

माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।



गणित कक्षा | **10**

NCERT ZONE

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

हल (i) दिया गया समीकरण : $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2(x - 3)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$

\Rightarrow उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

[सूत्र $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ से]

[दाएँ पक्ष को सरल करने पर]

[पक्षान्तरण से]

उत्तर

● (ii) दिया गया समीकरण : $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

$\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

\Rightarrow उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

[सरल करने पर]

[पक्षान्तरण से]

उत्तर

● (iii) दिया गया समीकरण : $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

$\Rightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) = x(x + 3) - 1(x + 3)$

$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - 1x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 - x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Rightarrow -3x + 1 = 0$

\Rightarrow उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 नहीं है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

[सरल करने पर]

[सरल करने पर]

[सरल करने पर]

[पक्षान्तरण से]

[सरल करने पर]

उत्तर

● (iv) दिया गया समीकरण :

$(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

$\Rightarrow x(2x + 1) - 3(2x + 1) = x(x + 5)$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 - x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$

\Rightarrow उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

[सरल करने पर]

[सरल करने पर]

[पक्षान्तरण से]

[सरल करने पर]

उत्तर

2 गणित ■ कक्षा 10

- (v) दिया गया समीकरण :

$$(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2x(x - 3) - 1(x - 3) = x(x - 1) + 5(x - 1) \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - 1x + 3 = x^2 - 1x + 5x - 5 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5 \quad [\text{संक्षेपीकरण से}]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 - x^2 - 4x + 5 = 0 \quad [\text{पक्षान्तरण से}]$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

उत्तर

- (vi) दिया गया समीकरण :

$$x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0 \quad [\text{पक्षान्तरण से}]$$

$$\Rightarrow 3x + 1 + 4x - 4 = 0 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow 7x - 3 = 0$$

उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 नहीं है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

उत्तर

- (vii) दिया गया समीकरण :

$$(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow x^3 + (2)^3 + 3 \cdot x \cdot 2(x + 2) = 2x(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x = 2x^3 - 2x \quad [\text{सूत्र : } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ से}]$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - 2x^3 + 2x = 0 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0 \quad [\text{पक्षान्तरण से}]$$

$$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 नहीं है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

उत्तर

- (viii) दिया गया समीकरण :

$$x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - (2)^3 - 3 \cdot x \cdot 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 - 6x(x - 2) \quad [\text{सूत्र : } (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ से}]$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 - 6x^2 + 12x \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 - x^3 + 8 + 6x^2 - 12x = 0 \quad [\text{सरल करने पर}]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 9 = 0 \quad [\text{संक्षेपीकरण से}]$$

उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।

अतः दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

उत्तर

प्रश्न 2. निम्नलिखित स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए :

(i) एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 मीटर² है। क्षेत्र की लम्बाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखण्ड की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।

(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णाकों को ज्ञात करना है।

(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगा। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।

(iv) एक रेलगाड़ी 480 किमी की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घण्टे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

- हल : (i)** माना भूखण्ड की चौड़ाई x मीटर है।
 प्रश्नानुसार, भूखण्ड की लम्बाई, उसकी चौड़ाई के दुगुने से 1 मीटर अधिक है।
 \therefore भूखण्ड की लम्बाई $= (2 \times \text{चौड़ाई}) + 1$
 $= (2 \times x) + 1 = (2x + 1)$ मीटर
 \therefore आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल $=$ लम्बाई \times चौड़ाई
 \therefore भूखण्ड का क्षेत्रफल $= (2x + 1) \times (x)$ वर्ग मीटर
 $= 2x^2 + x$ वर्ग मीटर
 परन्तु प्रश्नानुसार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 वर्ग मीटर है।
 \therefore $2x^2 + x = 528$
 \Rightarrow $2x^2 + x - 528 = 0$
 अतः अभीष्ट द्विघात समीकरण : $2x^2 + x - 528 = 0$ उत्तर
- **(ii)** माना पहला धन पूर्णांक x है।
 \therefore दूसरा क्रमागत धन पूर्णांक $= (x + 1)$
 \therefore पूर्णाकों का गुणनफल $= x(x + 1) = x^2 + x$
 परन्तु प्रश्नानुसार पूर्णाकों का गुणनफल 306 है।
 \therefore $x^2 + x = 306$
 \Rightarrow $x^2 + x - 306 = 0$
 अतः अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 + x - 306 = 0$ उत्तर
- **(iii)** माना रोहन की वर्तमान आयु x वर्ष है।
 \therefore उसकी माँ रोहन से 26 वर्ष बड़ी है।
 \therefore रोहन की माँ की वर्तमान आयु $= (x + 26)$ वर्ष
 तीन वर्ष बाद रोहन की आयु $(x + 3)$ वर्ष तथा उसकी माँ की आयु $(x + 26 + 3)$ या $(x + 29)$ वर्ष हो जाएगी।
 \therefore रोहन और उसकी माँ की आयु का गुणनफल $= (x + 3)(x + 29)$ वर्ष
 $= x(x + 29) + 3(x + 29)$ वर्ष
 $= x^2 + 29x + 3x + 87$ वर्ष
 $= x^2 + 32x + 87$ वर्ष
 परन्तु प्रश्नानुसार आयु का गुणनफल 360 है।
 \therefore $x^2 + 32x + 87 = 360$
 \Rightarrow $x^2 + 32x + 87 - 360 = 0$
 \Rightarrow $x^2 + 32x - 273 = 0$
 अतः अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 + 32x - 273 = 0$ उत्तर
- **(iv)** माना रेलगाड़ी की चाल x किमी प्रति घण्टा है।
 निर्धारित दूरी $= 480$ किमी
 \therefore सूत्र : समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$ के अनुसार रेलगाड़ी को 480 किमी दूरी तय करने में लगने वाला समय $= \frac{480}{x}$ घण्टे।
 यदि रेलगाड़ी की चाल 8 किमी प्रति घण्टा कम होती अर्थात् चाल $(x - 8)$ किमी प्रति घण्टा होती तो 480 किमी दूरी चलने में लगा समय $= \frac{480}{x - 8}$ घण्टे।
 \therefore प्रश्नानुसार, यह समय $\left(\frac{480}{x - 8}\right)$ पहले के समय $\left(\frac{480}{x}\right)$ से 3 घण्टे अधिक है।
 \therefore $\frac{480}{x - 8} - \frac{480}{x} = 3$
 \Rightarrow $\frac{480x - 480(x - 8)}{x(x - 8)} = 3$ [हरों का L.C.M. लेकर सरल करने पर]

4 गणित ■ कक्षा 10

$$\Rightarrow \frac{480x - 480x + 3840}{x^2 - 8x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3840}{x^2 - 8x} = 3 \quad \text{[सरलीकरण से]}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 24x = 3840 \quad \text{[वज्रगुणन से]}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 24x - 3840 = 0 \quad \text{[पक्षान्तरण से]}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 8x - 1280) = 0 \quad \text{[3 सार्व लेने पर]}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0 \quad \text{[दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर]}$$

अतः अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 - 8x - 1280 = 0$

उत्तर

प्रश्नावली 4.2

प्रश्न 1. गुणनखण्ड विधि से निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

हल : (i) दिया हुआ द्विघात समीकरण :

$$\therefore x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\therefore x^2 - (5 - 2)x - 10 = 0$$

$$\therefore x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$

$$\therefore x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow (x - 5) = 0 \text{ या } (x + 2) = 0$$

यदि $x - 5 = 0$ हो तो $x = 0 + 5 \Rightarrow x = 5$; और

यदि $x + 2 = 0$ हो तो $x = 0 - 2 \Rightarrow x = -2$,

अतः द्विघात समीकरण के मूल = 5 या -2

[मध्य-पद के विखण्डन से]

[सरल करने पर]

[समूह बनाकर सार्व लेने पर]

[पुनः सार्व $(x - 5)$ निकालने पर]

उत्तर

● (ii) दिया हुआ द्विघात समीकरण :

$$\therefore 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\therefore 2x^2 + (4 - 3)x - 6 = 0$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$$

$$\therefore 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$$

$$\therefore 2x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$$

$$\therefore (x + 2)(2x - 3) = 0$$

$$\therefore (x + 2)(2x - 3) = 0 \Rightarrow (x + 2) = 0 \text{ या } (2x - 3) = 0$$

यदि $x + 2 = 0$ हो तो $x = 0 - 2 \Rightarrow x = -2$; और

यदि $2x - 3 = 0$ हो तो $2x = 0 + 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

अतः द्विघात समीकरण के मूल = -2 या $\frac{3}{2}$

[मध्य-पद के विखण्डन से]

[सरल करने पर]

[समूह बनाने पर]

[समूह बनाकर सार्व लेने पर]

[पुनः सार्व $(x + 2)$ निकालने पर]

उत्तर

● (iii) दिया हुआ द्विघात समीकरण :

$$\therefore \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore \sqrt{2}x^2 + (5 + 2)x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore \sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\therefore (\sqrt{2}x^2 + 5x) + (2x + 5\sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0$$

$$\therefore (\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$$

[मध्य-पद के विखण्डन से]

[सरल करने पर]

[समूह बनाने पर]

[समूह बनाकर सार्व लेने पर]

[पुनः $(\sqrt{2}x + 5)$ सार्व लेने पर]

$$\therefore (\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}x + 5) = 0 \text{ या फिर } (x + \sqrt{2}) = 0$$

यदि $\sqrt{2}x + 5 = 0$ हो तो $\sqrt{2}x = 0 - 5 \Rightarrow x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$; और

यदि $x + \sqrt{2} = 0$ हो तो $x = -\sqrt{2}$
 अतः द्विघात समीकरण के मूल $= \frac{-5}{\sqrt{2}}$ या $-\sqrt{2}$

उत्तर

● (iv) दिया हुआ द्विघात समीकरण :

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$$

या $16x^2 - 8x + 1 = 0$ [दोनों पक्षों को 8 से गुणा करने पर]

$$\therefore (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + (1)^2 = 0$$

$$\therefore (4x - 1)^2 = 0$$

$$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$$

$$\therefore (4x - 1)(4x - 1) = 0$$

प्रत्येक स्थिति में $4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $= \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

● (v) दिया हुआ द्विघात समीकरण :

$$100x^2 - 20x + 1 = 0$$

$\Rightarrow 100x^2 - (10 + 10)x + 1 = 0$ [मध्य-पद के विखण्डन से]

$$\therefore 100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$$
 [सरल करने पर]

$$\therefore 100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$$
 [समूह बनाने पर]

$$\therefore 10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$$
 [समूहों में सार्व लेने पर]

$$\therefore (10x - 1)(10x - 1) = 0$$
 [पुनः $(10x - 1)$ सार्व लेने पर]

$(10x - 1)(10x - 1) = 0 \Rightarrow$ प्रत्येक स्थिति में $10x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10}$$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $= \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

उत्तर

प्रश्न 2. (i) जॉन और जीवन्ती के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं। अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। प्रारम्भ में उनके पास कितने कंचे थे?

(ii) एक कुटीर उद्योग एक दिन कुछ खिलौने निर्मित करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (₹ में) 55 में से उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। उस दिन कुल निर्माण लागत ₹ 750 थी। उस दिन निर्माण के लिए खिलौनों की संख्या ज्ञात करनी है।

हल : (i) माना प्रारम्भ में जॉन के पास x कंचे थे।

दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे थे।

\therefore जीवन्ती के पास प्रारम्भ में कंचों की संख्या $= (45 - x)$

जब जॉन 5 कंचे खो देता है तो उसके पास शेष बचे कंचों की संख्या $= (x - 5)$

इसी प्रकार,

जब जीवन्ती 5 कंचे खो देती है तो उसके पास शेष बचे कंचों की संख्या $= (45 - x - 5) = (40 - x)$

अब कंचों की संख्या का गुणनफल $= (x - 5)(40 - x)$
 $= 40x - x^2 - 200 + 5x$
 $= -x^2 + 45x - 200$

परन्तु प्रश्नानुसार कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है।

$$\therefore -x^2 + 45x - 200 = 124$$

$$\Rightarrow -x^2 + 45x - 200 - 124 = 0$$

[पक्षान्तरण से]

$$\Rightarrow -x^2 + 45x - 324 = 0$$

6 गणित ■ कक्षा 10

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -(x^2 - 45x + 324) = 0 && \text{[सरलीकरण]} \\ \Rightarrow & x^2 - 45x + 324 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - (36 + 9)x + 324 = 0 && \text{[मध्य-पद के विखण्डन से]} \\ \Rightarrow & x^2 - 36x - 9x + 324 = 0 && \text{[सरलीकरण से]} \\ \Rightarrow & x^2 - 36x - 9x + 324 = 0 && \text{[समूह बनाने पर]} \\ \Rightarrow & \frac{x(x-36) - 9(x-36)}{x(x-36) - 9(x-36)} = 0 && \text{[सार्व लेने पर]} \\ \Rightarrow & (x-36)(x-9) = 0 && \text{[पुनः (x-36) सार्व लेने पर]} \end{aligned}$$

अब $\therefore (x-36)(x-9) = 0 \Rightarrow x-36=0$ या $x-9=0$
यदि $x-36=0$ तो $x=36$ और यदि $x-9=0$ तो $x=9$

अतः जॉन के पास कंचों की संख्या = 36 अथवा 9

तब स्पष्ट है कि

यदि जॉन के पास 36 कंचे हैं तो जीवन्ती के पास 9 कंचे होंगे।

और यदि जॉन के पास 9 कंचे हैं तो जीवन्ती के पास 36 कंचे होंगे

अतः उनके पास कंचों की संख्या = (9, 36) अथवा (36, 9)

उत्तर

- (ii) माना उस विशेष दिन x खिलौने निर्मित किए गए।

\therefore प्रत्येक खिलौने का मूल्य = ₹ (55 - x)

\therefore उस दिन निर्मित सभी x खिलौनों की लागत = ₹ $x(55 - x)$
= ₹ $(55x - x^2)$

परन्तु प्रश्नानुसार उस दिन की निर्माण लागत ₹ 750 थी।

$$\begin{aligned} \therefore & 55x - x^2 = 750 \\ \Rightarrow & 55x - x^2 - 750 = 0 && \text{[पक्षान्तरण से]} \\ \Rightarrow & x^2 - 55x + 750 = 0 && \text{[सरल करने पर]} \\ \Rightarrow & x^2 - (25 + 30)x + 750 = 0 && \text{[मध्य-पद के विखण्डन से]} \\ \Rightarrow & x^2 - 25x - 30x + 750 = 0 && \text{[सरल करने पर]} \\ \Rightarrow & x^2 - 25x - 30x + 750 = 0 && \text{[समूह बनाने पर]} \\ \Rightarrow & \frac{x(x-25) - 30(x-25)}{x(x-25) - 30(x-25)} = 0 && \text{[सार्व लेने पर]} \\ \Rightarrow & (x-25)(x-30) = 0 && \text{[पुनः सार्व लेने पर]} \end{aligned}$$

अब $(x-25)(x-30) = 0 \Rightarrow (x-25) = 0$ या $(x-30) = 0$

यदि $x-25=0$ तो $x=25$

और यदि $x-30=0$ तो $x=30$

अतः निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या = 25 या 30

उत्तर

प्रश्न 3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल : माना एक संख्या x है।

दोनों संख्याओं का योग 27 है। \therefore दूसरी संख्या = $(27 - x)$ होगी।

तब संख्याओं का गुणनफल = $x(27 - x) = 27x - x^2$

परन्तु प्रश्नानुसार गुणनफल 182 है।

$$\begin{aligned} \therefore & 182 = 27x - x^2 \\ \therefore & x^2 - 27x + 182 = 0 && \text{[पक्षान्तरण से]} \\ \therefore & x^2 - (14 + 13)x + 182 = 0 && \text{[मध्य-पद के विखण्डन से]} \\ \therefore & \frac{x^2 - 14x - 13x + 182}{x(x-14) - 13(x-14)} = 0 && \text{[सरल करके समूह बनाने पर]} \\ \therefore & x(x-14) - 13(x-14) = 0 && \text{[सार्व लेने पर]} \\ \therefore & (x-14)(x-13) = 0 && \text{[पुनः (x-14) सार्व लेने पर]} \end{aligned}$$

अब $(x-14)(x-13) = 0 \Rightarrow x-14=0$ या $x-13=0$

यदि $x-14=0$ तो $x=14$ और यदि $x-13=0$ तो $x=13$

∴ पहली संख्या = 14 अथवा 13

∴ संख्याओं का योग 27 है तब

यदि पहली संख्या 14 तो दूसरी 13 होगी; और पहली संख्या 13 तो दूसरी 14 होगी।

अतः अभीष्ट संख्याएँ = (14, 13) अथवा (13, 14)

उत्तर

प्रश्न 4. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

हल : माना पहला धन पूर्णांक x है।

∴ अगला क्रमागत धन पूर्णांक $(x + 1)$ होगा।

∴ पूर्णाकों के वर्गों का योग 365 है।

प्रश्नानुसार

$$\begin{aligned} & x^2 + (x + 1)^2 = 365 \\ \Rightarrow & x^2 + x^2 + 2x + 1 = 365 & [\text{सूत्र } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ से}] \\ \Rightarrow & 2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0 & [\text{सरलीकरण एवं पक्षान्तरण से}] \\ \Rightarrow & 2x^2 + 2x - 364 = 0 \\ \Rightarrow & 2(x^2 + x - 182) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + x - 182 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + (14x - 13)x - 182 = 0 & [\text{मध्य-पद के विखण्डन से}] \\ \Rightarrow & \frac{x^2 + 14x - 13x - 182}{x(x + 14) - 13(x + 14)} = 0 & [\text{समूह बनाने पर}] \\ \Rightarrow & \frac{x(x + 14) - 13(x + 14)}{(x + 14)(x - 13)} = 0 & [\text{समूहों में सार्व लेने पर}] \\ \Rightarrow & (x + 14)(x - 13) = 0 & [\text{पुनः } (x + 14) \text{ सार्व लेने पर}] \end{aligned}$$

अब $(x + 14)(x - 13) = 0 \Rightarrow x + 14 = 0$ या $x - 13 = 0$

यदि $x + 14 = 0$, तो $x = -14$; और

यदि $x - 13 = 0$, तो $x = 13$

अतः पहला पूर्णांक = -14 अथवा 13

परन्तु x एक धन पूर्णांक है। इसलिए x का मान -14 स्वीकार्य नहीं है, तब $x = 13$

अतः पहला पूर्णांक = 13 और अगला धन पूर्णांक = 14

उत्तर

प्रश्न 5. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी कम है। यदि कर्ण 13 सेमी का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना समकोण त्रिभुज की आधार भुजा x सेमी है।

∴ समकोण त्रिभुज की ऊँचाई आधार से 7 सेमी कम है।

∴ समकोण त्रिभुज की ऊँचाई या लम्ब भुजा = $(x - 7)$ सेमी

तब, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned} & (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2 \\ \Rightarrow & (x - 7)^2 + x^2 = (13)^2 & [\because \text{दिया है, कर्ण} = 13 \text{ सेमी}] \\ \Rightarrow & x^2 - 14x + 49 + x^2 = 169 & [(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2] \\ \Rightarrow & 2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0 & [\text{पक्षान्तरण से}] \\ \Rightarrow & 2x^2 - 14x - 120 = 0 \\ \Rightarrow & 2(x^2 - 7x - 60) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 7x - 60 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - (12 - 5)x - 60 = 0 & [\text{मध्य-पद के विखण्डन से}] \\ \Rightarrow & x^2 - 12x + 5x - 60 = 0 & [\text{सरल करने पर}] \\ \Rightarrow & \frac{(x^2 - 12x) + (5x - 60)}{x(x - 12) + 5(x - 12)} = 0 & [\text{समूह बनाने पर}] \\ \Rightarrow & \frac{x(x - 12) + 5(x - 12)}{(x - 12)(x + 5)} = 0 & [\text{समूह बनाकर सार्व लेने पर}] \\ \Rightarrow & (x - 12)(x + 5) = 0 & [\text{पुनः } (x - 12) \text{ सार्व लेने पर}] \end{aligned}$$

अब $(x - 12)(x + 5) = 0 \Rightarrow (x - 12) = 0$ या $(x + 5) = 0$

यदि $x - 12 = 0$ तो $x = 12$ और

यदि $(x + 5) = 0$ तो $x = -5$

8 गणित ■ कक्षा 10

परन्तु भुजा x का ऋणात्मक मान स्वीकार्य नहीं हो सकता जिससे $x = 12$
तब ऊँचाई या लम्ब भुजा $= x - 7 = 12 - 7 = 5$ सेमी

अतः त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ = 5 सेमी व 12 सेमी।

उत्तर

प्रश्न 6. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (रूपयों में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : माना उस विशेष दिन में निर्मित बर्तनों की संख्या x थी।

∴ प्रत्येक नग की लागत निर्मित बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी।

∴ प्रत्येक नग की लागत = ₹ $(2x + 3)$

तब उस दिन निर्मित सभी बर्तनों की लागत = ₹ $x \times (2x + 3) = ₹ (2x^2 + 3x)$

परन्तु प्रश्नानुसार,

उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (15 - 12)x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow x(2x + 15) - 6(2x + 15) = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 15)(x - 6) = 0$$

$$\text{अब } \therefore (2x + 15)(x - 6) = 0 \Rightarrow (2x + 15) = 0 \text{ या } (x - 6) = 0$$

यदि $x - 6 = 0$ तो $x = 6$ और यदि $2x + 15 = 0$ हो तो $x = -\frac{15}{2}$

∴ बर्तनों की संख्या x ऋणात्मक नहीं हो सकती जिससे x का ऋणात्मक मान स्वीकार्य नहीं है।

अतः $x = 6$ अर्थात् निर्मित बर्तनों की संख्या = 6

तब प्रत्येक नग की लागत = ₹ $(2x + 3)$

$$= ₹ (2 \times 6 + 3) = ₹ (12 + 3) = ₹ 15$$

अतः निर्मित बर्तनों की संख्या 6 तथा प्रत्येक नग की लागत ₹ 15 है।

उत्तर

प्रश्नावली 4.3

प्रश्न 1. यदि निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

हल : (i) दिया गया द्विघात समीकरण :

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left[x^2 - \frac{7}{2}x \right] + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x)^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} \right] + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x)^2 - 2 \times x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4} \right)^2 - \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x)^2 - 2(x) \left(\frac{7}{4} \right) + \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] - \left(\frac{7}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} = 0$$

[प्रत्येक पद में x^2 के गुणांक से भाग देने पर]

[वह भाग जिसे पूर्ण वर्ग बनाना है, अलग करने पर]

$$\left[\frac{7}{2}x = 2 \times x \times \frac{7}{4} \right]$$

$$\left[\left(\frac{7}{4} \right)^2 \text{ जोड़ने व घटाने पर} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2} = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49}{16} - \frac{3}{2}\right) = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49 - 24}{16}\right) = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\
 \Rightarrow & \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\
 \Rightarrow & x - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4} \\
 \Rightarrow & x = \frac{7}{4} \pm \frac{5}{4} \\
 \Rightarrow & x = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow x = \frac{7+5}{4}, \frac{7-5}{4} \\
 \Rightarrow & x = \frac{12}{4}, \frac{2}{4} \Rightarrow x = 3, \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

अतः समीकरण के मूल = $3, \frac{1}{2}$

उत्तर

- (ii) दिया गया द्विघात समीकरण :

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 + x - 4 = 0 \\
 \Rightarrow & x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad [\text{प्रत्येक पद में } x^2 \text{ के गुणांक से भाग देने पर}] \\
 \Rightarrow & \left[x^2 + \frac{1}{2}x\right] - 2 = 0 \\
 \Rightarrow & \left[(x)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4}\right] - 2 = 0 \quad \left[\frac{1}{2}x = 2 \times x \times \frac{1}{4}\right] \\
 \Rightarrow & \left[(x)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - 2 = 0 \quad \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ जोड़ने व घटाने पर}\right] \\
 \Rightarrow & \left[(x)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - \frac{1}{16} - 2 = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{33}{16} = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2 = 0 \\
 \Rightarrow & \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

10 गणित ■ कक्षा 10

$$\Rightarrow x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow x = \frac{-1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4} \quad \text{या} \quad x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$$

अतः समीकरण के मूल = $-\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right), \frac{\sqrt{33} - 1}{4}$

उत्तर

- (iii) दिया गया द्विघात समीकरण :

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow [4x^2 + 4\sqrt{3}x] + 3 = 0 \quad \text{[वह भाग जिसे पूर्ण वर्ग बनाना है, पृथक् करने पर]}$$

$$\Rightarrow [(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \sqrt{3}] + 3 = 0$$

$$\Rightarrow [(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2] + 3 = 0 \quad \text{[} \sqrt{3} \text{ का वर्ग क्रमशः जोड़ने व घटाने पर]}$$

$$\Rightarrow [(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2] - (\sqrt{3})^2 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow [2x + \sqrt{3}]^2 - 3 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + \sqrt{3})(2x + \sqrt{3}) = 0$$

यदि $(2x + \sqrt{3}) = 0$, तो $2x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ दोनों खण्ड एक ही हैं। ∴ x का दूसरा मान भी $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ही होगा।

तब समीकरण के मूल = $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

उत्तर

- (iv) दिया गया द्विघात समीकरण :

$$2x^2 + x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad \text{[प्रत्येक पद को 2 से भाग देने पर]}$$

$$\Rightarrow \left[x^2 + \frac{1}{2}x\right] + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x)^2 + 2 \times (x) \times \frac{1}{4}\right] + 2 = 0 \quad \left[\frac{1}{2}x = 2 \times x \times \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore \left[(x)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] + 2 = 0 \quad \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{ जोड़ने व घटाने पर}\right]$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 2 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16} = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{31}{16} = \left(x + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{-\frac{31}{16}} \quad \text{जो कि काल्पनिक संख्या है।}$$

अतः दिए गए समीकरण के मूलों का अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 2. उपर्युक्त प्रश्न (1) में दिए गए द्विघात समीकरणों के मूल, द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल : (i) दिया गया द्विघात समीकरण : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

उपर्युक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, \quad b = -7 \quad \text{तथा} \quad c = 3$$

$$\begin{aligned}
 \text{तब सूत्र से, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} \\
 &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \\
 &= \frac{7+5}{4} \Rightarrow \frac{7-5}{4} = \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} \\
 \therefore x &= 3, \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

अतः समीकरण के मूल = $3, \frac{1}{2}$

उत्तर

- (ii) दिया गया द्विघात समीकरण : $2x^2 + x - 4 = 0$
 उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 2, b = 1$ तथा $c = -4$

$$\begin{aligned}
 \text{तब सूत्र से, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times -4}}{2 \times 2} \\
 &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4} \\
 x &= \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}
 \end{aligned}$$

अतः समीकरण के मूल = $\frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$

उत्तर

- (iii) दिया गया द्विघात समीकरण :

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 4, b = 4\sqrt{3}$ तथा $c = 3$

$$\begin{aligned}
 \text{तब सूत्र से, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4} \\
 &= \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 48}}{8} = \frac{-4\sqrt{3} \pm 0}{8} = -\frac{4\sqrt{3}}{8} \\
 x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

∴ द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं और यहाँ $b^2 - 4ac = 0$ है।

अतः दोनों मूल समान होंगे। तब समीकरण के मूल = $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

उत्तर

- (iv) दिया गया समीकरण : $2x^2 + x + 4 = 0$
 उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 2, b = 1$ तथा $c = 4$

12 गणित ■ कक्षा 10

$$\begin{aligned} \text{तब सूत्र से, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{4} \end{aligned}$$

∴ $\sqrt{-31}$ एक कल्पित संख्या है।

∴ x के मान कल्पित होंगे।

अतः दिए गए समीकरण के मूलों का अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 3. निम्न समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

हल : (i) दिया गया समीकरण : $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} &= 3 \\ \Rightarrow x^2 - 1 &= 3x \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

[वज्रगुणन से]

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, \quad b = -3 \quad \text{तथा} \quad c = -1$$

$$\begin{aligned} \text{तब सूत्र से, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times -1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{या} \quad \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

अतः समीकरण के मूल = $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

उत्तर

● (ii) दिया गया समीकरण : $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

$$\Rightarrow \frac{1(x-7) - 1(x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

[सरल करने पर]

$$\Rightarrow \frac{x-7-x-4}{x^2-3x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{x^2-3x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

[दोनों पक्षों को 11 से भाग देने पर]

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 = -30$$

[वज्रगुणन से]

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$$

[पक्षान्तरण से]

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

[मध्य-पद के गुणनखण्ड से]

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x^2 - (2+1)x + 2 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 2x - 1x + 2 = 0 \\ \Rightarrow & x(x-2) - 1(x-2) = 0 \\ \Rightarrow & (x-2)(x-1) = 0 \\ \therefore & (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x-1=0 \text{ या } x-2=0 \end{aligned}$$

यदि $x-1=0$ हो तो $x=1$ और यदि $x-2=0$ हो तो $x=2$

अतः समीकरण के मूल = 1, 2

उत्तर

प्रश्न 4. 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है।

उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना रहमान की वर्तमान आयु x वर्ष है।

3 वर्ष पूर्व उसकी आयु = $(x-3)$ वर्ष

$$3 \text{ वर्ष पूर्व उसकी आयु का व्युत्क्रम} = \frac{1}{x-3}$$

5 वर्ष पश्चात् उसकी आयु = $(x+5)$ वर्ष

$$5 \text{ वर्ष पश्चात् उसकी आयु का व्युत्क्रम} = \frac{1}{x+5}$$

\therefore प्रश्नानुसार, दोनों व्युत्क्रमों का योग $\frac{1}{3}$ है

$$\therefore \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

हरों का L.C.M. लेकर सरल करने पर,

$$\frac{x+5+x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-15 = 6x+6$$

$$\Rightarrow x^2+2x-15-6x-6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2-4x-21 = 0$$

उपर्युक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=1, \quad b=-4 \quad \text{तथा} \quad c=-21$$

$$\text{तब सूत्र से, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times -21}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2}$$

$$= \frac{2(2 \pm 5)}{2} = 2 \pm 5$$

$$\therefore x = 2+5 \quad \text{या} \quad 2-5$$

$$\therefore x = 7 \quad \text{या} \quad -3$$

परन्तु आयु ऋणात्मक नहीं होती; अतः x का मान -3 अस्वीकार्य है।

$$\therefore x = 7$$

अतः रहमान की वर्तमान आयु 7 वर्ष है।

उत्तर

[संक्षेपीकरण से]

[वज्रगुणन से]

14 गणित ■ कक्षा 10

प्रश्न 5. एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंकों का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए।

हल : माना शेफाली ने गणित में x अंक प्राप्त किए।

∴ अंग्रेजी और गणित दोनों के प्राप्तांकों का योग 30 है।

∴ अंग्रेजी में प्राप्तांक = $(30 - x)$ अंक

यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक मिलते अर्थात् गणित में $(x + 2)$ अंक मिलते; और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिलते अर्थात् अंग्रेजी में $(30 - x - 3)$ या $(27 - x)$ अंक मिलते तो अंकों का गुणनफल $(x + 2)(27 - x)$ होता अर्थात्

$$\begin{aligned} \text{गुणन} &= (x + 2)(27 - x) \\ &= 27x - x^2 + 54 - 2x \\ &= 25x - x^2 + 54 \end{aligned}$$

परन्तु प्रश्नानुसार गुणनफल 210 होता।

तब

$$210 = 25x - x^2 + 54$$

$$\Rightarrow x^2 - 25x - 54 + 210 = 0$$

[पक्षान्तरण द्वारा]

$$\Rightarrow x^2 - 25x + 156 = 0$$

[सरल करने पर]

उक्त समीकरण की तुलना मानक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, \quad b = -25 \quad \text{तथा} \quad c = 156$$

तब सूत्र से,
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \times 1 \times 156}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{25 \pm \sqrt{625 - 624}}{2} = \frac{25 \pm 1}{2}$$

$$= \frac{25 + 1}{2} \quad \text{या} \quad \frac{25 - 1}{2}$$

$$= \frac{26}{2} \quad \text{या} \quad \frac{24}{2}$$

$$= 13 \quad \text{या} \quad 12$$

तब, शेफाली ने गणित में या तो 12 अंक प्राप्त किए या फिर 13 अंक प्राप्त किए।

यदि उसने गणित में 12 अंक प्राप्त किए तो अंग्रेजी में $(30 - 12) = 18$ अंक प्राप्त किए और यदि उसने गणित में 13 अंक प्राप्त किए तो अंग्रेजी में $(30 - 13) = 17$ अंक प्राप्त किए।

अतः शेफाली ने गणित व अंग्रेजी में क्रमशः 12 व 18 अंक अथवा 13 व 17 अंक प्राप्त किए।

उत्तर

प्रश्न 6. एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक लम्बा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मीटर अधिक हो तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना आयताकार खेत की छोटी भुजा x मीटर है।

∴ बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मीटर अधिक है।

∴ बड़ी भुजा = $(x + 30)$ मीटर तब खेत की लम्बाई = $(x + 30)$ मीटर तथा चौड़ाई = x मीटर

∴ प्रश्नानुसार आयताकार खेत का विकर्ण, छोटी भुजा (चौड़ाई) से 60 मीटर अधिक है।

∴ आयताकार खेत का विकर्ण = $(x + 60)$

परन्तु आयत के लिए, लम्बाई² + चौड़ाई² = विकर्ण²

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\Rightarrow (x + 30)^2 + x^2 = (x + 60)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (x + 60)^2 - (x + 30)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (x + 60 + x + 30)(x + 60 - x - 30)$$

$$\Rightarrow x^2 = (2x + 90)30$$

$$\Rightarrow x^2 = 60x + 2700$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x^2 - 60x - 2700 = 0 && [\text{पक्षान्तरण द्वारा}] \\ \Rightarrow & x^2 - (90 - 30)x - 2700 = 0 && [\text{मध्यपद का विखण्डन}] \\ \Rightarrow & x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0 \\ \Rightarrow & x(x - 90) + 30(x - 90) = 0 \\ \Rightarrow & (x - 90)(x + 30) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x - 90)(x + 30) = 0 \Rightarrow x - 90 = 0 \quad \text{या} \quad x + 30 = 0$$

यदि $x - 90 = 0$ हो तो $x = 90$ और यदि $x + 30 = 0$ हो तो $x = -30$

परन्तु भुजा की लम्बाई ऋणात्मक नहीं हो सकती; अतः x का मान -30 स्वीकार्य नहीं है।

तब, $x = 90$

दूसरी भुजा = $(x + 30)$ मीटर = $(90 + 30) = 120$ मीटर

अतः आयताकार खेत की भुजाएँ 90 मीटर व 120 मीटर हैं।

उत्तर

प्रश्न 7. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना छोटी संख्या x है

∴ छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का 8 गुना है।

∴ बड़ी संख्या $\times 8 =$ छोटी संख्या का वर्ग

∴ बड़ी संख्या $\times 8 = x^2$

∴ बड़ी संख्या = $\frac{x^2}{8}$

∴ प्रश्नानुसार, वर्गों का अन्तर = 180

∴ $(\text{बड़ी संख्या})^2 - (\text{छोटी संख्या})^2 = 180$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{8}\right)^2 - (x)^2 = 180$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{64} - x^2 = 180$$

$$\Rightarrow x^4 - 64x^2 = 11520$$

$$\Rightarrow x^4 - 64x^2 - 11520 = 0$$

माना $x^2 = X$ तब उक्त समीकरण :

$$X^2 - 64X - 11520 = 0$$

उक्त समीकरण की तुलना $AX^2 + BX + C = 0$ से करने पर,

$$A = 1, \quad B = -64 \quad \text{तथा} \quad C = -11520$$

तब द्विघात सूत्र से,

$$\begin{aligned} X &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{-(-64) \pm \sqrt{(-64)^2 - 4 \times 1 \times -11520}}{2 \times 1} \\ &= \frac{64 \pm \sqrt{4096 + 46080}}{2} \\ &= \frac{64 \pm \sqrt{50176}}{2} = \frac{64 \pm 224}{2} = \frac{2(32 \pm 112)}{2} \end{aligned}$$

$$X = 32 \pm 112$$

$$X = 32 + 112 \quad \text{या} \quad 32 - 112$$

$$X = 144 \quad \text{या} \quad -80$$

16 गणित ■ कक्षा 10

$$\begin{aligned} \because X = x^2 &\Rightarrow x^2 = 144 \quad \text{या} \quad -80 \\ &\Rightarrow x = \pm 12 \quad \text{या} \quad \sqrt{-80} \quad \text{जो कि कल्पित संख्या है।} \end{aligned}$$

तब, छोटी संख्या = 12 या -12

$$\text{तब, बड़ी संख्या} = \frac{x^2}{8} = \frac{144}{8} = 18$$

अतः संख्याएँ = 12, 18 अथवा -12, 18

उत्तर

प्रश्न 8. एक रेलगाड़ी एकसमान चाल से 360 किमी की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी/घण्टा अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घण्टा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेलगाड़ी की चाल x किमी प्रति घण्टा है।

$$\text{सूत्र; समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} \text{ से, } 360 \text{ किमी दूरी तय करने का समय} = \frac{360}{x} \text{ घण्टा}$$

यदि रेलगाड़ी की चाल 5 किमी प्रति घण्टा अधिक होती अर्थात् चाल $(x + 5)$ किमी प्रति घण्टा होती तो 360 किमी दूरी तय करने का समय = $\frac{360}{x+5}$ घण्टा होता।

\therefore यह समय पहले समय से 1 घण्टा कम है।

$$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{360x + 1800 - 360x}{x(x+5)} = 1$$

[सरल करने पर]

$$\Rightarrow \frac{1800}{x^2 + 5x} = 1$$

[संक्षेपीकरण से]

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 1800$$

[वज्रगुणन से]

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, \quad b = 5 \quad \text{तथा} \quad c = -1800$$

$$\text{तब द्विघात सूत्र से, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \times 1 \times -1800}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 7200}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7225}}{2} = \frac{-5 \pm 85}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-5 + 85}{2} \quad \text{या} \quad \frac{-5 - 85}{2} \\ &= \frac{80}{2} \quad \text{या} \quad -\frac{90}{2} \\ &= 40 \quad \text{या} \quad -45 \end{aligned}$$

\therefore रेलगाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती जिससे x का मान -45 स्वीकार्य नहीं है, तब $x = 40$

अतः रेलगाड़ी की चाल = 40 किमी प्रति घण्टा।

उत्तर

प्रश्न 9. दो पानी के नल एक-साथ एक हौज को $9\frac{3}{8}$ घण्टों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम

व्यास वाले नल से 10 घण्टे कम समय लेता है। प्रत्येक द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए।

हल : माना कम व्यास वाला नल पानी के हौज को x घण्टे में भरता है।

\therefore बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में 10 घण्टे कम समय लेता है।

\therefore बड़े व्यास वाला नल हौज को $(x - 10)$ घण्टे में भरेगा।

∴ पहले नल द्वारा हौज को भरने की प्रति घण्टा दर = $\frac{1}{x}$ भाग

इसी प्रकार, दूसरे नल द्वारा हौज को भरने की प्रति घण्टा दर = $\frac{1}{x-10}$ भाग

यदि दोनों नल एक-साथ खुले हों तो 1 घण्टे में हौज का $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10}\right)$ भाग भर जाएगा।

परन्तु दिया है कि $9\frac{3}{8}$ घण्टे या $\frac{75}{8}$ घण्टे में पूरा हौज भर जाएगा

$$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10}\right) \times \frac{75}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{x-10+x}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-10}{x^2-10x} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 80x = 150x - 750$$

(वज्रगुणन से)

$$\Rightarrow 8x^2 - 80x - 150x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 230x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 115x + 375 = 0$$

उपर्युक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 4, \quad b = -115 \quad \text{तथा} \quad c = 375$$

तब द्विघात सूत्र से, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\therefore x = \frac{-(-115) \pm \sqrt{(-115)^2 - 4 \times 4 \times 375}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{115 \pm \sqrt{13225 - 6000}}{8}$$

$$= \frac{115 \pm \sqrt{7225}}{8} = \frac{115 \pm 85}{8}$$

$$= \frac{115 + 85}{8} \quad \text{या} \quad \frac{115 - 85}{8}$$

$$= \frac{200}{8} \quad \text{या} \quad \frac{30}{8}$$

$$= 25 \quad \text{या} \quad 3\frac{3}{4}$$

अतः छोटा नल हौज को 25 घण्टे या $3\frac{3}{4}$ घण्टे में भर सकता है।

जब दोनों नल हौज को भरते हैं तब 9 घण्टे से अधिक समय लगता है तब केवल एक नल उसे $3\frac{3}{4}$ घण्टे में भर दे यह

असम्भव एवं असंगत है।

अतः छोटा नल उसे 25 घण्टे में भरता है, तब बड़ा नल उसे $25 - 10 = 15$ घण्टे में भर सकता है।

अतः कम व्यास वाला नल हौज को 25 घण्टे में और अधिक व्यास वाला नल उसे 15 घण्टे में भर सकता है। उत्तर

18 गणित ■ कक्षा 10

प्रश्न 10. मैसूर और बेंगलूर के बीच के 132 किमी यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारीगाड़ी से 1 घण्टा समय कम लेती है (मध्य के स्टेशनों पर ठहरने का समय ध्यान में न लिया जाए)। यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल, सवारीगाड़ी की औसत चाल से 11 किमी/घण्टा अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना सवारीगाड़ी की औसत चाल x किमी प्रति घण्टा है।

∴ एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल सवारीगाड़ी की अपेक्षा 11 किमी प्रति घण्टा अधिक है।

∴ एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल = $(x + 11)$ किमी प्रति घण्टा

तब 132 किमी यात्रा में सवारीगाड़ी द्वारा लिया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{132}{x}$ घण्टा

और उसी यात्रा में एक्सप्रेस रेलगाड़ी द्वारा लिया समय = $\frac{132}{x + 11}$ घण्टा

∴ प्रश्नानुसार, एक्सप्रेस रेलगाड़ी 1 घण्टा कम समय लेती है।

$$\therefore \frac{132}{x} - \frac{132}{x + 11} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{132x + 1452 - 132x}{x(x + 11)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1452}{x^2 + 11x} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x = 1452 \quad \text{[वजगुणन से]}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{11}{2} = 1452$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{11}{2} + \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 1452 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$\left[\text{दोनों पक्षों में } \left(\frac{11}{2}\right)^2 \text{ जोड़ने पर} \right]$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 1452 + \frac{121}{4} \quad \text{[बायाँ पक्ष पूर्ण वर्ग बनाने पर]}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{5929}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = \left(\frac{77}{2}\right)^2 \quad \text{[दोनों पक्ष पूर्ण वर्ग बनाने पर]}$$

$$\Rightarrow x + \frac{11}{2} = \pm \frac{77}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{11}{2} \pm \frac{77}{2}$$

$$\Rightarrow x = \left(-\frac{11}{2} + \frac{77}{2}\right) \quad \text{या} \quad \left(-\frac{11}{2} - \frac{77}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = \frac{-11 + 77}{2} \quad \text{या} \quad \frac{-11 - 77}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{66}{2} \quad \text{या} \quad -\frac{88}{2}$$

$$\Rightarrow = 33 \quad \text{या} \quad -44$$

∴ रेलगाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती जिससे x का मान -44 अस्वीकार्य है।

$$\therefore x = 33$$

अतः सवारीगाड़ी की चाल 33 किमी प्रति घण्टा तथा एक्सप्रेस गाड़ी की चाल $(33 + 11) = 44$ किमी प्रति घण्टा है।

उत्तर

प्रश्न 11. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 वर्ग मीटर है। यदि उनके परिमाणों का अन्तर 24 मीटर हो तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना एक वर्ग की भुजा x मीटर है।

तब, उस वर्ग की परिमाण = $4x$ मीटर

\therefore दूसरे वर्ग की परिमाण में 24 मीटर का अन्तर है।

\therefore दूसरे वर्ग की परिमाण = $4x + 24$ मीटर

तब, दूसरे वर्ग की भुजा = $\frac{4x + 24}{4}$ मीटर = $\frac{4(x + 6)}{4}$ मीटर = $x + 6$ मीटर

पहले वर्ग का क्षेत्रफल = x^2 वर्ग मीटर

तथा दूसरे वर्ग का क्षेत्रफल = $(x + 6)^2$ वर्ग मीटर

$$= x^2 + 12x + 36 \text{ वर्ग मीटर}$$

प्रश्नानुसार, दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग = 468 वर्ग मीटर

$$\Rightarrow x^2 + (x^2 + 12x + 36) = 468$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 36 - 468 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 12x - 432 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 6x - 216) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + (3)^2 - 216 - (3)^2 = 0 \quad [3^2 \text{ जोड़ने व घटाने पर}]$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 - 225 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 - (15)^2 = 0 \quad [\text{पूर्ण वर्ग बनाने पर}]$$

$$\Rightarrow (x + 3 + 15)(x + 3 - 15) = 0 \quad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$\Rightarrow (x + 18)(x - 12) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 18)(x - 12) = 0 \Rightarrow x + 18 = 0 \text{ या } x - 12 = 0$$

यदि $x + 18 = 0$ हो तो $x = -18$ या $x - 12 = 0$ हो तो $x = 12$

\therefore वर्ग की भुजा x ऋणात्मक नहीं हो सकती; अतः x का मान -18 स्वीकार्य नहीं है।

तब, यदि $x - 12 = 0$ हो तो $x = 12$

छोटे वर्ग की भुजा = 12 मीटर

तब बड़े वर्ग की भुजा = $x + 6 = 12 + 6 = 18$ मीटर

अतः वर्गों की भुजाएँ क्रमशः 12 मीटर व 18 मीटर हैं।

उत्तर

प्रश्नावली 4.4

प्रश्न 1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए :

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

हल : (i) दिया गया समीकरण : $2x^2 - 3x + 5 = 0$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, \quad b = -3 \quad \text{तथा} \quad c = 5$$

विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 \text{ (ऋणात्मक)}$$

\therefore विविक्तकर D ऋणात्मक है।

\therefore समीकरण के मूल काल्पनिक हैं।

अतः समीकरण के मूल अधिकल्पित हैं या मूलों का अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

20 गणित ■ कक्षा 10

- (ii) दिया गया समीकरण : $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$
उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 3, \quad b = -4\sqrt{3} \quad \text{तथा} \quad c = 4$

$$\begin{aligned} \text{विविक्तकर } D &= b^2 - 4ac \\ &= (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4 \\ &= 48 - 48 = \text{शून्य} \end{aligned}$$

∴ विविक्तकर $D = 0$; अतः समीकरण के मूल वास्तविक और समान हैं।

$$\begin{aligned} \text{तब, मूल} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm 0}{2 \times 3} = \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

∴ मूल दो हैं जो परस्पर समान हैं;

$$\text{अतः समीकरण के मूल} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

उत्तर

- (iii) दिया गया समीकरण : $2x^2 - 6x + 3 = 0$
उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 2, \quad b = -6 \quad \text{तथा} \quad c = 3$

$$\begin{aligned} \text{विविक्तकर } (D) &= b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 \\ &= 36 - 24 = 12 \end{aligned}$$

∴ विविक्तकर $D > 0$; अतः समीकरण के मूल वास्तविक और असमान हैं।

$$\text{तब, समीकरण के मूल} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{अतः समीकरण के मूल} \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ व } \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \text{ हैं।}$$

उत्तर

प्रश्न 2. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

हल : (i) दिया गया समीकरण : $2x^2 + kx + 3 = 0$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 2, \quad b = k \quad \text{तथा} \quad c = 3$

$$\begin{aligned} \text{विविक्तकर } D &= b^2 - 4ac \\ &= k^2 - 4 \times 2 \times 3 = k^2 - 24 \end{aligned}$$

समीकरण के मूल बराबर तब होंगे, जब विविक्तकर $D = 0$ हो

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } k^2 - 24 = 0 &\Rightarrow k^2 = 24 \\ &\Rightarrow k = \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

अतः मूल बराबर होने के लिए $k = \pm 2\sqrt{6}$ होना चाहिए।

उत्तर

- (ii) दिया गया समीकरण : $kx(x - 2) + 6 = 0$

या $kx^2 - 2kx + 6 = 0$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = k, \quad b = -2k \quad \text{तथा} \quad c = 6$

$$\begin{aligned} \text{विविक्तकर } D &= b^2 - 4ac \\ &= (-2k)^2 - 4 \times k \times 6 \\ &= 4k^2 - 24k = 4k(k - 6) \end{aligned}$$

समीकरण के मूल बराबर तब होंगे, जब विविक्तकर $D = 0$ हो

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } 4k(k - 6) = 0 &\Rightarrow k = 0 \quad \text{या} \quad k - 6 = 0 \\ &\Rightarrow k = 0 \quad \text{या} \quad k = 6 \end{aligned}$$

अतः समीकरण के बराबर होने के लिए $k = 6$ होना चाहिए क्योंकि $k = 0$ प्रतिबन्धित होता है।

उत्तर

प्रश्न 3. क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना सम्भव है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 मीटर² हो? यदि है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना आम की बगिया की चौड़ाई x मीटर है
 \therefore लम्बाई, चौड़ाई की दुगुनी है \therefore लम्बाई = $2x$ मीटर
 तब, बगिया का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई
 $= 2x \times x = 2x^2$ वर्ग मीटर
 परन्तु दिया है कि बगिया का क्षेत्रफल = 800 वर्ग मीटर
 $\therefore 2x^2 = 800 \Rightarrow x^2 = 400$
 $\Rightarrow x = \pm \sqrt{400} = \pm 20$ मीटर

तब, बगिया की चौड़ाई = 20 मीटर। (\therefore चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती)

\therefore बगिया की लम्बाई = $2x = 2 \times 20 = 40$ मीटर

अतः दी हुई बगिया सम्भव है और उसकी लम्बाई 40 मीटर व चौड़ाई 20 मीटर होगी।

उत्तर

प्रश्न 4. क्या निम्न स्थिति सम्भव है? यदि है, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए :

दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

हल : माना एक मित्र की आयु x वर्ष है।
 \therefore दोनों की आयु का योग 20 वर्ष है।
 \therefore दूसरे मित्र की आयु = $(20 - x)$ वर्ष
 4 वर्ष पूर्व पहले मित्र की आयु = $(x - 4)$ वर्ष
 तथा 4 वर्ष पूर्व दूसरे मित्र की आयु = $(20 - x - 4) = (16 - x)$ वर्ष
 तब, 4 वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल = $(x - 4)(16 - x)$
 $= 16x - x^2 - 64 + 4x$
 $= -x^2 + 20x - 64$

परन्तु प्रश्नानुसार गुणनफल 48 होना चाहिए

$\therefore 48 = -x^2 + 20x - 64$
 $\therefore x^2 - 20x + 64 + 48 = 0$
 $\therefore x^2 - 20x + 112 = 0$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 1, b = -20$ तथा $c = 112$

तब विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$
 $= (-20)^2 - 4 \times 1 \times 112 = 400 - 448 = -48$

\therefore विविक्तकर D ऋणात्मक है।
 \therefore समीकरण के मूल अधिकल्पित हैं।
 अतः ऐसी स्थिति सम्भव नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 5. क्या परिमाण 80 मीटर तथा क्षेत्रफल 400 मीटर² के एक पार्क को बनाना सम्भव है? यदि है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना पार्क की लम्बाई x मीटर है
 \therefore पार्क की परिमाण = 80 मीटर
 $\Rightarrow 2$ (लम्बाई + चौड़ाई) = 80 मीटर
 $\Rightarrow 2(x + \text{चौड़ाई}) = 80 \Rightarrow x + \text{चौड़ाई} = 40$
 \Rightarrow चौड़ाई = $(40 - x)$ मीटर
 तब, पार्क का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई
 $= x(40 - x) = (40x - x^2)$ वर्ग मीटर

परन्तु प्रश्नानुसार क्षेत्रफल 400 मीटर² है।

$\therefore 400 = 40x - x^2 \Rightarrow x^2 - 40x + 400 = 0$
 उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,
 $a = 1, b = -40$ तथा $c = 400$

22 गणित ■ कक्षा 10

$$\begin{aligned}\text{विविक्तकर } D &= b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \times 1 \times 400 \\ &= 1600 - 1600 = \text{शून्य}\end{aligned}$$

∴ विविक्तकर $D = 0$; अतः समीकरण के मूल समान हैं।

$$\text{मूल} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-40) \pm 0}{2 \times 1} = 20$$

∴ प्रत्येक मूल 20 है।

अतः ऐसा पार्क सम्भव है और उसकी लम्बाई व चौड़ाई में से प्रत्येक 20 मीटर होगी।

उत्तर

