

माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।



गणित कक्षा | **10**

NCERT ZONE

प्रश्नावली 12.1

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)

प्रश्न 1. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 सेमी और 9 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

हल : दिया है, पहले वृत्त की त्रिज्या (r_1) = 19 सेमी
 \therefore पहले वृत्त की परिधि = $2\pi r_1 = 2\pi \times 19 = 38\pi$ सेमी
 तथा दूसरे वृत्त की त्रिज्या (r_2) = 9 सेमी
 \therefore दूसरे वृत्त की परिधि = $2\pi r_2 = 2\pi \times 9 = 18\pi$ सेमी
 \therefore दोनों वृत्तों की परिधियों का योग = $(38\pi + 18\pi) = 56\pi$ सेमी
 \therefore वांछित वृत्त की परिधि = 56π सेमी
 माना वांछित वृत्त की त्रिज्या r है।
 तब, वांछित वृत्त की परिधि = 56π
 या $2\pi r = 56\pi$
 $\therefore r = \frac{56\pi}{2\pi} = 28$ सेमी

अतः अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या = 28 सेमी।

उत्तर

प्रश्न 2. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 सेमी और 6 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

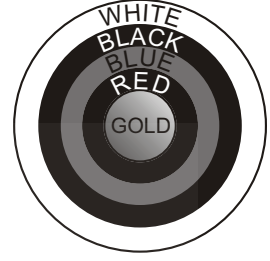
हल : दिया है, पहले वृत्त की त्रिज्या (r_1) = 8 सेमी
 \therefore पहले वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r_1^2 = \pi \times 8 \times 8 = 64\pi$ वर्ग सेमी
 इसी प्रकार, दूसरे वृत्त की त्रिज्या (r_2) = 6 सेमी
 \therefore दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r_2^2 = \pi \times 6 \times 6 = 36\pi$ वर्ग सेमी
 \therefore दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग = $64\pi + 36\pi = 100\pi$ वर्ग सेमी
 \therefore वांछित वृत्त का क्षेत्रफल = 100π वर्ग सेमी
 माना वांछित वृत्त की त्रिज्या r सेमी है।
 तब, वांछित वृत्त का क्षेत्रफल = 100π वर्ग सेमी
 $\Rightarrow \pi r^2 = 100\pi$
 $\therefore r^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = 10$ सेमी

अतः अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या = 10 सेमी।

उत्तर

2 गणित ■ कक्षा 10

प्रश्न 3. दी गई आकृति एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केन्द्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिह्नित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 सेमी है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 सेमी चौड़ी है। अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : ∴ सबसे पहले क्षेत्र का व्यास = 21 सेमी

$$\therefore \text{GOLD क्षेत्र की त्रिज्या } R_G = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ सेमी}$$

और अगली प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई = 10.5 सेमी

तीरंदाजी के पाँच क्षेत्रों का क्रम = **GOLD, RED, BLUE, BLACK, WHITE**

$$\therefore \text{RED क्षेत्र की भीतरी त्रिज्या } R_{r2} = 10.5 \text{ सेमी}$$

तथा बाहरी त्रिज्या $R_{r1} = R_{r2} + 10.5 = 10.5 + 10.5 = 21.0$ सेमी

तब, BLUE क्षेत्र की भीतरी त्रिज्या $R_{B2} = 21.0$ सेमी

तथा बाहरी त्रिज्या $R_{B1} = R_{B2} + 10.5$ सेमी = $21.0 + 10.5 = 31.5$ सेमी

तब, BLACK क्षेत्र की भीतरी त्रिज्या $R_{b2} = 31.5$ सेमी

तथा बाहरी त्रिज्या $R_{b1} = R_{b2} + 10.5$ सेमी = $31.5 + 10.5 = 42.0$ सेमी

तब, WHITE क्षेत्र की भीतरी त्रिज्या $R_{w2} = 42.0$ सेमी

बाहरी त्रिज्या $R_{w1} = R_{w2} + 10.5$ सेमी = $42.0 + 10.5 = 52.5$ सेमी

इस प्रकार क्षेत्रवार त्रिज्याएँ :

क्षेत्र	बाहरी त्रिज्या (सेमी में)	भीतरी त्रिज्या (सेमी में)	[बाहरी त्रिज्या + भीतरी त्रिज्या] (सेमी में)	[बाहरी त्रिज्या – भीतरी त्रिज्या] (सेमी में)
GOLD	$R_G = 10.5$	शून्य	10.5	10.5
RED	$R_{r1} = 21.0$	$R_{r2} = 10.5$	31.5	10.5
BLUE	$R_{B1} = 31.5$	$R_{B2} = 21.0$	52.5	10.5
BLACK	$R_{b1} = 42.0$	$R_{b2} = 31.5$	73.5	10.5
WHITE	$R_{w1} = 52.5$	$R_{w2} = 42.0$	94.5	10.5

∴ क्षेत्र वलयाकार हैं।

अतः किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\pi \times$ त्रिज्याओं का योग \times त्रिज्याओं का अन्तर

$$\therefore \text{GOLD क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \times 10.5 \times 10.5 = \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2} = \frac{693}{2}$$

$$= 346.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

$$\text{RED क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \times 31.5 \times 10.5 = \frac{22}{7} \times 31.5 \times \frac{21}{2}$$

$$= 1039.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

$$\text{BLUE क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \times 52.5 \times 10.5 = \frac{22}{7} \times 52.5 \times \frac{21}{2}$$

$$= 1732.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

$$\text{BLACK क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \times 73.5 \times 10.5 = \frac{22}{7} \times 73.5 \times \frac{21}{2}$$

$$= 2425.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

$$\text{WHITE क्षेत्र का क्षेत्रफल} = \pi \times 94.5 \times 10.5 = \frac{22}{7} \times 94.5 \times \frac{21}{2}$$

$$= 3118.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल 3

प्रश्न 4. किसी कार के प्रत्येक पहिए का व्यास 80 सेमी है। यदि यह कार 66 किमी प्रति घण्टे की चाल से चल रही है तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाता है?

हल : दिया है, कार के पहिए का व्यास = 80 सेमी

∴ कार के पहिए की परिधि = $\pi \times$ व्यास [∵ परिधि = πd]

$$= \frac{22}{7} \times 80 \text{ सेमी} = \frac{1760}{7} \text{ सेमी}$$

तथा कार की चाल = 66 किमी प्रति घण्टा

$$= 66 \times \frac{1000}{60} \text{ मीटर प्रति मिनट}$$

$$= 66 \times \frac{1000}{60} \times 100 \text{ सेमी प्रति मिनट} = 110000 \text{ सेमी प्रति मिनट}$$

∴ कार द्वारा 10 मिनट में चली दूरी = चाल \times समय = $110000 \times 10 = 1100000$ सेमी

∴ 10 मिनट में चली दूरी 1100000 सेमी के लिए पहिए के चक्करों की संख्या

$$= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{पहिए द्वारा 1 चक्कर में चली दूरी (परिधि)}}$$

$$= \frac{1100000}{\frac{1760}{7}} = \frac{1100000 \times 7}{1760} = 4375$$

अतः 10 मिनट में कार का प्रत्येक पहिया 4375 चक्कर लगाएगा। उत्तर

प्रश्न 5. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो उस वृत्त की त्रिज्या है :

- (a) 2 मात्रक (b) π मात्रक (c) 4 मात्रक (d) 7 मात्रक

हल : माना वृत्त की त्रिज्या R है।

तब, वृत्त का परिमाण (परिधि) = $2\pi R$ और वृत्त का क्षेत्रफल = πR^2

∴ संख्यात्मक रूप से, वृत्त का क्षेत्रफल = वृत्त का परिमाण

$$\pi R^2 = 2\pi R$$

$$R = 2$$

∴ वृत्त की त्रिज्या = 2 मात्रक

अतः विकल्प (a) सही है। उत्तर

प्रश्नावली 12.2

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)

प्रश्न 1. 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 6 सेमी

तथा त्रिज्यखण्ड का कोण (θ) = 60°

तब, त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6$

$$= \frac{132}{7} \text{ वर्ग सेमी} = 18.857 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= 18.86 \text{ वर्ग सेमी (लगभग)}$$

अतः त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = 18.86 वर्ग सेमी (लगभग) या $\frac{132}{7}$ वर्ग सेमी। उत्तर

प्रश्न 2. एक वृत्त के चतुर्थांश (Quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी है।

$$\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए} \right)$$

4 गणित ■ कक्षा 10

हल : माना वृत्त की त्रिज्या r है।

$$\text{वृत्त की परिधि } (2\pi r) = 22 \text{ सेमी} \quad (\text{दिया है})$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 22}{7} \times r = 22$$

$$r = \frac{22 \times 7}{22 \times 2} = \frac{7}{2} \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{तब, वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{77}{8} \text{ वर्ग सेमी} = 9.625 \text{ वर्ग सेमी।} \end{aligned} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 3. एक घड़ी की मिनट की सुई की लम्बाई 14 सेमी है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : \because मिनट की सुई 1 घण्टे या 60 मिनट में लगाती है 1 पूरा चक्कर

$$\therefore \text{मिनट की सुई 1 मिनट में लगाएगी} = \frac{1}{60} \text{ चक्कर}$$

$$\therefore \text{मिनट की सुई 5 मिनट में लगाएगी} = \frac{1}{60} \times 5 \text{ चक्कर} = \frac{1}{12} \text{ चक्कर}$$

मिनट की सुई द्वारा आच्छादित वृत्त की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

$$\begin{aligned} \text{तब, सुई द्वारा रचित क्षेत्रफल} &= \frac{1}{12} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \text{ वर्ग सेमी} = \frac{154}{3} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\text{अतः अभीष्ट क्षेत्रफल} = \frac{154}{3} \text{ वर्ग सेमी} = 51\frac{1}{3} \text{ वर्ग सेमी।} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 4. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अन्तरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) संगत लघु वृत्तखण्ड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : (i) दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 10 सेमी

तथा जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण (θ) = 90°

$$\begin{aligned} \therefore \text{संगत लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} &= r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{\sin \theta}{2} \right] \\ &= (10)^2 \left[\frac{3.14 \times 90^\circ}{360^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{2} \right] \\ &= \frac{100 \times 3.14 \times 90^\circ}{360^\circ} - \frac{100 \sin 90^\circ}{2} \\ &= \frac{157}{2} - 50 = \frac{57}{2} = 28.5 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

अतः संगत लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = 28.5 वर्ग सेमी।

● (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 - \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \left(1 - \frac{\theta}{360^\circ} \right) \times \pi r^2 \\ &= \left[1 - \frac{90^\circ}{360^\circ} \right] \times 3.14 \times (10)^2 \\ &= \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100 = \frac{3 \times 314}{4} = 235.5 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

अतः संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = 235.5 वर्ग सेमी।

प्रश्न 5. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिए :

- (i) चाप की लम्बाई, (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल,
(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल।

उत्तर

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 21 सेमी
तथा चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\theta = 60^\circ$

● (i) चाप की लम्बाई (l) = $\frac{\theta}{360^\circ} \times$ परिधि = $\frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 = 22$ सेमी

अतः चाप की लम्बाई (l) = 22 सेमी।

उत्तर

● (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 231$ वर्ग सेमी

अतः अभीष्ट त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = 231 वर्ग सेमी।

उत्तर

● (iii) संगत जीवा द्वारा बने वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = $r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{\sin \theta}{2} \right]$
 $= (21)^2 \left[\frac{22 \times 60^\circ}{7 \times 360^\circ} - \frac{\sin 60^\circ}{2} \right] = 441 \left[\frac{11}{21} - \frac{\sqrt{3}}{2 \times 2} \right]$
 $= \frac{441 \times 11}{21} - \frac{441 \times \sqrt{3}}{4} = 231 - 110.25 \times 1.732$
 $= 231 - 190.95$ लगभग = 40.05 वर्ग सेमी

अतः अभीष्ट वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = 40.05 वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 6. 15 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखण्डों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$) का प्रयोग कीजिए।

हल : वृत्त की त्रिज्या (r) = 15 सेमी
तथा जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\theta = 60^\circ$

\therefore संगत लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = $r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin \theta \right] = (15)^2 \left[\frac{3.14 \times 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin 60^\circ \right]$
 $= 225 \left[\frac{1.57}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 225 \left[\frac{1.57}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$
 $= 225 \left[\frac{1.57}{3} - \frac{1.73}{4} \right] = 225 \left[\frac{6.28 - 5.19}{12} \right]$
 $= 225 \times \frac{1.09}{12} = \frac{245.25}{12.00} = \frac{327}{16} = 20.4375$ वर्ग सेमी

तब, संगत दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल
 $= \pi r^2 - \frac{327}{16}$ वर्ग सेमी = $(3.14 \times 15 \times 15) - \frac{327}{16}$
 $= \frac{1413}{2} - \frac{327}{16} = \frac{11304 - 327}{16}$
 $= \frac{10977}{16}$ वर्ग सेमी = 686.0625 वर्ग सेमी

अतः लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = 20.4375 वर्ग सेमी }
तथा दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = 686.0625 वर्ग सेमी। }

उत्तर

प्रश्न 7. त्रिज्या 12 सेमी वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अन्तरित करती है। संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 12 सेमी तथा जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\theta = 120^\circ$
 \therefore संगत (लघु) वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = $r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin \theta \right]$

$$= (12)^2 \left[\frac{3.14 \times 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin 120^\circ \right] = 144 \left[\frac{3.14}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

6 गणित ■ कक्षा 10

$$= 144 \left[\frac{3.14}{3} - \frac{1.73}{4} \right] = 144 \left[\frac{12.56 - 5.19}{12} \right]$$

$$= 12 \times 7.37 = 88.44 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः अभीष्ट वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = 88.44 वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 8. चित्र में 15 सेमी भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 मीटर लम्बी रस्सी से बाँध दिया गया है। ज्ञात कीजिए :



(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि यदि घोड़े को 5 मीटर लम्बी रस्सी के स्थान पर 10 मीटर लम्बी रस्सी से बाँध दिया जाए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : दिया है, वर्गाकार मैदान की भुजा = 15 मीटर

∴ पूरे मैदान का क्षेत्रफल = (भुजा)² = (15)² वर्ग मीटर = 225 वर्ग मीटर

- (i) ∴ घोड़ा एक 5 मीटर लम्बी रस्सी से बाँधा है, तब वह अधिकतम 5 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड की घास चर सकेगा जिसका कोण वर्ग के अन्तःकोण के बराबर अर्थात् 90° है।

$$\text{तब, त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 3.14 \times 5 \times 5 = \frac{78.50}{4} = 19.625 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः घोड़ा 19.625 वर्ग मीटर क्षेत्रफल की घास चर सकता है।

उत्तर

- (ii) यदि रस्सी की लम्बाई 10 मीटर कर दी जाए अर्थात् त्रिज्या $r = 10$ मीटर हो

$$\text{तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$$

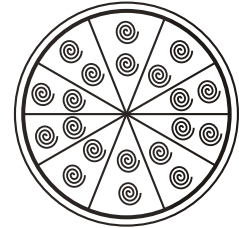
$$= \frac{1}{4} \times 3.14 \times (10)^2 = \frac{157}{2} = 78.5 \text{ वर्ग मीटर}$$

∴ अब घोड़ा 78.5 वर्ग मीटर क्षेत्र की घास चर सकेगा।

अतः क्षेत्रफल में वृद्धि = 78.5 - 19.625 = 58.875 वर्ग मीटर।

उत्तर

प्रश्न 9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 मिमी है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है तो ज्ञात कीजिए :



(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लम्बाई।

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल।

हल : दिया है, वृत्ताकार ब्रूच का व्यास = 35 मिमी \Rightarrow त्रिज्या (r) = $\frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{35}{2}$ मिमी

- (i) ∴ चाँदी के ब्रूच के वृत्तीय भाग की माप = वृत्तीय भाग की परिधि = $\pi \times \text{व्यास} = \frac{22}{7} \times 35 = 110$ मिमी

और 5 व्यासों की लम्बाई = 5 × 35 = 175 मिमी

अतः चाँदी के तार की कुल लम्बाई = 110 + 175 = 285 मिमी = 28.5 सेमी।

उत्तर

- (ii) ∴ वृत्ताकार ब्रूच का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{35}{2}\right)^2$
- $$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} = \frac{1925}{2} \text{ वर्ग मिमी}$$

∴ ब्रूच को 10 समान त्रिज्यखण्डों में विभक्त किया गया है।

$$\therefore 1 \text{ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{10} = \frac{1925}{2 \times 10} = 96.25 \text{ वर्ग मिमी}$$

अतः बूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = 96.25 वर्ग मिमी।

प्रश्न 10. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 सेमी त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

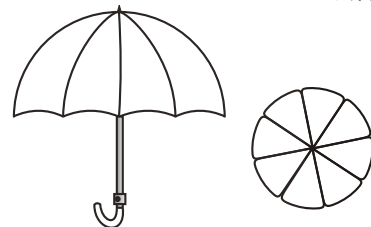
हल : दिया है, छतरी की त्रिज्या (r) = 45 सेमी

\therefore दो क्रमागत तानों के मध्य एक त्रिज्यखण्ड बनेगा।

$$\therefore \text{त्रिज्यखण्ड का कोण } \theta = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45 = \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45 = \frac{22275}{28} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

अतः दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = $\frac{22275}{28}$ वर्ग सेमी।



उत्तर

[\therefore छतरी में आठ ताने हैं]

प्रश्न 11. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, जो परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 सेमी है और 115° के कोण तक घूमकर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

हल : प्रत्येक वाइपर की सफाई का क्षेत्र उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल होगा जिसकी त्रिज्या (r) = पत्ती की लम्बाई = 25 सेमी तथा त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta = 115^\circ$

तब, प्रत्येक वाइपर के द्वारा साफ हुआ क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{115^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25 \\ &= \frac{158125}{252} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{दोनों वाइपरों द्वारा साफ किया गया क्षेत्रफल} = 2 \times \frac{158125}{252} = \frac{158125}{126} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः अभीष्ट सफाई का क्षेत्रफल = $\frac{158125}{126}$ वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखण्ड में 16.5 किमी की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : दिया है, त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta = 80^\circ$

तथा त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या (r) = 16.5 किमी = $\frac{33}{2}$ किमी

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{80^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times \frac{33}{2} \times \frac{33}{2} = \frac{2}{9} \times \frac{314}{100} \times \frac{33}{2} \times \frac{33}{2} \\ &= \frac{18997}{100} \text{ वर्ग किमी} = 189.97 \text{ वर्ग किमी} \end{aligned}$$

अतः समुद्र के उस भाग, जहाँ जहाजों को चेतावनी दी जा सके, का क्षेत्रफल = 189.97 वर्ग किमी।

उत्तर

8 गणित ■ कक्षा 10

प्रश्न 13. एक गोल मेजपोश पर छह समान डिजाइन बने हुए हैं जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 सेमी है तो ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए)

हल : दिया है, मेजपोश के वृत्त की त्रिज्या (r) = 28 सेमी

∴ सभी डिजाइनों के क्षेत्रफल समान हैं,

∴ प्रत्येक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल और जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण θ समान हैं तथा प्रत्येक $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ है।

$$\therefore \text{प्रत्येक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin \theta \right]$$

$$\therefore 6 \text{ वृत्तखण्डों का क्षेत्रफल} = 6r^2 \left[\frac{\pi \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin 60^\circ \right]$$

$$= 6 \times 28 \times 28 \left[\frac{22}{7} \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \sin 60^\circ \right] = 6 \times 28 \times 28 \times \left[\frac{11}{21} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right]$$

$$= \frac{6 \times 28 \times 28 \times 11}{21} - \frac{6 \times 28 \times 28 \times \sqrt{3}}{4}$$

$$= 2464 - 1176\sqrt{3}$$

$$= 2464 - 1176 \times 1.7$$

$$= 2464 - 1999.2 = 464.8 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$(\because \sqrt{3} = 1.7)$$

∴ ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेमी की दर से डिजाइन कराने का व्यय = ₹ $(0.35 \times 464.8) = ₹ 162.68$

अतः डिजाइनों को बनाने की लागत = ₹ 162.68।

उत्तर

प्रश्न 14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए :

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है, निम्नलिखित है :

(a) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (b) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (c) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (d) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या = R

तथा त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta = p^\circ$

$$\therefore \text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi R^2$$

$$= \frac{p}{360} \pi R^2$$

$$(\because \theta = p)$$

$$= \frac{p \times 2}{360 \times 2} \pi R^2$$

(2 से हर व अंश में गुणा करने पर)

$$= \frac{p}{720} \times 2\pi R^2$$

अतः विकल्प (d) सही है।

उत्तर

प्रश्नावली 12.3

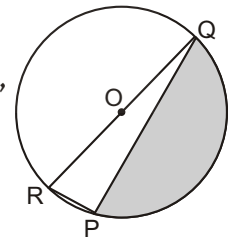
(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

प्रश्न 1. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24$ सेमी, $PR = 7$ सेमी तथा O वृत्त का केन्द्र है।

हल : ∴ O वृत्त का केन्द्र है। ∴ QR व्यास है।

तब,

$$\text{वृत्त की त्रिज्या } (r) = \frac{QR}{2}$$



ΔPQR समकोणीय होगा क्योंकि अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।
तब, समकोण ΔQPR में,

$[\because \angle QPR = 90^\circ]$
[पाइथागोरस प्रमेय से]

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$

$$= (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$$

$\therefore QR^2 = 625$ $[\because \text{दिया है, } PQ = 24 \text{ सेमी तथा } PR = 7 \text{ सेमी}]$

\therefore अर्द्धवृत्त $QRPQ$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \pi r^2$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{QR}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{QR^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{625}{4}$$

$(\because QR^2 = 625)$

$$= \frac{6875}{28} \text{ वर्ग सेमी}$$

और समकोण ΔQPR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times PQ \times PR = \frac{1}{2} \times 24 \times 7 = 84$ वर्ग सेमी

तब, छायांकित भाग का क्षेत्रफल $=$ अर्द्धवृत्त $QRPQ$ का क्षेत्रफल $-$ समकोण ΔQPR का क्षेत्रफल

$$= \frac{6875}{28} - 84 = \frac{6875 - 2352}{28} = \frac{4523}{28} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{4523}{28}$ वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 2. दी गई आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 सेमी और 14 सेमी हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।

हल : दिया है, बड़े वृत्त की त्रिज्या (r_1) = 14 सेमी

और छोटे वृत्त की त्रिज्या (r_2) = 7 सेमी

तथा त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta = 40^\circ$

\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल $=$ त्रिज्यखण्ड OAC का क्षेत्रफल

$-$ त्रिज्यखण्ड OBD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r_1^2 - \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r_2^2$$

$$= \frac{\theta \pi}{360^\circ} \times (r_1^2 - r_2^2)$$

$$= \frac{\theta \pi}{360^\circ} (r_1 + r_2) \times (r_1 - r_2) = \frac{40^\circ \times 22}{360^\circ \times 7} \times (14 + 7) \times (14 - 7)$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 7 = \frac{154}{3} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= \frac{154}{3}$ वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 3. दी गई आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $ABCD$ भुजा 14 सेमी का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्द्धवृत्त हैं।

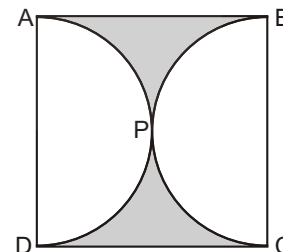
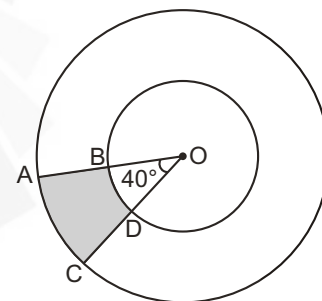
हल : दिया है, वर्ग $ABCD$ की भुजा = 14 सेमी

\therefore वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल $=$ भुजा² $= 14 \times 14$ वर्ग सेमी

$$= 196 \text{ वर्ग सेमी}$$

\therefore अर्द्धवृत्तों का व्यास $=$ वर्ग $ABCD$ की भुजा

$\therefore 2 \times$ त्रिज्या $= 14 \Rightarrow$ त्रिज्या (r) $= 7$ सेमी



10 गणित ■ कक्षा 10

$$\begin{aligned} \therefore \text{दोनों अर्द्धवृत्तों का कुल क्षेत्रफल} &= 2 \times \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

चित्र से स्पष्ट है कि छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग ABCD का क्षेत्रफल - दोनों अर्द्धवृत्तों का क्षेत्रफल
= 196 वर्ग सेमी - 154 वर्ग सेमी = 42 वर्ग सेमी

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 42 वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 4. दी गई आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 सेमी वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केन्द्र मानकर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।

हल : दिया है, समबाहु त्रिभुज OAB की भुजा = 12 सेमी

$$\begin{aligned} \therefore \text{समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल} &= \frac{\text{भुजा}^2 \times \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(12)^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{144 \sqrt{3}}{4} \\ &= 36 \sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

दीर्घ त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ क्योंकि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक अन्तःकोण 60° का होता है।

दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 6 सेमी

$$\therefore \text{दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{300^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 = \frac{660}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{छायांकित भाग का सम्पूर्ण क्षेत्रफल} &= \text{दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} + \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} \\ &= \left(\frac{660}{7} + 36 \sqrt{3} \right) \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

अतः सम्पूर्ण छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\left(\frac{660}{7} + 36 \sqrt{3} \right)$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 5. भुजा 4 सेमी वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 सेमी व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना ABCD एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक भुजा 4 सेमी है।

$$\therefore \text{वर्ग का क्षेत्रफल} = 4 \times 4 = 16 \text{ वर्ग सेमी}$$

दिया है, वृत्तों के चतुर्थांशों की त्रिज्या (r) = 1 सेमी

$$\begin{aligned} \therefore \text{चारों चतुर्थांशों का क्षेत्रफल} &= 4 \times \frac{1}{4} \pi r^2 \\ &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (1)^2 = \frac{22}{7} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

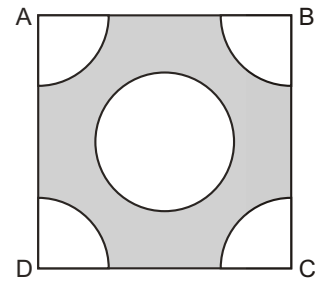
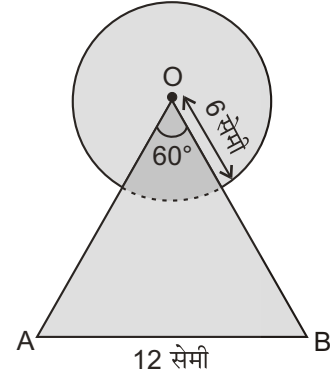
दिया है, बीच में काटे गए वृत्त का व्यास = 2 सेमी

$$\therefore \text{त्रिज्या (R)} = 1 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi R^2 = \frac{22}{7} \times (1)^2 = \frac{22}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{कुल वृत्ताकार भागों का क्षेत्रफल} = \text{चारों चतुर्थांश} + \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} + \frac{22}{7} = \frac{44}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$

\therefore वर्ग के क्षेत्रफल में से वृत्ताकार भागों का क्षेत्रफल घटा देने पर छायांकित भाग का क्षेत्रफल शेष बचेगा।



$$\begin{aligned} \therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \text{वर्ग का क्षेत्रफल} - \text{वृत्ताकार भागों का क्षेत्रफल} \\ &= 16 - \frac{44}{7} = \frac{112 - 44}{7} = \frac{68}{7} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\text{अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \frac{68}{7} \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. एक वृत्ताकार मेजपोश, जिसकी त्रिज्या 32 सेमी है, के बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिजाइन बना हुआ है, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इस छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\therefore \Delta ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

$$\begin{aligned} \therefore \angle A = \angle C = \angle B &= 60^\circ \\ [\because \text{समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक अन्तः कोण } 60^\circ \text{ का होता है}] \\ OB \text{ तथा } OC &\text{ वृत्ताकार मेजपोश की त्रिज्याएँ हैं।} \end{aligned}$$

$$\therefore OB = 32 \text{ सेमी} \quad \text{और} \quad \angle OBM = \frac{1}{2} \angle B = 30^\circ$$

केन्द्र O से $OM \perp BC$ खींचा।

$$\begin{aligned} \therefore BM &= \frac{1}{2} BC \quad [\because \text{केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब} \\ &\quad \text{जीवा को समद्विभाजित करता है}] \end{aligned}$$

अब, समकोण त्रिभुज OMB में,

$$\begin{aligned} \cos OBM &= \frac{BM}{BO} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\frac{1}{2} BC}{BO} \quad \left(\because BM = \frac{1}{2} BC \right) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\frac{1}{2} BC}{32} \\ \therefore 2 \times \frac{1}{2} BC &= 32 \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BC = 32 \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{समबाहु } \Delta ABC \text{ की भुजा} = 32\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समबाहु } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{(\text{भुजा})^2 \times \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(32\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{1024 \times 3 \times \sqrt{3}}{4} = 768\sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{सम्पूर्ण मेजपोश का क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 32 \times 32 = \frac{22528}{7} \text{ वर्ग सेमी} \quad (\text{यहाँ } r = 32 \text{ सेमी})$$

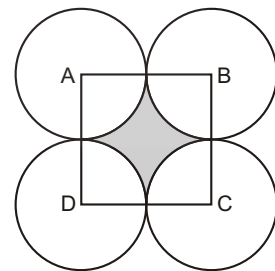
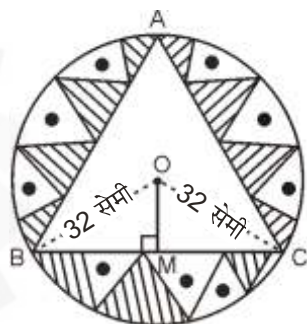
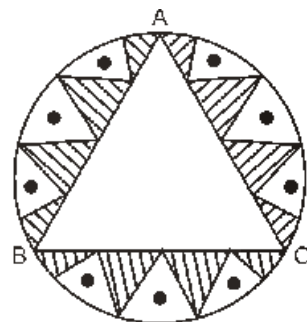
$$\begin{aligned} \text{अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \text{मेजपोश का क्षेत्रफल} - \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} \\ &= \left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3} \right) \text{ वर्ग सेमी।} \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 7. दी गई आकृति में, ABCD भुजा 14 सेमी वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केन्द्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, वर्ग ABCD की भुजा = 14 सेमी

$$\begin{aligned} \therefore \text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} &= (\text{भुजा})^2 \\ &= 14 \times 14 = 196 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$



12 गणित ■ कक्षा 10

चित्र से स्पष्ट है कि चारों वृत्तों के चतुर्थांश वर्ग $ABCD$ में समाहित हैं।

∴ चारों वृत्त-चतुर्थांशों का क्षेत्रफल = एक वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2$$

$$= 154 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\left[\because \text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{\text{वर्ग की भुजा}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ सेमी} \right]$$

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल - चारों वृत्तीय चतुर्थांशों का क्षेत्रफल

$$= (196 - 154) \text{ वर्ग सेमी} = 42 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 42 वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 8. दी गई आकृति एक दौड़ने का पथ (Racing Track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्द्धवृत्ताकार हैं।



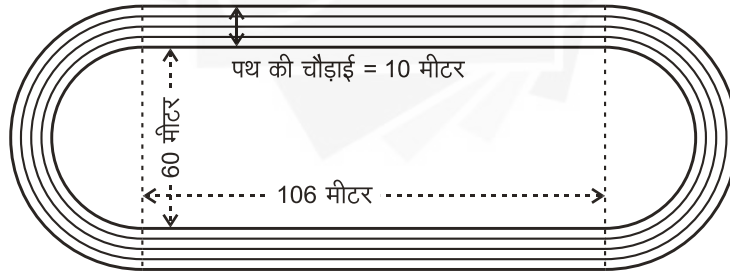
दोनों आन्तरिक समान्तर रेखाखण्डों के बीच की दूरी 60 मीटर है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखण्ड 106 मीटर लम्बा है। यदि यह पथ 10 मीटर चौड़ा है तो ज्ञात कीजिए :

(i) पथ के आन्तरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी

(ii) पथ का क्षेत्रफल।

हल : (i) दिया है, अर्द्धवृत्ताकार पथों की आन्तरिक त्रिज्या $r' = \frac{60}{2}$ मीटर = 30 मीटर

$$\begin{aligned} \therefore \text{दोनों अर्द्धवृत्तों की आन्तरिक परिधि} &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \pi r' \right) \\ &= 2 \pi r' = 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \text{ मीटर} = \frac{1320}{7} \text{ मीटर} \end{aligned}$$



दिया है, प्रत्येक रेखाखण्ड की लम्बाई = 106 मीटर

∴ दोनों आन्तरिक समान्तर रेखाखण्डों की लम्बाई = 106 मीटर + 106 मीटर = 212 मीटर

∴ पथ के आन्तरिक किनारों के अनुदिश 1 चक्कर की लम्बाई

= दोनों अर्द्धवृत्तों की आन्तरिक परिधि + दोनों आन्तरिक समान्तर रेखाखण्डों की लम्बाई

$$= \left(\frac{1320}{7} + 212 \right) \text{ मीटर} = \frac{1320 + 1484}{7} \text{ मीटर} = \frac{2804}{7} \text{ मीटर}$$

अतः पथ के आन्तरिक किनारों के अनुदिश 1 पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी = $\frac{2804}{7}$ मीटर।

उत्तर

● (ii) ∴ वृत्ताकार पथ भागों की आन्तरिक त्रिज्या $r' = 30$ मीटर और पथ चौड़ाई = 10 मीटर है।

∴ वृत्ताकार पथ भागों की बाह्य त्रिज्या $r = (30 + 10)$ मीटर = 40 मीटर

$$\begin{aligned} \therefore \text{दोनों वृत्ताकार भागों का क्षेत्रफल} &= \pi (r^2 - r'^2) \\ &= \pi (r + r') (r - r') = \pi (40 + 30) (40 - 30) \\ &= \frac{22}{7} \times 70 \times 10 = 2200 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

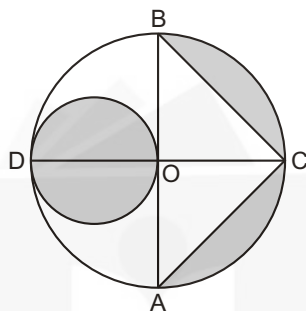
$$\begin{aligned} \text{वृत्ताकार भागों के अतिरिक्त पथ का क्षेत्रफल} &= 2 \times (\text{लम्बाई} \times \text{पथ की चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (106 \times 10) = 2120 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{पथ का कुल क्षेत्रफल} = \text{दोनों वृत्ताकार भागों का क्षेत्रफल} + \text{वृत्ताकार भागों के अतिरिक्त पथ का क्षेत्रफल} \\ = (2200 + 2120) \text{ वर्ग मीटर} = 4320 \text{ वर्ग मीटर}$$

अतः पथ का क्षेत्रफल = 4320 वर्ग मीटर।

उत्तर

प्रश्न 9. आकृति में, AB और CD केन्द्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लम्ब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि $OA = 7$ सेमी है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : \because बड़े वृत्त की त्रिज्या $OA = OD =$ छोटे वृत्त का व्यास

$$\therefore \text{छोटे वृत्त का व्यास} = OD = OA = 7 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{छोटे वृत्त की त्रिज्या } (r) = \frac{7}{2} \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{77}{2} = 38.5 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, अर्द्धवृत्त } AOB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \pi R^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 && (\because OA = R = 7 \text{ सेमी}) \\ &= 77 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times AB \times OC \\ &= \frac{1}{2} \times (2 \times OA) \times OA && (\because OC = OA \text{ तथा } AB = 2 \text{ } OA) \\ &= OA^2 = (7)^2 = 49 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{अर्द्धवृत्त } AOB \text{ के छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \text{अर्द्धवृत्त } AOB \text{ का क्षेत्रफल} - \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} \\ = (77 - 49) \text{ वर्ग सेमी} = 28 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः सम्पूर्ण छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= (\text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} \\ &\quad + \text{अर्द्धवृत्त } AOB \text{ के छायांकित भाग का क्षेत्रफल}) \\ &= (38.5 + 28) = 66.5 \text{ वर्ग सेमी।} \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 10. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 सेमी² है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केन्द्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73205$ लीजिए)

14 गणित ■ कक्षा 10

हल : माना वृत्तों की त्रिज्याएँ r सेमी हैं।

∴ समबाहु त्रिभुज की भुजा = $2r$ सेमी

तब, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= (2r)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = r^2 \times \sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी}$$

परन्तु प्रश्नानुसार समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 17320.5 वर्ग सेमी है।

$$\therefore r^2 \sqrt{3} = 17320.5$$

$$\Rightarrow r^2 \times 1.73205 = 17320.5$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{17320.5}{1.73205} = \frac{1732050000}{173205} = 10000$$

$$\therefore r = \sqrt{10000} = 100 \text{ सेमी}$$

चित्र से, यह स्पष्ट है कि तीनों वृत्तों द्वारा त्रिभुज से बने त्रिज्यखण्डों का

$$\text{कुल क्षेत्रफल} = \left(\frac{60^\circ + 60^\circ + 60^\circ}{360^\circ} \right) \pi r^2$$

(∵ समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक शीर्ष कोण = 60°)

$$= \frac{1}{2} \times 3.14 \times 100 \times 100$$

$$(\because \pi = 3.14)$$

$$= 15700 \text{ वर्ग सेमी}$$

∴ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = 17320.5 वर्ग सेमी

अतः त्रिभुज के उस भाग का क्षेत्रफल जो वृत्तों के अन्दर नहीं है अर्थात् छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} - \text{त्रिज्यखण्डों का कुल क्षेत्रफल}$$

$$= 17320.5 - 15700 = 1620.5 \text{ वर्ग सेमी।}$$

उत्तर

प्रश्न 11. एक वर्गाकार रूमाल पर नौ वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी है (आकृति देखिए)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

$$\text{प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या } (r) = 7 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{प्रत्येक वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ वर्ग सेमी} = 154 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{नौ वृत्ताकार डिजाइनों का क्षेत्रफल} = 9 \times 154 = 1386 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\text{प्रत्येक पंक्ति में 3 वृत्त हैं।}$$

∴ रूमाल की लम्बाई = $3 \times \text{एक वृत्त का व्यास} = 3 \times 14 = 42$ सेमी

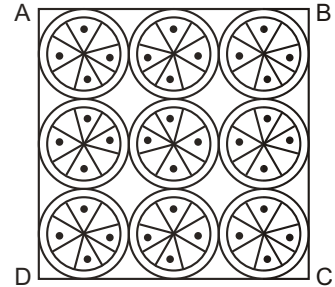
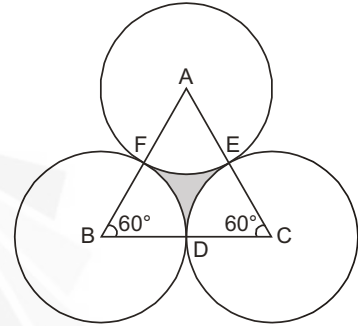
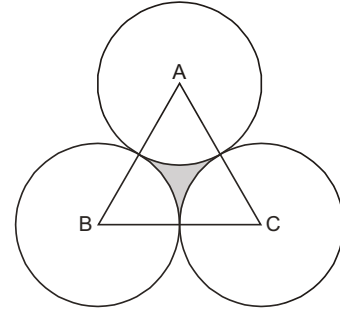
$$\therefore \text{वर्गाकार रूमाल का कुल क्षेत्रफल} = 42 \times 42 \text{ वर्ग सेमी} = 1764 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल} = \text{रूमाल का कुल क्षेत्रफल} - 9 \text{ वृत्ताकार डिजाइनों का क्षेत्रफल}$$

$$= (1764 - 1386) \text{ वर्ग सेमी} = 378 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल = 378 वर्ग सेमी।

उत्तर



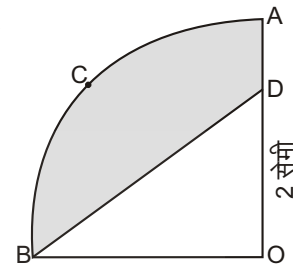
प्रश्न 12. दी गई आकृति में, $OACB$ केन्द्र O और त्रिज्या 3.5 सेमी वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि $OD = 2$ सेमी है तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) चतुर्थांश $OACB$, (ii) छायांकित भाग ।

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी तथा $OD = 2$ सेमी

● (i) चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$
 $= \frac{38.5}{4}$ वर्ग सेमी = $\frac{77}{8}$ वर्ग सेमी

अतः चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल = $\frac{77}{8}$ वर्ग सेमी।



उत्तर

● (ii) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल - ΔBOD का क्षेत्रफल
 $= \frac{77}{8} - \frac{1}{2} \times BO \times OD$ [\because त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times ऊँचाई]
 $= \frac{77}{8} - \frac{1}{2} \times$ त्रिज्या $\times 2$ ($\because OD = 2$ सेमी)
 $= \frac{77}{8} - \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2 = \frac{77}{8} - \frac{7}{2} = \frac{77-28}{8} = \frac{49}{8}$ वर्ग सेमी

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{49}{8}$ वर्ग सेमी।

उत्तर

प्रश्न 13. दी गई आकृति में, एक चतुर्थांश $OPBQ$ के अन्तर्गत एक वर्ग $OABC$ बना हुआ है। यदि $OA = 20$ सेमी है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : दिया है, वर्ग $OABC$ की भुजा $OA = 20$ सेमी

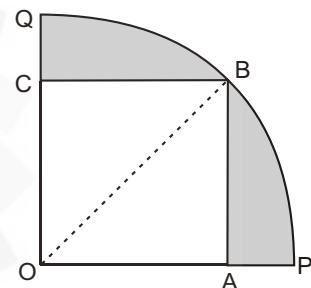
\therefore वर्ग $OABC$ का विकर्ण $OB =$ भुजा $\sqrt{2}$
 $= OA \sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ सेमी

\therefore चतुर्थांश $OPBQ$ की त्रिज्या (r) = $OB = 20\sqrt{2}$ सेमी

\therefore चतुर्थांश $OPBQ$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$
 $= \frac{1}{4} \times 3.14 \times (20\sqrt{2})^2$
 $= \frac{1}{4} \times 3.14 \times 20\sqrt{2} \times 20\sqrt{2} = 628$ वर्ग सेमी

और वर्ग $OABC$ का क्षेत्रफल = (भुजा) $^2 = (OA)^2 = (20)^2 = 400$ वर्ग सेमी

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = (चतुर्थांश $OPBQ$ का क्षेत्रफल - वर्ग $OABC$ का क्षेत्रफल)
 $= 628 - 400 = 228$ वर्ग सेमी।



($\because r = 20\sqrt{2}$ सेमी)

उत्तर

प्रश्न 14. AB और CD केन्द्र O तथा त्रिज्याओं 21 सेमी और 7 सेमी वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं। यदि $\angle AOB = 30^\circ$ है तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

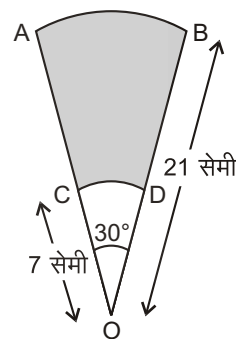
हल : दिए गए चित्र में,

त्रिज्यखण्ड $OBAO$ की लम्बाई (r_1) = 21 सेमी

तथा त्रिज्यखण्ड $OCDO$ की लम्बाई (r_2) = 7 सेमी

माना संकेन्द्रीय वृत्तों का त्रिज्यकोण (θ) = 30°

\therefore त्रिज्यखण्ड $OBAO$ का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \pi \times r_1^2$
 $= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$
 $= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = \frac{231}{2}$ वर्ग सेमी



उत्तर

16 गणित ■ कक्षा 10

तथा त्रिज्यखण्ड $OCDO$ का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

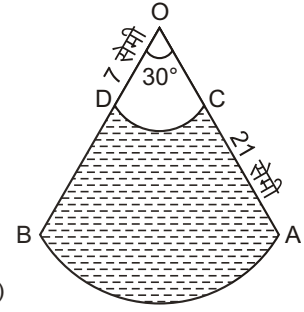
$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{77}{6} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = दोनों त्रिज्यखण्डों के क्षेत्रफलों का अन्तर

$$= (\text{त्रिज्यखण्ड } OBAO \text{ का क्षेत्रफल} - \text{त्रिज्यखण्ड } OCDO \text{ का क्षेत्रफल})$$

$$= \frac{231}{2} - \frac{77}{6} = \frac{693 - 77}{6} = \frac{616}{6} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \frac{308}{3} \text{ वर्ग सेमी।}$$



उत्तर

प्रश्न 15. दी गई आकृति में, ABC त्रिज्या 14 सेमी वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मानकर एक अर्द्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, चतुर्थांश ABC की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

$$\therefore \text{चतुर्थांश } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= 154 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{चतुर्थांश } ABC \text{ का क्षेत्रफल} = 154 \text{ वर्ग सेमी।}$$

$$\text{समकोण } \triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AC \times AB$$

$$\left[\because \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 14 \quad (\because AC = r = 14 \text{ सेमी})$$

$$= 98 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{समकोण } \triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल} = 98 \text{ वर्ग सेमी।}$$

समकोण त्रिभुज BAC में, $BC^2 = AC^2 + AB^2 = (14)^2 + (14)^2 = 392$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

($\because \angle BAC = 90^\circ$)

$$\therefore BC = \sqrt{392} = 14\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{अर्द्धवृत्त का व्यास } BC = 14\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{अर्द्धवृत्त की त्रिज्या } R = \frac{BC}{2} = 7\sqrt{2} \text{ सेमी}$$

$$\therefore \text{अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} = 154 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\therefore \text{अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} = 154 \text{ वर्ग सेमी।}$$

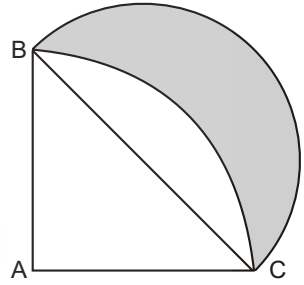
$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = BC \text{ व्यास वाले अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} - (\text{चतुर्थांश } ABC \text{ का क्षेत्रफल} - \text{समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल})$$

$$= \text{समकोण } \triangle BAC \text{ का क्षेत्रफल} + \text{अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} - \text{चतुर्थांश } ABC \text{ का क्षेत्रफल}$$

$$= (98 + 154 - 154) \text{ वर्ग सेमी} = 98 \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 98 वर्ग सेमी।

उत्तर



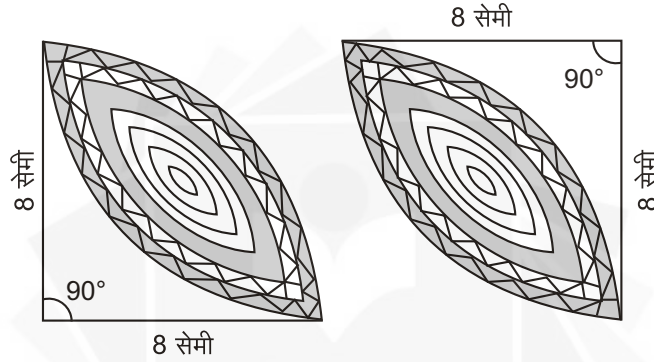
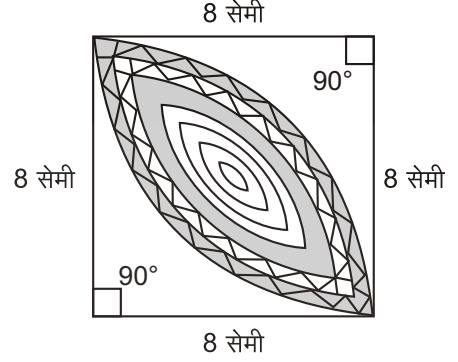
प्रश्न 16. दी गई आकृति में, छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 सेमी त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों के बीच उभयनिष्ठ है।

हल : ध्यान दीजिए दो समान त्रिज्यखण्डों को मिलाने पर दी गई आकृति प्राप्त होती है और लूप परस्पर आच्छादित करते हैं।

दिया है, चतुर्थांशों की त्रिज्याएँ (r) = 8 सेमी

तथा चतुर्थांश का कोण $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \text{एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 8 \times 8 = \frac{352}{7} \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$



इसी प्रकार, दूसरे चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{352}{7}$ वर्ग सेमी

दोनों चतुर्थांशों को मिलाने पर उनका क्षेत्रफल = $\left(\frac{352}{7} + \frac{352}{7}\right)$ वर्ग सेमी = $\frac{704}{7}$ वर्ग सेमी

इसमें वर्ग का क्षेत्रफल समाहित है और लूप के क्षेत्र परस्पर आच्छादित हैं।

\therefore लूप का क्षेत्रफल + वर्ग का क्षेत्रफल = दोनों चतुर्थांशों का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \text{लूप का क्षेत्रफल} + (8)^2 \text{ वर्ग सेमी} = \frac{704}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$\Rightarrow \text{लूप का क्षेत्रफल} = \left(\frac{704}{7} - 64\right) \text{ वर्ग सेमी} = \frac{704 - 448}{7} \text{ वर्ग सेमी} = \frac{256}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$

अतः छायांकित डिजाइन (लूप) का क्षेत्रफल = $\frac{256}{7}$ वर्ग सेमी।