$ में,

$\angle AOB + \angle OAP + \angle OBP + \angle APB = 360°$

[∵ चतुर्भुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।]

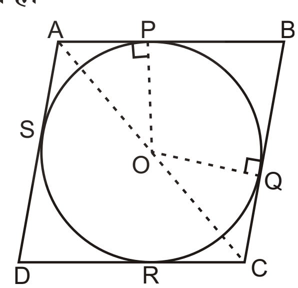
⇒ $\angle AOB + 180° + \angle APB = 360°$ [समीकरण (3) से]

⇒ $\angle AOB + \angle APB = 360° - 180° = 180°$

⇒ $\angle AOB + \angle APB = 180°$

अत: **$\angle APB$, $\angle AOB$ का सम्पूरक है।** **Proved.**

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज होता है।



हल : दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ जिसकी भुजाएँ वृत्त को क्रमश: P, Q, R और S बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

रचना : AC, OP और OQ को मिलाया।

उपपत्ति : चूँकि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं,

∴ $AP = AS, \quad BP = BQ, \quad CQ = CR$

तथा $DR = DS$

अब, $\Delta\, OAP$ और $\Delta\, OCQ$ में,

$OP = OQ$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।)

$\angle OAP = \angle OCQ$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के अर्द्धक हैं।)

$\angle OPA = \angle OQC$ (प्रत्येक समकोण है।)

$\therefore$ दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अर्थात् $\Delta\, OAP \cong \Delta\, OCQ$ (ASA से)

$\Rightarrow$ $AP = CQ$ (C.P.C.T. से)

$\Rightarrow$ $AP + BP = CQ + BP = CQ + BQ$ $(\because BP = BQ)$

$\Rightarrow$ $AB = BC$

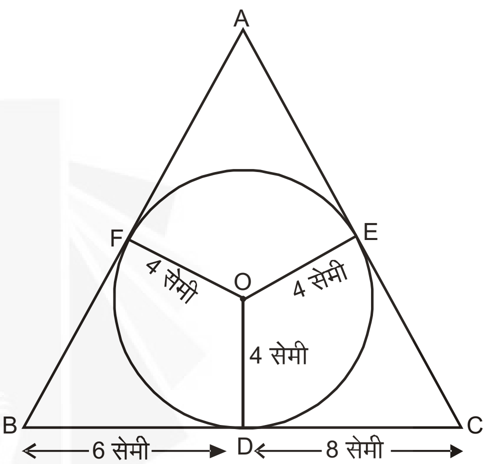
इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि $AD = AB$ तथा $BC = CD$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$AB = CD = BC = AD$$

अत: ***ABCD* एक समचतुर्भुज है।** **Proved.**

प्रश्न 12. 4 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज *ABC* इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखण्ड *BD* और *DC* (जिनमें स्पर्श बिन्दु *D* द्वारा *BC* विभाजित है) की लम्बाइयाँ क्रमश: 8 सेमी और 6 सेमी हैं। भुजाएँ *AB* और *AC* ज्ञात कीजिए।



हल : चित्र में, ABC एक त्रिभुज है जिसके अन्तर्वृत्त का केन्द्र O है तथा अन्तर्वृत्त की त्रिज्याएँ $OD = OE = OF = 4$ सेमी हैं।

स्पर्श बिन्दु D से BC के खण्ड $BD = 6$ सेमी तथा $DC = 8$ सेमी हैं।

तब, $BF = BD = 6$ सेमी तथा $CE = CD = 8$ सेमी

[$\because$ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।]

माना $AF = AE = x$ सेमी

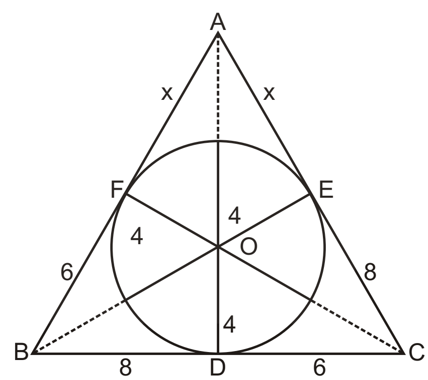
तब, $AB = AF + BF = (x + 6)$ सेमी $\Rightarrow$ $c = (x + 6)$ सेमी

[$\because \Delta\, ABC$ से $BC = a,\ AB = c,\ CA = b$]

$BC = BD + DC = 8 + 6 = 14$ सेमी $\Rightarrow$ $a = 14$ सेमी

तथा $CA = AE + CE = (x + 8)$ सेमी $\Rightarrow$ $b = (x + 8)$ सेमी

$\because$ Δ का अर्द्धपरिमाप $s = \dfrac{a + b + c}{2}$



$\therefore$ $s = \dfrac{14 + (x + 8) + (x + 6)}{2}$

$= \dfrac{2\,x + 28}{2} = (x + 14)$

$\therefore$ $(s - a) = (x + 14) - 14 = x$

$(s - b) = (x + 14) - (x + 8) = 6$

$(s - c) = (x + 14) - (x + 6) = 8$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$ (हीरोन के सूत्र से)

$3 = \sqrt{(x + 14)\, x \times 6 \times 8} = \sqrt{48\, x\,(x + 14)}$

$= 4\sqrt{3\, x\,(x + 14)} = 4\sqrt{3\, x^2 + 42\, x}$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \Delta\, AOB$ का क्षेत्रफल $+ \Delta\, BOC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta\, COA$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{OF \times AB}{2} + \frac{OD \times BC}{2} + \frac{OE \times CA}{2} \qquad [\because \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}]$$

$$= \frac{4 \times (x+6)}{2} + \frac{4 \times 14}{2} + \frac{4 \times (x+8)}{2}$$

$$= 2\,x + 12 + 28 + 2\,x + 16 = 4\,x + 56 = 4\,(x + 14)$$

$\because$ दोनों क्षेत्रफल बराबर हैं।

$\therefore$ $$4\sqrt{3\,x^2 + 42\,x} = 4\,(x + 14)$$

$\Rightarrow$ $$\sqrt{3\,x^2 + 42\,x} = x + 14$$

$\Rightarrow$ $$3\,x^2 + 42\,x = (x+14)^2 = x^2 + 28\,x + 196$$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow$ $$3\,x^2 + 42\,x - x^2 - 28\,x - 196 = 0$$

$\Rightarrow$ $$2\,x^2 + 14\,x - 196 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x^2 + 7\,x - 98 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x^2 + (14 - 7)\,x - 98 = 0$$ (मध्य पर विभक्तिकरण से)

$\Rightarrow$ $$x^2 + 14\,x - 7\,x - 98 = 0$$

$\Rightarrow$ $$x\,(x+14) - 7\,(x+14) = 0$$

$\Rightarrow$ $$(x+14)\,(x-7) = 0$$

तब, या तो $x + 14 = 0$ या $x - 7 = 0$

यदि $x + 14 = 0$ तो $x = -\,14$

और यदि $x - 7 = 0$ तो $x = 7$

x का मान $-\,14$ ऋणात्मक है जो लम्बाई नहीं हो सकता। अत: यह स्वीकार्य नहीं है।

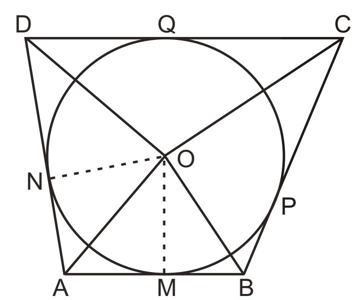
तब, $x = 7$

$\therefore$ भुजा $AB = x + 6 = 7 + 6 = 13$ सेमी

तथा भुजा $CA = x + 8 = 7 + 8 = 15$ सेमी

अत: **त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ AB व CA क्रमश: 13 सेमी व 15 सेमी हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण अन्तरित करती हैं।



हल : दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD व DA वृत्त को क्रमश: बिन्दुओं M, P, Q व N पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है : $\angle\, AOB + \angle\, COD = 180°$

रचना : स्पर्श बिन्दु M और N को केन्द्र O से मिलाया।

उपपत्ति : माना $\angle\, A = 2\,\alpha$, $\angle\, B = 2\,\beta$,

$\angle\, C = 2\,\gamma$, $\angle\, D = 2\,\delta$

$\Delta\, OAM$ और $\Delta\, OAN$ में,

$\angle\, OMA = \angle\, ONA$ (प्रत्येक समकोण है।)

$OM = ON$ (एक ही वृत्त की त्रिज्या है।)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ है।)

$\therefore$ दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अर्थात $\Delta\, OAM \cong \Delta\, OAN$ (SAS से)

$\Rightarrow$ $$\angle\, OAM = \angle\, OAN = \frac{1}{2}(\angle\, A) = \frac{1}{2}\,(2\,\alpha) = \alpha$$ (C.P.C.T. से)

$\Rightarrow$ $$\angle\, OAB = \angle\, OAD = \alpha$$

इसी प्रकार, $$\angle\, OBA = \angle\, OBC = \beta$$

$$\angle\, OCB = \angle\, OCD = \gamma$$

तथा $$\angle\, ODA = \angle\, ODC = \delta$$

अब, $\Delta\ AOB$ में,

$$\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta)$$

[∵ त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।]

तथा $$\angle COD = 180° - \angle OCD - \angle ODC = 180° - \gamma - \delta = 180° - (\gamma + \delta)$$

$$\angle AOB + \angle COD = \{180° - (\alpha + \beta)\} + \{180° - (\gamma + \delta)\}$$ (जोड़ने पर)

$$= 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \quad ...(1)$$

परन्तु $$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$ [∵ चतुर्भुज के अन्त:कोणों का योग 360° होता है।]

⇒ $$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360°$$

⇒ $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$$

अत: समीकरण (1) से,

$$\boldsymbol{\angle AOB + \angle COD = 360° - 180° = 180°}$$ **Proved.**