माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An Easy Textbook

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

NCERT ZONE

अध्याय 6

त्रिभुज

(Triangles)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत

दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली 6.1

प्रश्न 1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सभी वृत्त ············ होते हैं। **(सर्वांगसम, समरूप)**

(ii) सभी वर्ग ············ होते हैं। **(समरूप, सर्वांगसम)**

(iii) सभी ············ त्रिभुज समरूप होते हैं। **(समद्विबाहु, समबाहु)**

(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (a) उनके संगत कोण ········ हों तथा (b) उनकी संगत भुजाएँ ················ हों। **(बराबर, समानुपाती)**

हल : (i) सभी वृत्त **समरूप** होते हैं।

- **(ii)** सभी वर्ग **समरूप** होते हैं।
- **(iii)** सभी **समबाहु** त्रिभुज समरूप होते हैं।
- **(iv)** भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते है, यदि

(a) उनके संगत कोण **बराबर** हों तथा

(b) उनकी संगत भुजाएँ **समानुपाती** हों।

प्रश्न 2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए :

(i) समरूप आकृतियाँ **(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।**

हल : (i) समरूप आकृतियों के दो उदाहरण :

(1) संकेन्द्रीय वृत्त

(2) विभिन्न भुजाओं वाले सभी वर्ग अथवा समबाहु त्रिभुज अथवा समबहुभुज

- **(ii) ऐसी आकृतियों के उदाहरण जो समरूप नहीं हैं :**

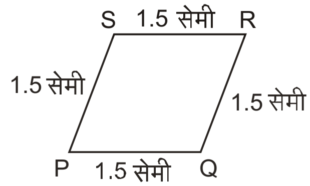
(1) एक वर्ग तथा एक आयत (2) एक वर्ग तथा एक समचतुर्भुज

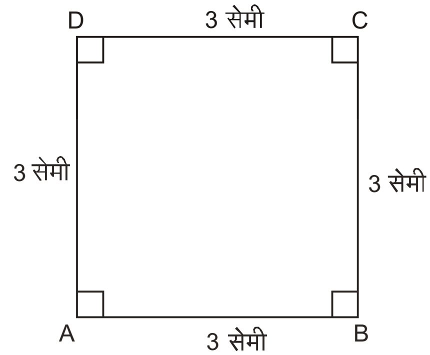
प्रश्न 3. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं :

हल : चतुर्भुज $PQRS$ तथा $ABCD$ में,

$$PQ = QR = RS = SP = 1.5 \text{ सेमी}$$

तथा $$AB = BC = CD = DA = 3.0 \text{ सेमी}$$





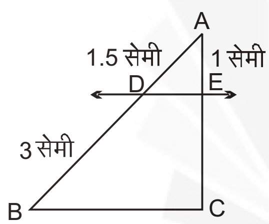
$$\therefore \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD} = \frac{SP}{DA} = \frac{1.5 \text{ सेमी}}{3.0 \text{ सेमी}} = \frac{1}{2}$$

अत: दो चतुर्भुजों की भुजाएँ समानुपात में हैं।

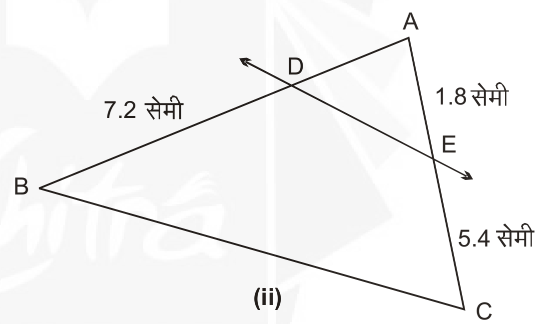
परन्तु देखने से ही प्रतीत होता है कि संगत कोण बराबर नहीं हैं। अत: **चतुर्भुज *PQRS* तथा चतुर्भुज *ABCD* समरूप नहीं हैं।** **उत्तर**

प्रश्नावली 6.2

प्रश्न 1. चित्र में, $DE \parallel BC$ है। चित्र (i) में EC और चित्र (ii) में AD ज्ञात कीजिए :



(i)



(ii)

हल : $\because \Delta ABC$ में रेखा $DE \parallel BC$

$$\therefore \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

चित्र (i) में, $AD = 1.5$ सेमी, $BD = 3$ सेमी, $AE = 1$ सेमी और $EC = ?$

$$\because \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad 1.5\, EC = 3$$

$$\Rightarrow \quad EC = \frac{3.0}{1.5} = 2$$

अत: $\boldsymbol{EC = 2}$ **सेमी** **उत्तर**

चित्र (ii) में, $AD = ?$, $BD = 7.2$ सेमी, $AE = 1.8$ सेमी तथा $EC = 5.4$ सेमी

$$\because \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{7.2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3\,AD = 7.2$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{7.2}{3} = 2.4 \text{ सेमी}$$

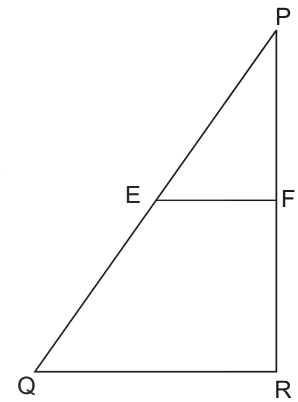
अत: $\boldsymbol{AD = 2.4}$ **सेमी** **उत्तर**

प्रश्न 2. किसी $\Delta\, PQR$ की भुजाओं PQ और PR पर क्रमश: बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है :

(i) $PE = 3.9$ सेमी, $EQ = 3$ सेमी, $PF = 3.6$ सेमी और $FR = 2.4$ सेमी

(ii) $PE = 4$ सेमी, $QE = 4.5$ सेमी, $PF = 8$ सेमी और $RF = 9$ सेमी

(iii) $PQ = 1.28$ सेमी, $PR = 2.56$ सेमी, $PE = 0.18$ सेमी और $PF = 0.36$ सेमी



हल : $\Delta\, PQR$ में भुजा PQ पर एक बिन्दु E तथा भुजा PR पर एक बिन्दु F स्थित है। बिन्दुओं E व F को मिलाकर रेखाखण्ड EF खींचा गया है।

- **(i)** दिया है, $PE = 3.9$ सेमी, $EQ = 3$ सेमी, $PF = 3.6$ सेमी

और $FR = 2.4$ सेमी

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3} = 1.3 \quad \text{तथा} \quad \frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = 1.5$$

$\because \quad \frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$; यहाँ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का विलोम संतुष्ट नहीं होता है। अत: **EF, QR के समान्तर नहीं है।** **उत्तर**

- **(ii)** दिया है, $PE = 4$ सेमी, $QE = 4.5$ सेमी, $PF = 8$ सेमी और $RF = 9$ सेमी

$$\frac{PE}{QE} = \frac{4.0}{4.5} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9} \quad \text{तथा} \quad \frac{PF}{RF} = \frac{8}{9}$$

$\because \quad \frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$; अत: आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से $\boldsymbol{EF \parallel QR}$ **उत्तर**

- **(iii)** दिया है, $PQ = 1.28$ सेमी, $PR = 2.56$ सेमी, $PE = 0.18$ सेमी और $PF = 0.36$ सेमी

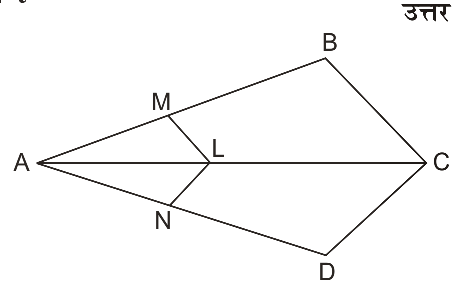
$$\because \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PE}{PQ - PE} = \frac{0.18}{1.28 - 0.18} = \frac{0.18}{1.10} = \frac{9}{55}$$

और

$$\frac{PF}{RF} = \frac{PF}{PR - PF} = \frac{0.36}{2.56 - 0.36} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$$

$\because \quad \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{RF}$; अत: आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से $\boldsymbol{EF \parallel QR}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. चित्र में, यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}$ है।



हल : दिया है: रेखाखण्ड $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ है।

सिद्ध करना है : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}$

उपपत्ति : $\Delta\, ABC$ में भुजा AB पर एक बिन्दु M तथा भुजा AC पर एक बिन्दु L है जिससे रेखाखण्ड $LM \parallel CB$

$$\therefore \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC} \quad \text{(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)}$$

$$\therefore \quad \frac{MB}{AM} = \frac{LC}{AL} \quad \text{(व्युत्क्रम करने पर)}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{MB}{AM} = 1 + \frac{LC}{AL} \quad \text{(दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)}$$

$\therefore \quad \dfrac{AM+MB}{AM} = \dfrac{AL+LC}{AL}$

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AL} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AL}{AC}$ ...(1)

$[\because \; AB = AM + MB, AC = AL + LC]$

इसी प्रकार, $\Delta\, ACD$ में $LN \parallel CD$

$\therefore \quad \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AL}{LC}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से) $\Rightarrow \quad \dfrac{ND}{AN} = \dfrac{LC}{AL}$ (व्युत्क्रम करने पर)

$\Rightarrow \quad 1+\dfrac{ND}{AN} = 1+\dfrac{LC}{AL}$ (दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर)

$\Rightarrow \quad \dfrac{AN+ND}{AN} = \dfrac{AL+LC}{AL}$

$[\because \; AD = AN + ND, AC = AL + LC]$

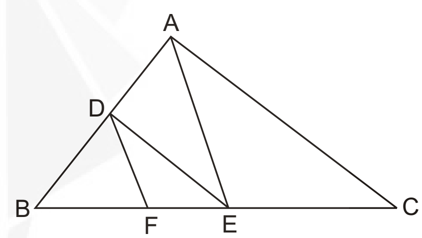
$\Rightarrow \quad \dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AC}{AL}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AL}{AC}$ ...(2)

अब, समीकरण (1) व (2) से, $\boldsymbol{\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}}$ **Proved.**

प्रश्न 4. चित्र में, $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$ है।

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ में भुजा AB पर एक बिन्दु D है और भुजा BC पर दो बिन्दु E व F हैं। रेखाखण्ड DF, DE व AE खींचे गए हैं। $DE \parallel AC$ है और $DF \parallel AE$ है।



सिद्ध करना है : $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$

उपपत्ति : $\because \Delta\, ABE$ में, $DF \parallel AE$

$\therefore \quad \dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BD}{DA}$ ...(1)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

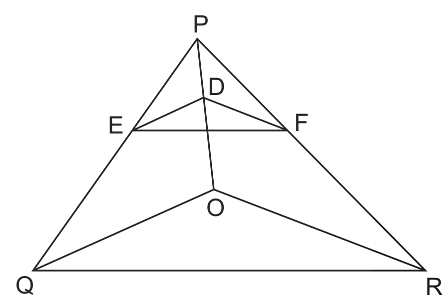
और $\Delta\, ABC$ में, $DE \parallel AC$

$\therefore \quad \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BD}{DA}$ ...(2)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

तब, समीकरण (1) व समीकरण (2) से, $\boldsymbol{\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}}$ **Proved.**

प्रश्न 5. चित्र में, $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में $DE \parallel OQ$ तथा $DF \parallel OR$ है।

सिद्ध करना है : $EF \parallel QR$

उपपत्ति : दी गई आकृति से $\Delta\, POQ$ में,

$DE \parallel OQ$ (दिया है)

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से,

$\dfrac{PE}{EQ} = \dfrac{PD}{DO}$ ...(1)

और $\Delta\, POR$ में, $DF \parallel OR$

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से, $\dfrac{PF}{FR} = \dfrac{PD}{DO}$ ...(2)

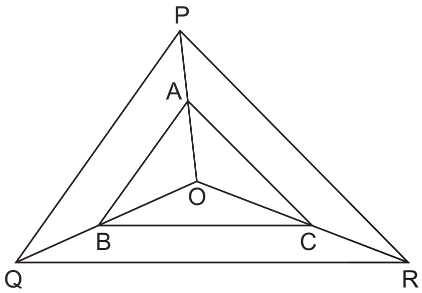
तब, समीकरण (1) व समीकरण (2) से, $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

अब ΔPQR में, $\because$ $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

तब, थेल्स प्रमेय अथवा आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से,

$EF \parallel QR$ **Proved.**

प्रश्न 6. चित्र में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।



हल : दिया है : दिए गए चित्र में रेखाखण्डों OP, OQ और OR पर क्रमशः बिन्दु A, B और C इस प्रकार स्थित हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है।

सिद्ध करना है : $BC \parallel QR$

उपपत्ति : ΔPOQ में, $AB \parallel PQ$ (दिया है)

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से, $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$ ...(1)

इसी प्रकार ΔPOR में, $AC \parallel PR$ (दिया है)

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से, $\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR}$ ...(2)

तब, समीकरण (1) व समीकरण (2) से, $\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$

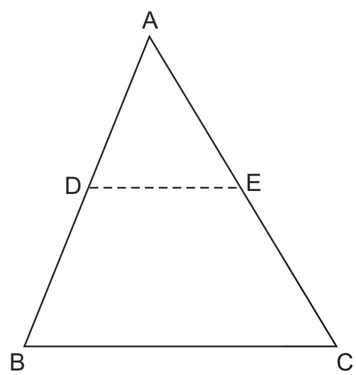
अब ΔOQR में, $\because$ $\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$

$\therefore$ थेल्स प्रमेय अथवा आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से,

$BC \parallel QR$ **Proved.**

प्रश्न 7. प्रमेय 1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

हल : दिया है : ΔABC की एक भुजा AB का मध्य-बिन्दु D है। D से $DE \parallel BC$ खींची गई है जो AC को E पर काटती है।



सिद्ध करना है : E, AC का मध्य-बिन्दु है।

उपपत्ति : $\because$ D, AB का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ $AD : DB = 1 : 1$

और $DE \parallel BC$

तब, थेल्स प्रमेय के अनुसार,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$\therefore$ $\frac{1}{1} = \frac{AE}{EC}$ $\left[\because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{1}\right]$

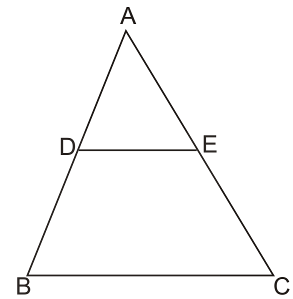
$\Rightarrow$ $AE = EC$

अत: **E, AC का मध्य-बिन्दु है अथवा DE, AC को समद्विभाजित करती है।** **Proved.**

प्रश्न 8. प्रमेय 2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

हल : दिया है : ΔABC में AB तथा AC के मध्य बिन्दु क्रमशः D और E हैं।

सिद्ध करना है : $DE \parallel BC$



उपपत्ति : $\because$ D, AB का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ $$AD : BD = 1 : 1 \quad ...(1)$$

तथा E, AC का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ $$AE : EC = 1 : 1 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

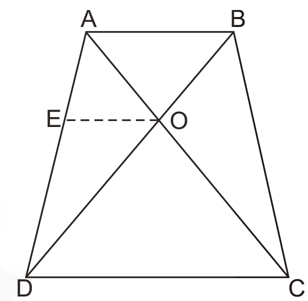
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

थेल्स प्रमेय अथवा आधारभूत आनुपातिकता के विलोम से $\Delta\ ABC$ में,

यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$; तो $\boldsymbol{DE \parallel BC}$

Proved.

प्रश्न 9. $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel DC$ है। इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।



हल : दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें AC तथा BD दो विकर्ण हैं जो परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

रचना : O से जाती हुई $OE \parallel CD$ खींचिए।

उपपत्ति : $\Delta\ ADC$ में, $OE \parallel DC$

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिक प्रमेय से, $$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \quad ...(1)$$

$\because$ समलम्ब $ABCD$ में, $AB \parallel CD$

और रचना से $OE \parallel CD \Rightarrow OE \parallel AB$

अब, $\Delta\ ADB$ में, $OE \parallel AB$

आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से,

$\therefore$ $$\frac{ED}{AE} = \frac{DO}{BO} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) से, $$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

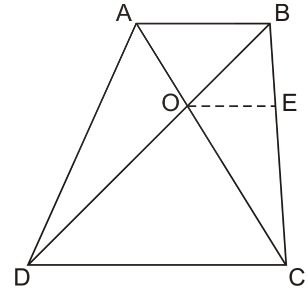
$\Rightarrow$ $$AO \times DO = BO \times CO$$

$\Rightarrow$ $$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

अत: $$\boldsymbol{\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}}$$

Proved.

प्रश्न 10. एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि $ABCD$ एक समलम्ब है।



हल : दिया है : $ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD बिन्दु O पर एक-दूसरे को इस प्रकार विभक्त करते हैं कि

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समलम्ब है।

रचना : O से $OE \parallel DC$ खींचिए।

उपपत्ति :

$\Delta\ BDC$ में, $OE \parallel DC$ (रचना से)

$\therefore$ आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से,

$$\frac{BO}{DO} = \frac{BE}{EC} \qquad ...(1)$$

परन्तु दिया है कि

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) से, $\frac{AO}{CO} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{EC}{BE}$

$\therefore \quad OE \parallel AB$

(थेल्स प्रमेय अथवा आनुपातिकता के आधारभूत प्रमेय के विलोम से)

$\therefore \quad AB \parallel CD \qquad (\because \ OE \parallel CD$ रचना से)

अत: ***ABCD* एक समलम्ब है।** **Proved.**

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1. बताइए कि निम्न चित्र में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : (i) अग्र चित्र में दिए गए दोनों त्रिभुजों में

$\angle A = 60°, \quad \angle B = 80°, \quad \angle C = 40°$ तथा $\angle P = 60°, \quad \angle Q = 80°, \quad \angle R = 40°$

$\therefore \quad \angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle C = \angle R$

अत: दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी AAA से,

$\therefore \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

- **(ii)** अग्र चित्र में दिए गए दोनों त्रिभुजों में

$AB = 2, \quad BC = 2.5, \quad CA = 3.0$ तथा $PQ = 6, \quad QR = 4, \quad RP = 5$

$\because \quad \frac{AB}{QR} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{BC}{RP} = \frac{2.5}{5.0} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{CA}{PQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ}$

अत: दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी SSS से,

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, QRP$$

- **(iii)** निम्न चित्र में दिए गए दोनों त्रिभुजों में,

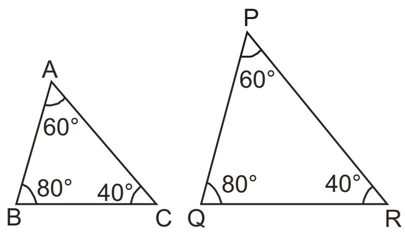
$LM = 2.7, \quad MP = 2, \quad PL = 3$ तथा $DE = 4, \quad EF = 5, \quad FD = 6$

$\frac{MP}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{PL}{FD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{LM}{EF} = \frac{2.7}{5} = \frac{27}{50}$

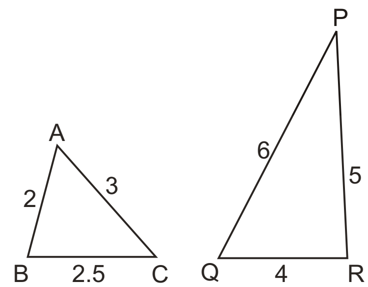
$\because \quad \frac{MP}{DE} = \frac{PL}{FD} \neq \frac{LM}{EF}$

या दोनों त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपात में नहीं हैं।

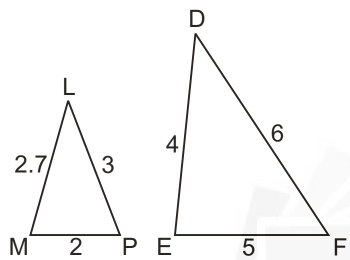
अत: **दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।**



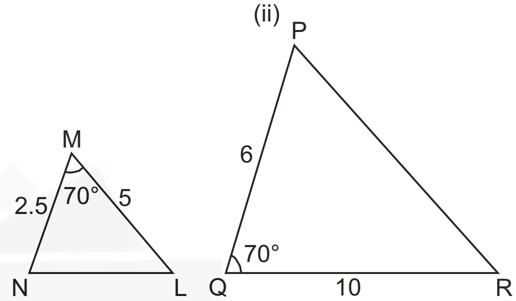
(i)



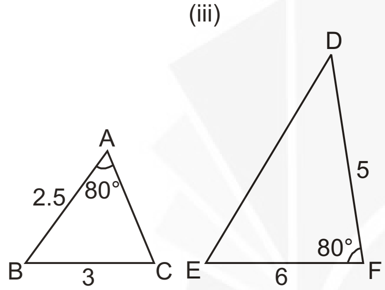
(ii)



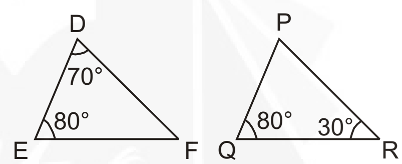
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

- **(iv)** दिए गए दोनों त्रिभुजों में,

$\angle M = 70°$ और $\angle Q = 70°$ तथा

$NM = 2.5$ $\quad PQ = 6$

$ML = 5$ $\quad QR = 10$

$$\frac{NM}{PQ} = \frac{2.5}{6.0} = \frac{5}{12} \quad \text{और} \quad \frac{ML}{QR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$\because$ $\frac{NM}{PQ} \neq \frac{ML}{QR}$ अर्थात $\angle M$ व $\angle Q$ को अन्तर्विष्ट करने वाली भुजाएँ NM और PQ तथा ML और QR आनुपातिक नहीं है।

अत: **दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।**

- **(v)** दिए गए दोनों त्रिभुजों में,

$\angle A = 80°$ और $\angle F = 80°$

$AB = 2.5$ और $FD = 5$

$AC =$ अनिश्चित और $FE = 6$

स्पष्ट है कि $\angle A$ व $\angle F$ को अन्तर्विष्ट करने वाली भुजाएँ AB और FD तथा AC और FE आनुपातिक नहीं हैं।

अत: **दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।**

- **(vi)** $\Delta\, DEF$ में,

$$\angle D = 70^\circ, \quad \angle E = 80^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle F = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ$$

($\because$ त्रिभुज के अन्त: कोणों का योग 180° होता है।)

और $\Delta\, PQR$ में,

$$\angle Q = 80^\circ, \quad \angle R = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle P = 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ) = 70^\circ$$

($\because$ त्रिभुज के अन्त: कोणों का योग 180° होता है।)

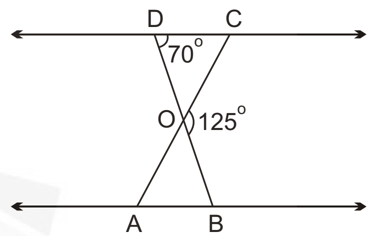
तब, $\Delta\, DEF$ और $\Delta\, PQR$ की तुलना करने पर,

$$\angle D = \angle P$$
$$\angle E = \angle Q$$
$$\angle F = \angle R$$

अत: दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी AAA से,

$$\boldsymbol{\Delta\, DEF \sim \Delta\, PQR}$$

प्रश्न 2. आकृति में, $\Delta\, ODC \sim \Delta\, OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



हल : दिए गए चित्र में, DB एक ऋजु रेखा है और उससे OC, बिन्दु O पर मिलती है जिससे $\angle DOC$ और $\angle BOC$ एक रैखिक युग्म के कोण हैं।

$\therefore \quad \angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ \quad (\because \angle BOC = 125^\circ)$

$\Rightarrow \quad \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

तब, $\Delta\, DOC$ में, $\angle CDO + \angle DOC + \angle DCO = 180^\circ$ ($\because$ त्रिभुज के अन्त: कोणों का योग 180° होता है।)

$\therefore \quad 70^\circ + 55^\circ + \angle DCO = 180^\circ \quad (\because \angle CDO = 70^\circ)$

$\Rightarrow \quad \angle DCO = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ)$

$\Rightarrow \quad \angle DCO = 55^\circ$

$\because \quad \Delta\, ODC \sim \Delta\, OBA \quad \therefore \quad \angle DCO = \angle OAB$

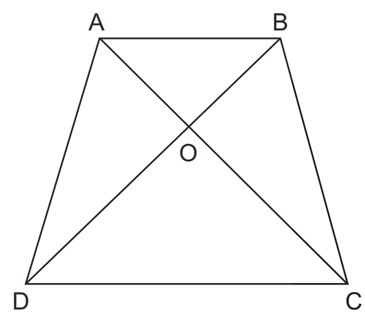
$\therefore \quad \angle OAB = 55 \quad (\because \angle DCO = 55^\circ)$

अत: $\boldsymbol{\angle DOC = 55^\circ}$, $\boldsymbol{\angle DCO = 55^\circ}$, $\boldsymbol{\angle OAB = 55^\circ}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. समलम्ब $ABCD$ जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ है।

हल : दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel CD$ तथा उसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$



उपपत्ति : $\because$ $AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \quad \angle OAB = \angle OCD$ (एकान्तर कोण युग्म)

और $\quad \angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अब, $\Delta\, AOB$ और $\Delta\, OCD$ में,

$\angle AOB = \angle COD$ तथा $\angle OAB = \angle OCD$

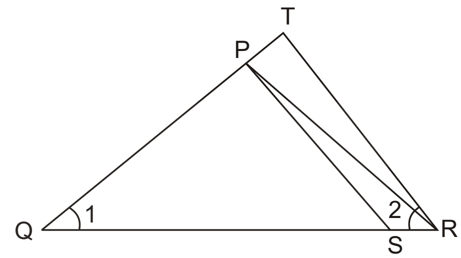
(ऊपर सिद्ध किया है।)

$\therefore$ त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से,

$$\Delta\, AOB \sim \Delta\, OCD$$

$\therefore \quad \boldsymbol{\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}}$ (भुजाओं की आनुपातिकता से) **Proved.**

प्रश्न 4. दी गई आकृति में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में,

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है

सिद्ध करना है : $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

उपपत्ति : ΔPQR में, $\because$ $\angle 1 = \angle 2$

$\Rightarrow$ $\angle PQR = \angle PRQ$

$\Rightarrow$ $QP = PR$

($\because$ त्रिभुज में समान कोणों के सम्मुख भुजाएँ भी समान होती है।) ...(1)

अब, $\because$ $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ (दिया है)

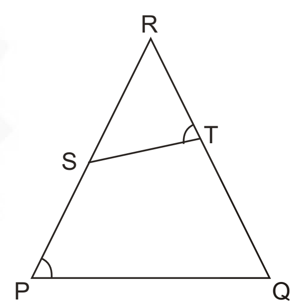
$\therefore$ $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ [समीकरण (1) से]

तब, ΔPQS और ΔTQR में,

$\angle Q$ उभयनिष्ठ है और इस कोण को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाएँ (QP व QT) तथा (QS व QR) आनुपातिक हैं।

अत: दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी SAS से, $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ **Proved.**

प्रश्न 5. ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिन्दु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में $\angle P = \angle RTS$

सिद्ध करना है : $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

उपपत्ति : ΔRPQ तथा ΔRTS में,

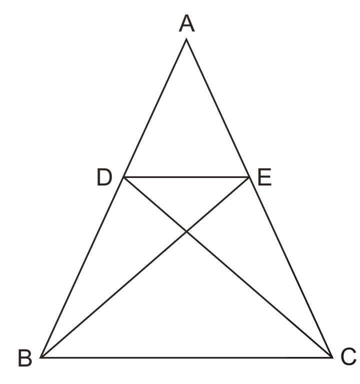
$\angle P = \angle RTS$ (दिया है)

तथा $\angle R = \angle SRT$ (उभयनिष्ठ कोण)

तब, त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से,

$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ **Proved.**

प्रश्न 6. दी गई आकृति में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में, ΔABE और ΔACD सर्वांगसम हैं।

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

उपपत्ति : $\because$ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)

$\therefore$ $AB = AC$

और $AE = AD$

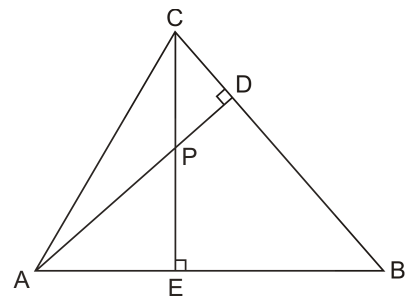
अब, ΔADE और ΔABC की तुलना करने पर,

$\because$ $AB = AC$ और $AE = AD$

$\therefore$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ अर्थात ΔADE और ΔABC की भुजाएँ (AD व AB) तथा (AE व AC) आनुपातिक हैं और ये दोनों ही भुजा-युग्म प्रत्येक त्रिभुज के लिए $\angle A$ को अन्तर्विष्ट करते हैं।

$\therefore$ दो त्रिभुजों की समरूपता के गुणधर्म (कसौटी) SAS से,

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ **Proved.**



प्रश्न 7. दी गई आकृति में, ΔABC के शीर्ष लम्ब AD और CE परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि :

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

हल : दिया है : ΔABC में AD और CE शीर्षलम्ब हैं जो बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

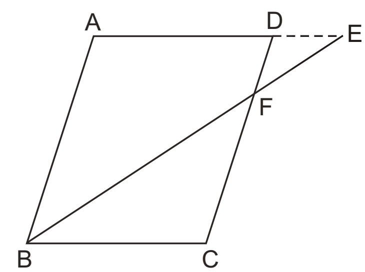
सिद्ध करना है :

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

उपपत्ति : ΔABC में AD और CE शीर्षलम्ब हैं।

$\therefore$ $AD \perp BC$ तथा $CE \perp AB$

- **(i)** ΔAEP और ΔCDP में, $\angle AEP = \angle CDP$ (प्रत्येक 90° है)
  $\angle APE = \angle CPD$ (शीर्षाभिमुख कोण)
  अत: त्रिभुज की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta AEP \sim \Delta CDP}$ **Proved.**
- **(ii)** ΔABD और ΔCBE में, $\angle ADB = \angle CEB$ (प्रत्येक 90° है।)
  $\angle ABD = \angle CBE$ (दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ कोण है।)
  अत: त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta ABD \sim \Delta CBE}$ **Proved.**
- **(iii)** ΔAEP और ΔADB में, $\angle AEP = \angle ADB$ (प्रत्येक 90° है।)
  $\angle PAE = \angle DAB$ (दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ कोण हैं।)
  अत: त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta AEP \sim \Delta ADB}$ **Proved.**
- **(iv)** ΔPDC और ΔBEC में, $\angle PDC = \angle BEC$ (प्रत्येक 90° है)
  $\angle DCP = \angle BCE$ (दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ कोण है)
  अत: त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta PDC \sim \angle BEC}$ **Proved.**



प्रश्न 8. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिन्दु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ हैं।

हल : दिया है : $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी भुजा AD को किसी बिन्दु E तक बढ़ाया गया है। रेखाखण्ड BE, भुजा CD को बिन्दु F पर प्रतिच्छेदित करता है।

सिद्ध करना है : $\Delta ABE \sim \Delta CFB$

उपपत्ति : $\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel AE$

$\because$ $BC \parallel AE$ और BE तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle EBC = \angle AEB \Rightarrow \angle AEB = \angle FBC$

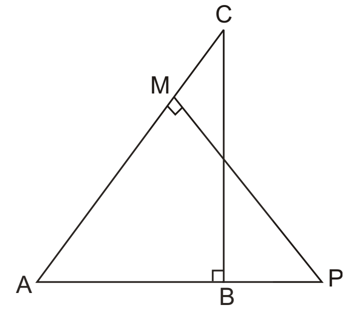
अब, ΔABE और ΔCFB में,

$\angle A = \angle C$ ($\because$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

$\angle AEB = \angle FBC$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

तब, त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta ABE \sim \Delta CFB}$ **Proved.**

प्रश्न 9. दी गई आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :



(i) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AMP$ **(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$**

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, AMP$ दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनमें $\angle B$ तथा $\angle M$ समकोण हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AMP$

(ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$

उपपत्ति : (i) समकोण $\Delta\, ABC$ तथा समकोण $\Delta\, AMP$ की तुलना करने पर,

$$\angle B = \angle M \qquad (\because \text{ प्रत्येक समकोण अर्थात } 90° \text{ है।})$$

$$\angle A = \angle A \qquad (\text{उभयनिष्ठ कोण है।})$$

तब, दो त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से,

$$\boldsymbol{\Delta\, ABC \sim \Delta\, AMP}$$ **Proved.**

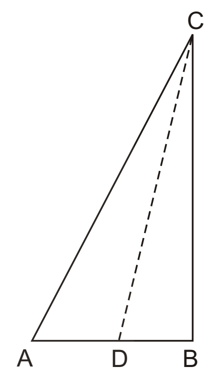
● **(ii)** $\because \Delta\, ABC$ और $\Delta\, AMP$ समरूप हैं।

∴ दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक होंगी।

∴ $$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MP} = \frac{CA}{PA}$$

⇒ $$\boldsymbol{\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}}$$ **Proved.**

प्रश्न 10. CD और GH क्रमशः $\angle\, ACB$ और $\angle\, EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिन्दु D और H क्रमशः $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG$ हो तो सिद्ध कीजिए :



(i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta\, DCB \sim \Delta\, HGE$

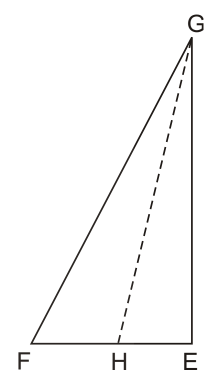
(iii) $\Delta\, DCA \sim \Delta\, HGF$

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, EGF$ में CD, $\angle\, ACB$ का समद्विभाजक है और GH, $\angle\, EGF$ का समद्विभाजक है तथा $\Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG$

सिद्ध करना है : (i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta\, DCB \sim \Delta\, HGE$

(iii) $\Delta\, DCA \sim \Delta\, HGF$



उपपत्ति : $\because$ $\Delta\, ABC$ में CD, $\angle\, ACB$ का समद्विभाजक है।

∴ $$\angle\, ACD = \angle\, DCB = \frac{1}{2}\angle\, ACB$$

इसी प्रकार, $\Delta\, EGF$ में GH, $\angle\, FGE$ का समद्विभाजक है।

∴ $$\angle\, FGH = \angle\, HGE = \frac{1}{2}\angle\, FGE$$

∴ $$\angle\, ACD = \angle\, FGH \quad \text{तथा} \quad \angle\, DCB = \angle\, HGE$$

$$(\because \ \Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG \text{ जिससे } \angle\, ACB = \angle\, FGE)$$

अब, $\Delta\, DCA$ तथा $\Delta\, HGF$ में,

$\because$ $$\angle\, ACD = \angle\, FGH \qquad (\text{ऊपर सिद्ध किया है।})$$

और $$\angle\, A = \angle\, F \qquad (\because \ \Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG)$$

अत: समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\boldsymbol{\Delta\, DCA \sim \Delta\, HGF}$ **Proved.** (iii)

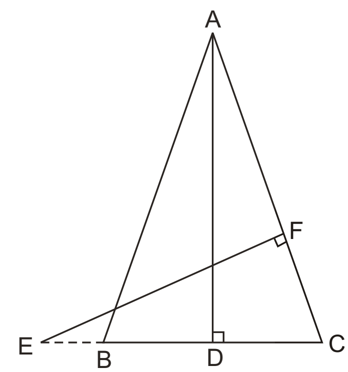
तब, $\Delta\, DCA$ और $\Delta\, HGF$ में, $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$ **Proved.** (i)

अब, $\Delta\, DCB$ और $\Delta\, HGE$ में, $\angle DCB = \angle HGE$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$\angle B = \angle E$ ($\because \Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG$)

$\therefore$ समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\Delta\, DCB \sim \Delta\, HGE$ **Proved.** (ii)

प्रश्न 11. दी गई आकृति में, $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ECF$ है।



हल : दिया है : एक समद्विबाहु $\Delta\, ABC$ है जिसमें $AB = AC$ है। भुजा CB को किसी बिन्दु E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $EF \perp AC$; और $AD \perp BC$

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ECF$

उपपत्ति : $\because$ समद्विबाहु $\Delta\, ABC$ में, $AB = AC$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle ABD = \angle ACD$

($\because$ त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।) ...(1)

$\because$ $AD \perp BC$

$\therefore$ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$ ...(2)

$\because$ $EF \perp AC$ $\therefore$ $\angle EFC = 90°$ ...(3)

अब, $\Delta\, ABD$ तथा $\Delta\, ECF$ में, $\angle ADB = \angle EFC$ [समीकरण (2) व (3) से]

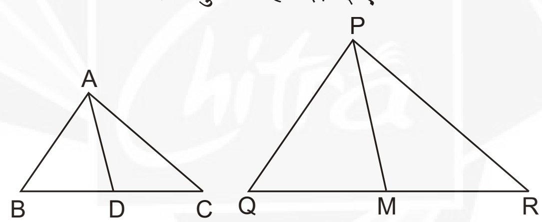
$\angle ABD = \angle ACD$ [समीकरण (1) से]

परन्तु $\angle ACD = \angle ECF$ (दोनों त्रिभुजों में उभयनिष्ठ है।)

$\therefore$ $\angle ABD = \angle ECF$

तब, त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से, $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ECF$ **Proved.**

प्रश्न 12. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ है।



हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ तथा $\Delta\, PQR$ दो त्रिभुज हैं जिनमें $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$

जबकि AD तथा PM माध्यिकाएँ हैं अर्थात $BD = CD = \frac{1}{2}BC$ तथा $QM = MR = \frac{1}{2}QR$

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ समरूप हैं अर्थात $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

उपपत्ति : $\because$ $\frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$ (दिया है)

$\therefore$ $\frac{2BD}{2QM} = \frac{AD}{PM}$ ($\because$ $BD = \frac{1}{2}BC$ तथा $QM = \frac{1}{2}QR$)

$\therefore$ $\frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$

अब, $\Delta\, ABD$ तथा $\Delta\, PQM$ में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$

$\therefore$ $\Delta\, ABD \sim \Delta\, PQM$

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$

$\Delta\, ABC$ तथा $\Delta\, PQR$ में,

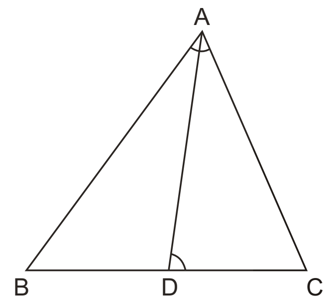
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad \text{तथा} \quad \angle B = \angle Q$$

तब, त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी SAS से,

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$$

अत: **$\Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ समरूप हैं।** **Proved.**

प्रश्न 13. किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है।
दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$



हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ में BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि

$$\angle ADC = \angle BAC$$

सिद्ध करना है : $CA^2 = CB \cdot CD$

उपपत्ति : $\Delta\, CDA$ और $\Delta\, CAB$ में,

$\angle ADC = \angle BAC$ (दिया है)

$\angle ACD = \angle ACB$ (उभयनिष्ठ कोण हैं)

$\angle CAD = \angle ABC$ (स्वत: समान हैं)

$\therefore$ $\Delta\, CDA \sim \Delta\, CAB$ (AAA समरूपता से)

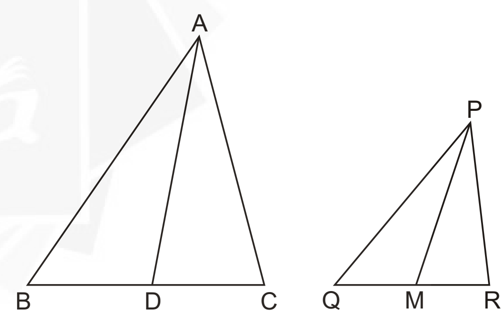
अत: $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow$ $\boldsymbol{CA^2 = CB \cdot CD}$ **Proved.**

प्रश्न 14. एक त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC तथा माध्यिका AD, एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ है।

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ में BC की माध्यिका AD तथा QR की माध्यिका PM है जिससे

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$$

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$



उपपत्ति : दिया है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$

$\because$ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ और $\frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$

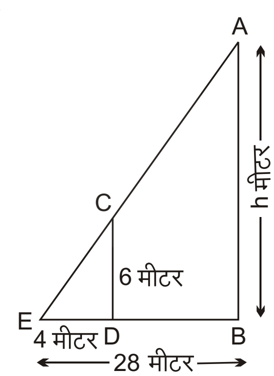
इसी प्रकार, $\frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$

$\therefore$ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$

$\because$ $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ की संगत भुजाएँ आनुपातिक हैं।

अत: $\boldsymbol{\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR}$ **Proved.**

प्रश्न 15. लम्बाई 6 मीटर वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 4 मीटर है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 मीटर है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : 6 मीटर लम्बे स्तम्भ CD की छाया $DE = 4$ मीटर प्राप्त होती है। उसी समय एक मीनार $AB = h$ मीटर की छाया $BE = 28$ मीटर प्राप्त होती है।

ज्ञात करना है : मीनार की ऊँचाई h का मान।

गणना : समरूप $\Delta\, CDE$ और $\Delta\, ABE$ में,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$$

$\therefore$ $\frac{h}{6} = \frac{28}{4}$ $(\because CD = 6$ मीटर$)$

$$\Rightarrow \quad 4 \times h = 6 \times 28$$

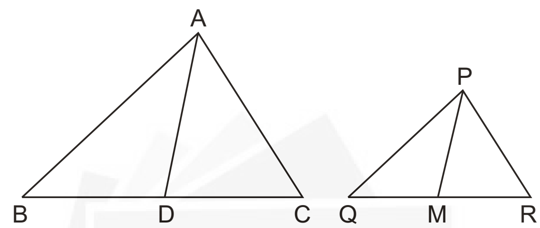
$$\Rightarrow \quad h = \frac{6 \times 28}{4}$$

$$h = 42 \text{ मीटर}$$

अतः **मीनार की ऊँचाई = 42 मीटर।** **उत्तर**

प्रश्न 16. *AD* और *PM* त्रिभुजों *ABC* और *PQR* की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ दो समरूप त्रिभुज हैं। AD, त्रिभुज ABC की और PM, त्रिभुज PQR की माध्यिकाएँ हैं।



सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

उपपत्ति : $\because \Delta\, ABC$ और $\Delta\, PQR$ समरूप हैं।

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad \ldots(1)$$

$$\text{और} \quad \angle B = \angle Q \quad \ldots(2)$$

$\because$ AD, $\Delta\, ABC$ की माध्यिका है जिससे $BD = CD = \frac{1}{2} BC$

और PM, $\Delta\, PQR$ की माध्यिका है जिससे $QM = MR = \frac{1}{2} QR$

$$\text{तब,} \quad \frac{BD}{QM} = \frac{\frac{1}{2} BC}{\frac{1}{2} QR}$$

$$\text{या} \quad \frac{BD}{QM} = \frac{BC}{QR} \quad \ldots(3)$$

तब, समीकरण (1) व समीकरण (3) से, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...(4)

अब, $\Delta\, ABD$ और $\Delta\, PQM$ की तुलना करने पर,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \quad \text{[समीकरण (4) से]}$$

$$\angle B = \angle Q \quad \text{[समीकरण (2) से]}$$

$\because$ $\angle B$ और $\angle Q$ को अन्तर्विष्ट करने वाली $\Delta\, ABD$ और $\Delta\, PQM$ की संगत भुजाएँ आनुपातिक हैं।

अतः दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी SAS से,

$$\Delta\, ABD \sim \Delta\, PQM$$

तब, समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं के आनुपातिकता के गुणधर्म से,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

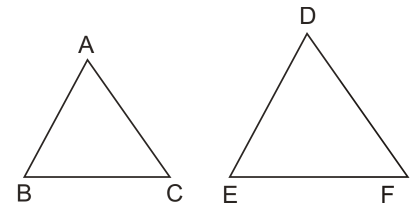
Proved.

प्रश्नावली 6.4

प्रश्न 1. मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 सेमी^{2}और 121 सेमी^{2} हैं। यदि $EF = 15.4$ सेमी^{2} हो तो BC ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, ΔABC का क्षेत्रफल = 64 वर्ग सेमी,

ΔDEF का क्षेत्रफल = 121 वर्ग सेमी तथा $EF = 15.4$ सेमी



$\because$ त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात

$$\therefore \quad \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\therefore \quad \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{(15.4)^2}$$

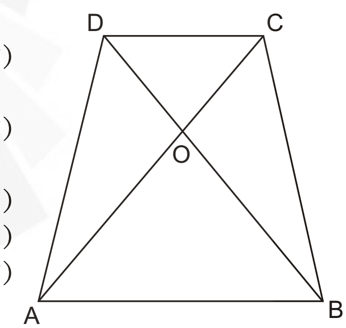
$$\Rightarrow \quad \frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$\Rightarrow \quad 11\,BC = 8 \times 15.4 \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2$$

अतः **$BC = 11.2$ सेमी।** **उत्तर**

प्रश्न 2. एक समलम्ब $ABCD$ जिसमें $AB \parallel CD$ है, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2\,CD$ हो तो त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ $AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।



$\angle CAB = \angle ACD \quad \Rightarrow \quad \angle OAB = \angle OCD$ (एकान्तर कोण)

$\because$ $AB \parallel CD$ और DB तिर्यक रेखा है।

$\angle DBA = \angle BDC \quad \Rightarrow \quad \angle OBA = \angle ODC$ (एकान्तर कोण)

अब, ΔAOB तथा ΔCOD में,

$\angle OAB = \angle OCD$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$\angle OBA = \angle ODC$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

तथा $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Delta OAB \sim \Delta OCD$

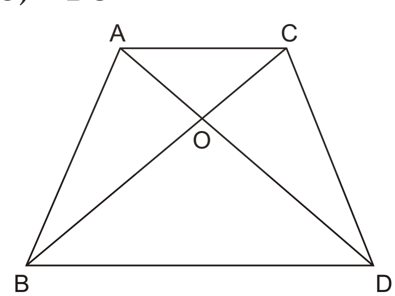
$\because$ त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात

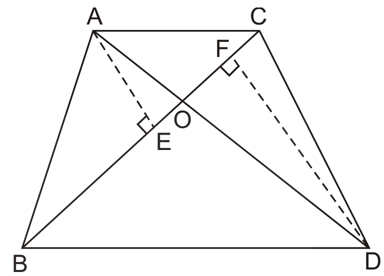
$$\therefore \quad \frac{\Delta AOB \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta COD \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DC^2} = \frac{(2CD)^2}{CD^2} = \frac{4CD^2}{CD^2} \qquad [\because AB = 2\,CD \text{ (दिया है)}]$$

$$= \frac{4}{1} = \mathbf{4 : 1}$$

उत्तर

प्रश्न 3. दी गई आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि $\dfrac{\text{ar }(ABC)}{\text{ar }(DBC)} = \dfrac{AO}{DO}$ है।





हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ DBC$ एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज हैं। AD, BC को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है : $\dfrac{\text{ar}\,(ABC)}{\text{ar}\,(DBC)} = \dfrac{AO}{DO}$

रचना : शीर्ष A से BC पर AE तथा शीर्ष D से BC पर DF लम्ब खींचा।

उपपत्ति : $\because$ शीर्षों A तथा D से BC पर AE तथा DF लम्ब खींचे गए हैं। अत: $\Delta\ AEO$ तथा $\Delta\ DFO$ समकोणीय हैं।

समकोण $\Delta\ AEO$ तथा $\Delta\ DFO$ में,

$$\angle\ AEO = \angle\ DFO \qquad \text{(प्रत्येक } 90^\circ\text{)}$$

$$\angle\ AOE = \angle DOF \qquad \text{(शीर्षाभिमुख कोण हैं।)}$$

$\therefore$ $$\Delta\ AEO \sim \Delta\ DFO \qquad \text{(उपगुणधर्म AA से)}$$

$\therefore$ $$\frac{AE}{DF} = \frac{AO}{DO} \qquad \ldots(1)$$

अब, $\Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \dfrac{1}{2} BC \times AE$

और $\Delta\ DBC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \dfrac{1}{2} BC \times DF$

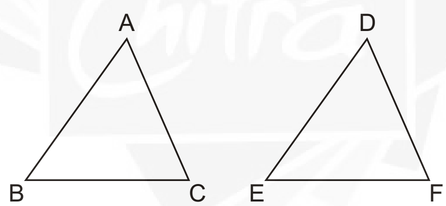
$\therefore$ $$\frac{\Delta\ ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\ DBC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AE}{\frac{1}{2} BC \times DF} = \frac{AE}{DF} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{ar}(ABC)}{\text{ar}(DBC)} = \frac{AE}{DF} \qquad \ldots(2)$$

तब, समीकरण (1) व (2) से, $$\mathbf{\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(DBC)} = \frac{AO}{DO}}$$ **Proved.**

प्रश्न 4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे सर्वांगसम होते हैं।

हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ DEF$ समरूप हैं और $\Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \Delta\ DEF$ का क्षेत्रफल

सिद्ध करना है : $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$



उपपत्ति : चूँकि समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

$\therefore$ $$\frac{\text{क्षेत्रफल } (\Delta\ ABC)}{\text{क्षेत्रफल } (\Delta\ DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

परन्तु $$\text{क्षेत्रफल } (\Delta\ ABC) = \text{क्षेत्रफल } (\Delta\ DEF) \qquad \text{(दिया है)}$$

$\therefore$ $$\frac{BC^2}{EF^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $$BC^2 = EF^2$$

$\Rightarrow$ $$BC = EF$$

अब, $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ DEF$ में,

$$\angle\ ABC = \angle\ DEF \qquad (\because\ \Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF)$$

$$BC = EF \qquad \text{(ऊपर सिद्ध किया है।)}$$

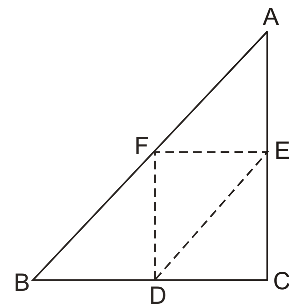
$$\angle\ ACB = \angle\ DFE \qquad (\because\ \Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF)$$

अत: $$\boldsymbol{\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF} \qquad \text{(ASA से)}$$ **Proved.**

प्रश्न 5. एक $\Delta\, ABC$ की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। $\Delta\, DEF$ और $\Delta\, ABC$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : ABC की भुजाओं BC, CA, AB के मध्य बिन्दु क्रमश : D, E, F हैं जिनको मिलाने से $\Delta\, DEF$ बना है।

ज्ञात करना है : $\Delta\, DEF$ का क्षेत्रफल : $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल



गणना : $\because$ D, E, F क्रमशः BC, CA, AB के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore$ $$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{1}{2}$$

[$\because AB = 2DE,\ BC = 2EF$ तथा $CA = 2FD$]

$\because$ त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात

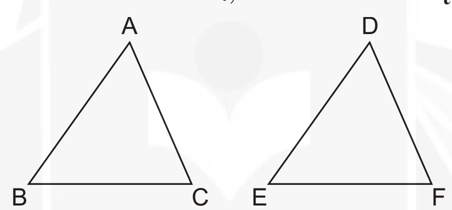
$\therefore$ $$\frac{\Delta\, DEF \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{(DE)^2}{(AB)^2} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

अतः **$\Delta\, DEF$ का क्षेत्रफल : $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल = 1: 4**

उत्तर

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

हल : दिया है : दो समरूप $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, DEF$ हैं, जिनमें AP तथा DQ संगत माध्यिकाएँ हैं।



चूँकि समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।

सिद्ध करना है : $$\frac{\Delta\ ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\ DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AP^2}{DQ^2} = \left(\frac{AP}{DQ}\right)^2$$

रचना : शीर्ष A से BC पर लम्ब AM तथा शीर्ष D से EF पर लम्ब DN खींचा।

उपपत्ति : समरूप $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, DEF$ में AM तथा DN क्रमशः लम्ब हैं।

$\therefore$ $$\frac{\Delta\ ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\ DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AM^2}{DN^2} \qquad ...(1)$$

$\because$ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ और AP तथा DQ उनकी संगत माध्यिकाएँ हैं।

$\therefore$ $$\Delta\, ABP \sim \Delta\, DEQ$$

तब, त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के वर्गों का अनुपात

$\Rightarrow$ $$\frac{\Delta\ ABP \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\ DEQ \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AP^2}{DQ^2} \qquad ...(2)$$

परन्तु $$\frac{\Delta\ ABP \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\ DEQ \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AM^2}{DN^2} \qquad ...(3)$$

($\because\ AM \perp BP$ और $DN \perp EQ$)

तब, समीकरण (2) व (3) से,

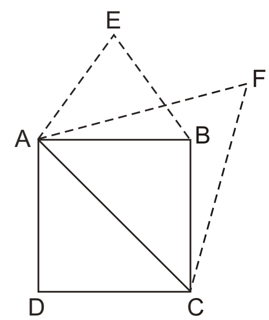
$$\frac{AM^2}{DN^2} = \frac{AP^2}{DQ^2} = \left(\frac{AP}{DQ}\right)^2 \qquad ...(4)$$

तब, समीकरण (1) व (4) से,

$$\frac{\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AP}{DQ}\right)^2$$ **Proved.**

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल : दिया है : $ABCD$ एक वर्ग है जिसकी एक भुजा AB तथा विकर्ण AC है। AB तथा AC पर समबाहु $\Delta\, ABE$ तथा $\Delta\, ACF$ बनाए गए हैं।



सिद्ध करना है : $\Delta\, ABE$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\Delta\, ACF$ का क्षेत्रफल

उपपत्ति : वर्ग $ABCD$ की भुजा $= AB$

वर्ग $ABCD$ का विकर्ण $AC = AB\sqrt{2}$

भुजा AB पर बने समबाहु $\Delta\, ABE$ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \frac{(AB)^2\ \sqrt{3}}{4}$

विकर्ण AC पर बने समबाहु $\Delta\, ACF$ का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \frac{(AC)^2\ \sqrt{3}}{4}$

$\therefore$
$$\frac{\Delta\, ABE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, ACF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{[(AB)^2\ \sqrt{3}]/\,4}{[(AC)^2\ \sqrt{3}]/\,4} = \frac{(AB)^2\ \sqrt{3}}{(AC)^2\ \sqrt{3}} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2$$

$$= \left[\frac{AB}{AB\sqrt{2}}\right]^2 \qquad [\because AC = AB\sqrt{2}]$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$
$$\frac{\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, ACF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

अत: Δ ***ABE* का क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2}\Delta$ ***ACF* का क्षेत्रफल।** **Proved.**

सही उत्तर चुनिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रश्न 8. *ABC* और *BDE* दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि *D* भुजा *BC* का मध्य-बिन्दु है। त्रिभुजों *ABC* और *BDE* के क्षेत्रफलों का अनुपात है :

(a) $2:1$ **(b)** $1:2$ **(c)** $4:1$ **(d)** $1:4$.

हल : $\because \Delta\, ABC$ और $\Delta\, BDE$ समरूप त्रिभुज हैं जिनमें D, भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ $BD = \frac{1}{2}BC$ या $BD : BC = 1:2$ $\Rightarrow$ $BC : BD = 2:1$

तब, $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल : $\Delta\, BDE$ का क्षेत्रफल $= BC^2 : BD^2 = (2)^2 : (1)^2 = 4:1$

अत: **विकल्प (c) सही है।** **उत्तर**

प्रश्न 9. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है :

(a) $2:3$ **(b)** $4:9$ **(c)** $81:16$ **(d)** $16:81$.

हल : $\because$ दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = संगत भुजाओं के अनुपात का वर्ग

$= (4:9)^2 = 16:81$ (दिया है।)

अत: **विकल्प (d) सही है।** **उत्तर**

प्रश्नावली 6.5

प्रश्न 1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि उनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लम्बाई भी लिखिए।

(i) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी **(ii) 3 सेमी, 8 सेमी, 6 सेमी**

(iii) 50 सेमी, 80 सेमी, 100 सेमी **(iv) 13 सेमी, 12 सेमी, 5 सेमी।**

हल : $\because$ समकोण त्रिभुजों में सबसे लम्बी भुजा कर्ण का वर्ग शेष दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

● **(i)** माना $a = 7$ सेमी, $b = 24$ सेमी तथा $c = 25$ सेमी,

तब, (सबसे लम्बी भुजा)$^2 = c^2 = (25)^2 = 625$ तथा $a^2 + b^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$

$\therefore$ $c^2 = a^2 + b^2$ अर्थात (सबसे लम्बी भुजा)^2= शेष दोनों भुजाओं के वर्गों का योग

अत: **दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है तथा कर्ण की लम्बाई = 25 सेमी।** **उत्तर**

● **(ii)** माना $a = 3$ सेमी, $b = 8$ सेमी तथा $c = 6$ सेमी,

तब, (सबसे लम्बी भुजा)$^2 = b^2 = (8)^2 = 64$ तथा $a^2 + c^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

$\therefore$ $b^2 \neq c^2 + a^2$ अर्थात सबसे लम्बी भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर नहीं है।

अत: **दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज नहीं है।** **उत्तर**

● **(iii)** माना $a = 50$ सेमी, $b = 80$ सेमी तथा $c = 100$ सेमी,

तब, (सबसे लम्बी भुजा)$^2 = c^2 = (100)^2 = 10{,}000$ तथा $a^2 + b^2 = (50)^2 + (80)^2$

$= 2500 + 6400 = 8900$

$\therefore$ $c^2 \neq a^2 + b^2$ अर्थात सबसे लम्बी भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर नहीं है।

अत: **दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज नहीं है।** **उत्तर**

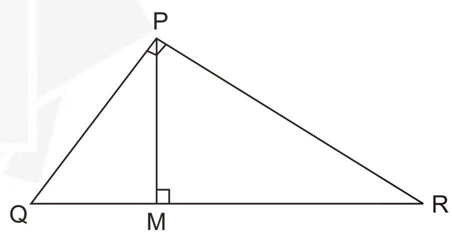
● **(iv)** माना $a = 13$ सेमी, $b = 12$ सेमी तथा $c = 5$ सेमी,

तब, (सबसे लम्बी भुजा)$^2 = a^2 = (13)^2 = 169$ तथा $b^2 + c^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$

$\therefore$ $a^2 = b^2 + c^2$ अर्थात सबसे लम्बी भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर है।

अत: **दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है तथा कर्ण की लम्बाई = 13 सेमी।** **उत्तर**

प्रश्न 2. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिन्दु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$ है।



हल : दिया है : समकोण त्रिभुज PQR में $\angle P$ समकोण है तथा $PM \perp QR$ है।

सिद्ध करना है : $PM^2 = QM \cdot MR$

उपपत्ति : $\because$ समकोण त्रिभुज PQR में $\angle P$ समकोण है और इसके समकोण वाले शीर्ष P से कर्ण QR पर लम्ब खींचा गया है।

$\therefore$ $\Delta PQM \sim \Delta RPM$

$\therefore$ $\dfrac{QM}{PM} = \dfrac{PM}{MR}$ ($\because$ ΔPQM और ΔPRM की भुजाएँ आनुपातिक हैं।)

$\therefore$ $PM^2 = QM \cdot MR$ (वज्रगुणन से)

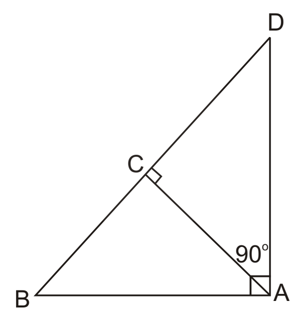
अत: $\boldsymbol{PM^2 = QM \cdot MR}$ **Proved.**

प्रश्न 3. दी गई आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि :

(i) $AB^2 = BC \times BD$

(ii) $AC^2 = BC \times DC$

(iii) $AD^2 = BD \times CD$



हल : दिया है : ΔABD में $\angle DAB = 90°$ तथा $AC \perp BD$

सिद्ध करना है :

(i) $AB^2 = BC \times BD$

(ii) $AC^2 = BC \times DC$

(iii) $AD^2 = BD \times CD$

उपपत्ति : $\because$ $\Delta\, ABD$ में, $\angle DAB = 90°$

$\therefore$ $\Delta\, ABD$ समकोण त्रिभुज है जिसमें $AC \perp BD$

$\therefore$ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBA$ और $\Delta\, DAC \sim \Delta\, DBA$ तथा $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC$

- **(i)** $\because$ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBA$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ तथा $\Delta\, DBA$ की तुलना करने पर,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{AB^2 = BC \times BD}$ **Proved.**

- **(ii)** $\because$ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC$

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ तथा $\Delta\, DAC$ की तुलना करने पर,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{AC^2 = BC \times DC}$ **Proved.**

- **(iii)** $\because$ $\Delta\, DAC \sim \Delta\, DBA$

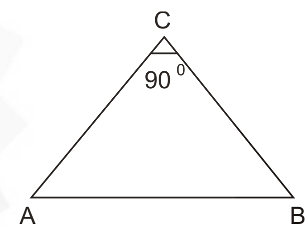
$\therefore$ $\Delta\, DAC$ तथा $\Delta\, DBA$ की तुलना करने पर,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{AD^2 = BD \times CD}$ **Proved.**

प्रश्न 4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2\,AC^2$ है।

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ समद्विबाहु है जिसमें $\angle C = 90°$ तथा $BC = AC$



सिद्ध करना है : $AB^2 = 2\,AC^2$

उपपत्ति : समद्विबाहु समकोण $\Delta\, ABC$ में,

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

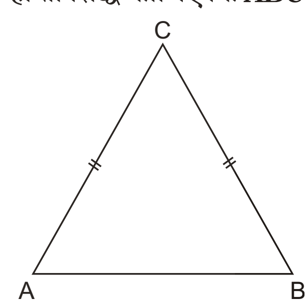
$\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + (AC)^2$ [$\because$ दिया है $BC = AC$]

$\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + AC^2$

अत: $\boldsymbol{AB^2 = 2\,AC^2}$ **Proved.**

प्रश्न 5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल : दिया है : समद्विबाहु $\Delta\, ABC$ में,



$$AC = BC \quad \text{और} \quad AB^2 = 2\,AC^2$$

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

उपपत्ति : $\because$ $AB^2 = 2\,AC^2$

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + AC^2$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2$ ($\because AC = BC$)

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,

$\Delta\, ABC$ समकोण त्रिभुज होगा। **Proved.**

प्रश्न 6. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

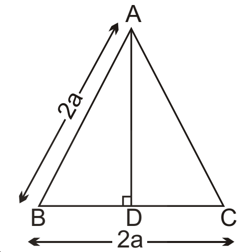
हल : $\because$ $\Delta\, ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

उसकी भुजा $AB = 2a,$ $BC = 2a,$ $CA = 2a$

उसके शीर्ष A से BC पर लम्ब AD खींचा गया है।

$\therefore$ $BD = CD = \frac{1}{2}BC \quad \Rightarrow \quad BD = CD = \frac{1}{2}(2a) = a$

($\because$ समबाहु त्रिभुज में शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उस भुजा को समद्विभाजित करता है।)



तब, समकोण त्रिभुज ABD में,

$$AD^2 + BD^2 = AB^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow$ $$AD^2 + a^2 = (2a)^2$$

$\Rightarrow$ $$AD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$\Rightarrow$ $$AD = a\sqrt{3}$$

$\therefore$ शीर्षलम्ब $AD = a\sqrt{3}$

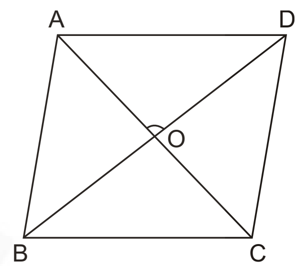
$\because$ त्रिभुज समबाहु है; अत: दो अन्य शीर्षलम्बों की लम्बाई भी $\boldsymbol{a\sqrt{3}}$ होगी। **उत्तर**

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के योग के बराबर होता है।

हल : दिया है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है जिसमें AC तथा CD दो विकर्ण हैं जो परस्पर O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

उपपत्ति : $\because$ समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।



तब समकोण $\Delta\, AOB$ में,

$$AB = \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\ AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\ BD\right)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because\ \ OA = OC = \dfrac{1}{2}AC \\ \text{तथा } OB = OD = \dfrac{1}{2}\ BD \end{array}\right]$$

$\therefore$ $$AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2}$$

$\therefore$ $$AB^2 = \frac{1}{4}\,(AC^2 + BD^2)$$

इसी प्रकार, $$BC^2 = \frac{1}{4}\,(AC^2 + BD^2)$$

$$CD^2 = \frac{1}{4}\,(AC^2 + BD^2)$$

$$DA^2 = \frac{1}{4}\,(AC^2 + BD^2) \qquad [\because \text{ समचतुर्भुज में, } AB = BC = CD = DA]$$

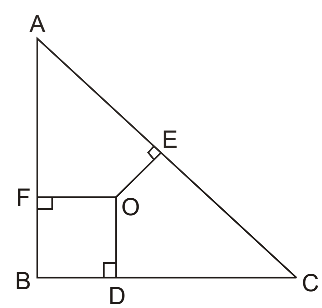
जोड़ने पर, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = \frac{1}{4}\,(4AC^2 + 4BD^2) = \frac{4}{4}\,(AC^2 + BD^2)$

अत: $\boldsymbol{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2}$ **Proved.**

प्रश्न 8. दी गई आकृति में $\Delta\, ABC$ के अभ्यन्तर में स्थित कोई बिन्दु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है। दर्शाइए कि :

(i) $\boldsymbol{OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2}$

(ii) $\boldsymbol{AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2}$

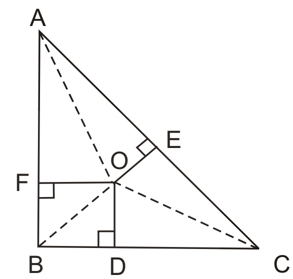


हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ के अन्दर एक बिन्दु O है जिससे भुजाओं BC, CA तथा AD पर क्रमश: OD, OE और OF लम्ब खींचे गए हैं।

सिद्ध करना है :

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



रचना : रेखाखण्ड OA, OB तथा OC खींचिए।

उपपत्ति : (i) समकोण $\Delta\ OFA$ में,

$$AF^2 + OF^2 = OA^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(1)$$

समकोण $\Delta\ ODB$ में,

$$BD^2 + OD^2 = OB^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(2)$$

समकोण $\Delta\ OEC$ में,

$$CE^2 + OE^2 = OC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(3)$$

समीकरण (1), समीकरण (2) और समीकरण (3) को जोड़ने पर,

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 + OF^2 + OD^2 + OE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

अत: $AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2}$ **Proved.**

● **(ii)** समकोण $\Delta\ ODB$ में,

$$OD^2 + BD^2 = OB^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(4)$$

समकोण $\Delta\ ODC$ में,

$$OD^2 + CD^2 = OC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(5)$$

समीकरण (5) को समीकरण (4) में से घटाने पर,

$$BD^2 - CD^2 = OB^2 - OC^2 \quad ...(6)$$

इसी प्रकार, समकोण $\Delta\ OEC$ व $\Delta\ OEA$ में,

$$CE^2 - AE^2 = OC^2 - OA^2 \quad ...(7)$$

और समकोण $\Delta\ OFA$ व $\Delta\ OFB$ में,

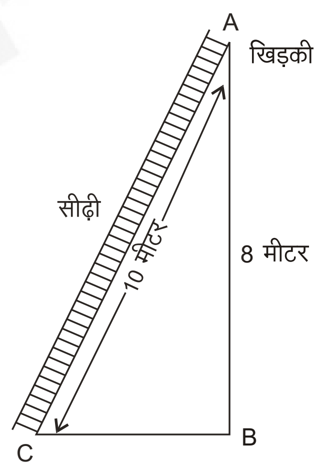
$$AF^2 - BF^2 = OA^2 - OB^2 \quad ...(8)$$

अब समीकरण (6), समीकरण (7) और समीकरण (8) को जोड़ने पर,

$$BD^2 + CE^2 + AF^2 - CD^2 - AE^2 - BF^2 = 0$$

अत: $\mathbf{AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2}$ **Proved.**

प्रश्न 9. 10 मीटर लम्बी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 मीटर की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : भूमि से 8 मीटर ऊँचाई पर एक खिड़की A है जिससे $AB = 8$ मीटर। सीढ़ी AC की लम्बाई 10 मीटर है जिसे खिड़की से लगाने पर उसका निचला सिरा भूमि पर बिन्दु C पर पड़ता है।

ज्ञात करना है : दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी BC

गणना : समकोण त्रिभुज ABC में,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow$ $(8)^2 + (BC)^2 = (10)^2$

$\Rightarrow$ $64 + BC^2 = 100$

$\Rightarrow$ $BC^2 = 100 - 64 = 36$

$\Rightarrow$ $BC^2 = 36$

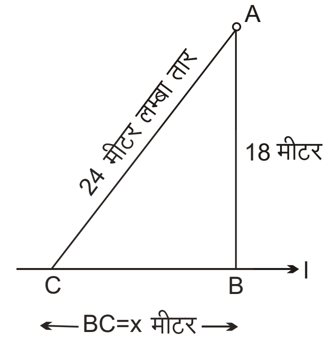
$\Rightarrow$ $BC = \sqrt{36} = 6$ मीटर

अत: **दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी $(BC) = 6$ मीटर।** **उत्तर**

प्रश्न 10. 18 मीटर ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खम्भे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खम्भे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लम्बाई 24 मीटर है।

हल : दिया है : माना क्षैतिज धरातल पर l एक सरल रेखा है जिसके किसी बिन्दु B पर एक खम्भा AB ऊर्ध्वाधर गड़ा है। एक तार जिसकी लम्बाई 24 मीटर है, का एक सिरा खम्भे के शिखर A से बँधा है। तार का दूसरा सिरा धरातल पर गड़े एक खूँटे C से बँधा है। तार तना रहता है।

ज्ञात करना है : खम्भे के सिरे B की खूँटे C से दूरी BC



विश्लेषण : माना खम्भे के आधार B से खूँटे की दूरी $BC = x$ मीटर है।

$\because$ खम्भा भूमि पर सीधा गड़ा है।

$\therefore$ $\angle ABC = 90°$

$\therefore$ $\Delta\ ABC$ समकोणीय है।

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से, $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$\Rightarrow$ $18^2 + x^2 = 24^2$

$\Rightarrow$ $x^2 = 24^2 - 18^2 = 576 - 324 = 252$

$\therefore$ $x = \sqrt{252} = \sqrt{6 \times 6 \times 7}$

$\therefore$ $x = 6\sqrt{7}$

अत: **खम्भे के आधार से खूँटे की दूरी $x = 6\sqrt{7}$ मीटर या 15.87 मीटर।** **उत्तर**

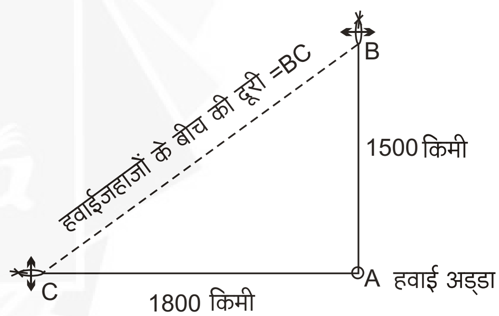
प्रश्न 11. एक हवाईजहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 किमी प्रति घण्टा की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाईजहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 किमी प्रति घण्टा की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घण्टे के बाद दोनों हवाईजहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

हल : पहले हवाईजहाज द्वारा हवाई अड्डे A से उत्तर दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे में चली

$$\text{दूरी} = 1000 \times 1\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $$AB = 1000 \times \frac{3}{2} = 1500 \text{ किमी}$$

दूसरे हवाईजहाज द्वारा हवाई अड्डे A से पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ घण्टे में चली



दूरी $(AC) = 1200 \times 1\frac{1}{2} = 1200 \times \frac{3}{2} = 1800$ किमी

तब, समकोण त्रिभुज BAC में,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= (1500)^2 + (1800)^2$

$= 2250000 + 3240000 = 5490000$

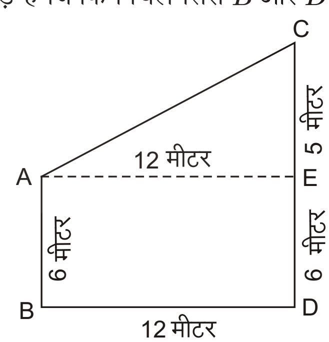
$\therefore$ $BC^2 = 9 \times 10000 \times 61$

$\therefore$ $BC = \sqrt{9 \times 10000 \times 61} = 300\sqrt{61}$ किमी

अत: **$1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दोनों हवाईजहाजों के बीच की दूरी = $300\sqrt{61}$ किमी।** **उत्तर**

प्रश्न 12. दो खम्भे जिनकी ऊँचाइयाँ 6 मीटर और 11 मीटर हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके निचले सिरों के बीच की दूरी 12 मीटर हो तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $AB = 6$ मीटर तथा $CD = 11$ मीटर लम्बाई के दो खम्भे मैदान में खड़े हैं जिनके निचले सिरों B और D के बीच की दूरी $BD = 12$ मीटर है।



ज्ञात करना है : ऊपरी सिरों के बीच की दूरी AC

रचना : A से CD पर लम्ब AE खींचा।

गणना : $AB = 6$ मीटर, $CD = 11$ मीटर, $BC = 12$ मीटर

$\therefore$ $AE = 12$ मीटर तथा $ED = AB = 6$ मीटर

$\because$ $CD = 11$ मीटर

$\Rightarrow$ $CE + ED = 11$ मीटर

$\Rightarrow$ $CE + 6 = 11$ मीटर ($\because$ $ED = 6$ मीटर)

$\Rightarrow$ $CE = 11 - 6 = 5$ मीटर

समकोण $\Delta\ AEC$ में,

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= (12)^2 + (5)^2$$
$$= 144 + 25$$

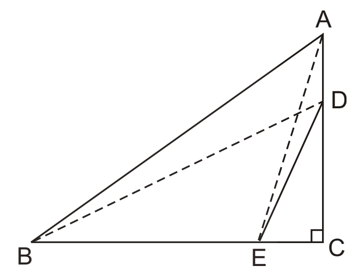
$\therefore$ $AC^2 = 169$

$\Rightarrow$ $AC = \sqrt{169} = 13$ मीटर

अत: **दोनों ऊपरी सिरों के बीच की दूरी $AC = 13$ मीटर।** **उत्तर**

प्रश्न 13. एक $\Delta\ ABC$ जिसका $\angle C$ समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमश: बिन्दु D और E पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

हल : दिया है : समकोण त्रिभुज ACB जिसमें $\angle C$ समकोण है। बिन्दु D और E क्रमश: भुजाओं CA व CB पर स्थित हैं।



सिद्ध करना है : $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

उपपत्ति : समकोण त्रिभुज ACB में,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(1)$$

और समकोण त्रिभुज DCE में,

$$CD^2 + CE^2 = DE^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$AB^2 + DE^2 = AC^2 + BC^2 + CD^2 + CE^2 \quad ...(3)$$

समकोण त्रिभुज DCB में, $BD^2 = BC^2 + CD^2$ ...(4)

समकोण त्रिभुज ACE में, $AE^2 = AC^2 + CE^2$ ...(5)

समीकरण (4) व (5) को जोड़ने पर,

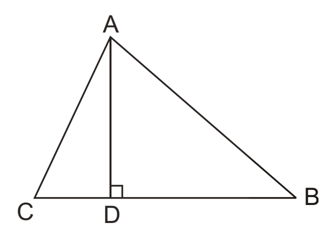
$$AE^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2 + CE^2 + CD^2 \quad ...(6)$$

समीकरण (3) व (6) से

$$\boldsymbol{AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2}$$ **Proved.**

प्रश्न 14. किसी $\Delta\ ABC$ के शीर्ष A से भुजा BC पर डाला गया लम्ब BC को बिन्दु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $DB = 3\ CD$ है। सिद्ध कीजिए कि $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2$ है।

हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ में आधार BC पर शीर्ष A से AD लम्ब इस प्रकार डाला गया है कि $BD = 3CD$



सिद्ध करना है : $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2$

उपपत्ति : समकोण त्रिभुज ADB में,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर,

$$2\ AB^2 = 2\ AD^2 + 2\ BD^2$$

$\Rightarrow$ $2AB^2 = 2\ [AC^2 - CD^2] + 2\ (3\ CD)^2$

($\because$ समकोण $\Delta\ ADC$ में, $AC^2 = CD^2 + AD^2$
$\Rightarrow$ $AD^2 = AC^2 - CD^2$; $BD = 3\ CD$)

$\Rightarrow$ $2\ AB^2 = 2\ AC^2 - 2\ CD^2 + 18\ CD^2$

$\Rightarrow$ $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + 16\ CD^2$

$\Rightarrow$ $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + (4\ CD)^2 = 2\ AC^2 + (CD + 3\ CD)^2$

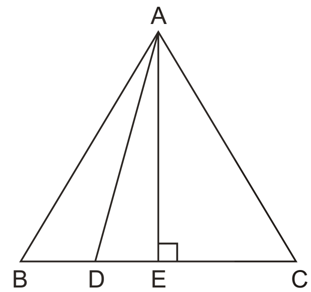
$\Rightarrow$ $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + (CD + BD)^2$ ($\because$ $3\ CD = BD$)

$\therefore$ $2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2$ ($\because$ $BC = CD + BD$)

अत: $\boldsymbol{2\ AB^2 = 2\ AC^2 + BC^2}$ **Proved.**

प्रश्न 15. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9\,AD^2 = 7\,AB^2$ है।

हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसके आधार BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3}BC$



सिद्ध करना है : $9\,AD^2 = 7\,AB^2$

रचना : A से BC पर AE लम्ब खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ समबाहु $\Delta\ ABC$ में,

$$AE \perp BC$$

$$\therefore \quad BE = CE = \frac{1}{2}BC$$

($\because$ समबाहु त्रिभुज में शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उस भुजा को समद्विभाजित करता है।)

$$\therefore \quad BE = \frac{1}{2}AB \qquad (\because BC = AB) \quad ...(1)$$

समकोण त्रिभुज AEB में,

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AE^2 \qquad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = AE^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 = AE^2 \qquad ...(2)$$

समकोण त्रिभुज AED में,

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \quad AE^2 = AD^2 - DE^2 \qquad ...(3)$$

$\because$ बिन्दु D पर BC समत्रिभाजित होता है।

$$BD = \frac{1}{3}BC \qquad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \quad BD = \frac{1}{3}AB \qquad (\because BC = AB) \quad ...(4)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$$BE - BD = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB$$

$$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{6}AB \qquad ...(5)$$

समीकरण (2) व समीकरण (3) से,

$$\frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - DE^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{6}AB\right)^2 \qquad [\text{समीकरण (5) से}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{36}AB^2 = AD^2$$

दोनों पक्षों में लघुत्तम समापवर्त्य 36 से गुणा करने पर,

$$36\times\left(\frac{3}{4}AB^2\right)+36\times\left(\frac{1}{36}AB^2\right)=36\,AD^2$$

$\Rightarrow \quad 27\,AB^2+AB^2=36\,AD^2$

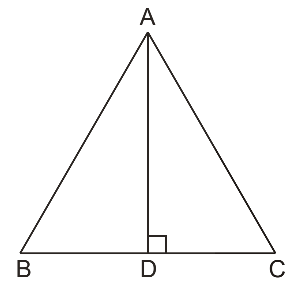
$\Rightarrow \quad 28\,AB^2=36\,AD^2$

$\Rightarrow \quad 7\,AB^2=9\,AD^2$ (4 सार्वनिष्ठ है)

अत: $\boldsymbol{9\,AD^2=7\,AB^2}$ **Proved.**

प्रश्न 16. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

हल : दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी एक भुजा AB है। शीर्ष A से आधार BC तक शीर्ष लम्ब AD खींचा गया है।



सिद्ध करना है : भुजा$^2\times 3=$ शीर्ष लम्ब$^2\times 4$

अर्थात $3AB^2=4AD^2$

उपपत्ति : माना $AB=2a \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{2}AB$

$\because$ $\Delta\,ABC$ समबाहु है,

$\therefore$ $AB=BC=CA \quad\Rightarrow\quad BC=2a$

$\because$ शीर्ष A से BC पर AD लम्ब है।

$\therefore$ समकोण $\Delta\,ADB$ तथा $\Delta\,ADC$ में,

$AB=AC$ (समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ हैं।)

$\angle\,ADB=\angle ADC$ (प्रत्येक 90°)

$AD=AD$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\therefore$ $\Delta\,ABD\sim\Delta\,ACD$ (SAS समरूपता से)

$\therefore$ $BD=CD$ परन्तु $BC=BD+CD=2a \quad\Rightarrow\quad BD=a$

तब, समकोण $\Delta\,ADB$ में, $AB^2=BD^2+AD^2$

$\Rightarrow \quad (2a)^2=(a)^2+AD^2$

$\Rightarrow \quad AD^2=4a^2-a^2=3a^2$

$\Rightarrow \quad AD^2=3\times(a)^2$

$\Rightarrow \quad AD^2=3\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \qquad \left(\because\ a=\frac{1}{2}AB\right)$

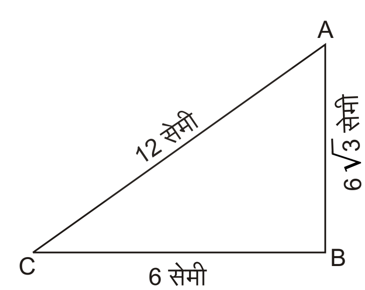
$\therefore \quad AD^2=\frac{3AB^2}{4}$

अत: $\boldsymbol{3\,AB^2=4\,AD^2}$ अथवा **भुजा**$^2\times 3=$ **शीर्षलम्ब**$^2\times 4$ **Proved.**

प्रश्न 17. सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए : $\Delta\,ABC$ में, $AB=6\sqrt{3}$ सेमी, $AC=12$ सेमी और $BC=6$ सेमी है। कोण B है :

(a) 120° **(b)** 60° **(c)** 90° **(d)** 45°.

हल : $\Delta\,ABC$ में, $AB=6\sqrt{3}$ सेमी, $AC=12$ सेमी और $BC=6$ सेमी



$\because$ $AB=6\sqrt{3}$ सेमी, $\therefore$ $AB^2=(6\sqrt{3})^2=36\times 3=108$

और $BC=6$ सेमी $\therefore$ $BC^2=(6)^2=36$

तथा $AC=12$ सेमी $\therefore$ $AC^2=(12)^2=144$

तब, $\because$ $AB^2+BC^2=108+36=144$ और $AC^2=144$

$\therefore$ $AB^2+BC^2=AC^2$

$\therefore$ त्रिभुज ABC समकोणीय है जिसमें कर्ण AC है

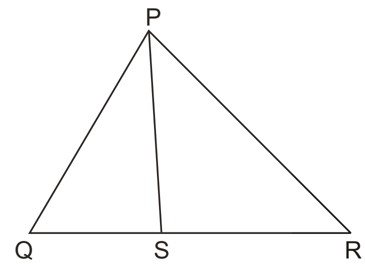
$\therefore$ $\angle\,B$ समकोण है $\Rightarrow$ $\angle\,B=90°$

अत: **विकल्प (c) सही है।** उत्तर

प्रश्नावली 6.6 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1. दी गई आकृति में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।

हल : दिया है : $\Delta\, PQR$ में PS कोण QPR का समद्विभाजक है।



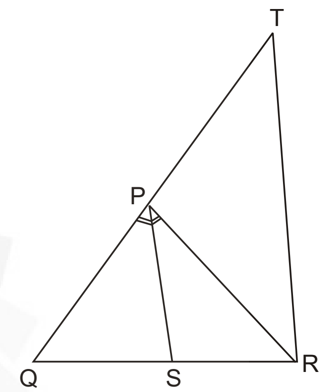
सिद्ध करना है : $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$

रचना : बिन्दु R से रेखा $RT \parallel PS$ खींची जो बढ़ाई गई QP को T पर प्रतिच्छेद करे।

उपपत्ति : $\because TR \parallel PS$ और PR तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle SPR = \angle PRT$ ...(1)

(एकान्तर कोण-युग्म है।)



पुन: $\because TR \parallel PS$ और QT तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle QPS = \angle PTR$ ...(2)

(संगत कोण-युग्म है।)

परन्तु PS, $\angle QPR$ का समद्विभाजक है।

$\therefore$ $\angle QPS = \angle SPR$ ...(3)

तब, समीकरण (1) (2) व (3) से,

$\angle PTR = \angle PRT$

$\therefore$ $\Delta\, PTR$ की भुजा $PT = PR$

($\because$ समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।) ...(4)

अब, $\because \Delta\, QTR$ में, $PS \parallel TR$

$\therefore$ $\frac{PQ}{PT} = \frac{QS}{SR}$ (आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

परन्तु समीकरण (4) से,

$PT = PR$

अत: $\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{SR}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}}$ **Proved.**

प्रश्न 2. दी गई आकृति में D, $\Delta\, ABC$ के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए कि :

(i) $DM^2 = DN \times MC$

(ii) $DN^2 = DM \times AN$

हल : दिया है : समकोण $\Delta\, ABC$ में $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ तथा $DN \perp AB$

सिद्ध करना है : (i) $DM^2 = DN \times MC$

(ii) $DN^2 = DM \times AN$

उपपत्ति : $\because$ समकोण $\Delta\, ABC$ में $BD \perp AC$ (दिया है)

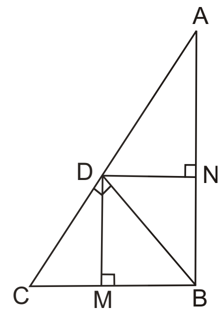
$\therefore$ $\Delta\, BDC \sim \Delta\, ABC$ और $\Delta\, ADB \sim \Delta\, ABC$

$\therefore$ जिससे $\Delta\, BDC \sim \Delta\, ADB$

तथा $\Delta\, BDC$ और $\Delta\, ADB$ समकोणीय हैं।

● **(i)** $\because$ समकोण $\Delta\, BDC$ में, $DM \perp BC$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta\, DMC \sim \Delta\, BMD$



$\therefore$ $\dfrac{MC}{DM} = \dfrac{DM}{BM} \Rightarrow DM^2 = BM \times MC$ ...(1)

$\because$ चतुर्भुज $BMDN$ में,

$\angle B = 90°$, $\angle M = 90°$ तथा $\angle N = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $BMDN$ एक आयत है।

$\therefore$ $BM = DN$ ...(2)

तब, समीकरण (1) व (2) से,

$$\boldsymbol{DM^2 = DN \times MC}$$ **Proved.**

● **(ii)** $\because$ समकोण $\Delta\, ADB$ में, $DN \perp AB$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta\, AND$ और $\Delta\, DNB$ में,

$\dfrac{DN}{BN} = \dfrac{AN}{DN} \Rightarrow DN^2 = BN \times AN$ ...(3)

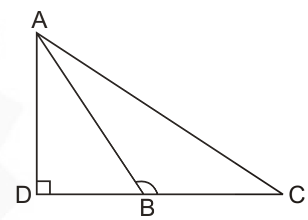
परन्तु चतुर्भुज $BMDN$ में, $\angle B = 90°$, $\angle M = 90°$ तथा $\angle N = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $BMDN$ एक आयत है।

$\therefore$ $BN = DM$ ...(4)

तब, समीकरण (3) व (4) से, $\boldsymbol{DN^2 = DM \times AN}$ **Proved.**

प्रश्न 3. दी गई आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90°$ तथा $AD \perp CB$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है।



हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ में, $\angle ABC > 90°$ तथा $AD \perp CB$ है।

सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

उपपत्ति : समकोण $\Delta\, ADB$ में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से) ...(1)

पुन: समकोण $\Delta\, ADC$ में,

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

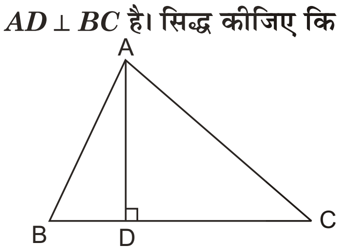
$= AD^2 + (BD + BC)^2$ ($\because DC = BD + BC$)

$= AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BC.BD$ [$(BD + BC)^2$ के विस्तार से]

$= AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ [समीकरण (1) से]

अत: $\boldsymbol{AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD}$ **Proved.**

प्रश्न 4. दी गई आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC < 90°$ है तथा $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ है।



हल : दिया है : $\angle B < 90°$ और $AD \perp BC$

सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

उपपत्ति : $\because$ $AD \perp BC$

$\therefore$ $\Delta\, ABD$ तथा $\Delta\, ACD$ समकोणीय त्रिभुज हैं।

तब, समकोण त्रिभुज ADB में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से) ...(1)

और समकोण त्रिभुज ADC में,

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से) ...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$AC^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2$

$= (DC + BD)(DC - BD)$

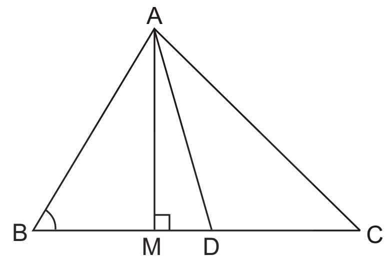
$= BC(DC - BD)$ ($\because DC + BD = BC$)

$= BC(BC - BD - BD)$ ($\because DC = BC - BD$)

$= BC(BC - 2BD)$

$\Rightarrow$ $AC^2 - AB^2 = BC^2 - 2BC \times BD$

अत: $\boldsymbol{AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD}$ **Proved.**



प्रश्न 5. दी गई आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा $AM \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि :

(i) $$AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

(ii) $$AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

(iii) $$AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

हल : दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें D, भुजा BC का मध्य-बिन्दु है अर्थात AD माध्यिका है। AM, BC पर लम्ब खींचा गया है और $AC > AB$

सिद्ध करना है :

(i) $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

उपपत्ति : (i) समकोण $\Delta\ AMD$ में,

$$AM^2 + DM^2 = AD^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)...(1)}$$

समकोण $\Delta\ AMC$ में,

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= (AD^2 - DM^2) + MC^2 \quad [\because \text{ समीकरण (1) से, } AM^2 = AD^2 - DM^2]$$
$$= AD^2 - DM^2 + (DM + DC)^2 \quad [\because MC = DM + DC]$$
$$= AD^2 - DM^2 + DM^2 + 2\,DM\,.\,DC + DC^2$$
$$[\because (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$$
$$= AD^2 + 2DM.DC + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2$$
$$\left[\because D, BC \text{ का मध्य-बिन्दु है } \therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC\right]$$
$$= AD^2 + (2\,DC).DM + \frac{1}{4}BC^2 \quad [\because 2DC = BC]$$

अत: $$\boldsymbol{AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} \quad ...(2)$$

Proved.

● **(ii)** अब समकोण $\Delta\ AMB$ में,

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= (AD^2 - DM^2) + BM^2 \quad \text{(समीकरण 1 से)}$$
$$= AD^2 - DM^2 + (BD - DM)^2 \quad [\because BM = BD - DM]$$
$$= AD^2 - DM^2 + BD^2 - 2BD.DM + DM^2$$
$$[\because (a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2]$$
$$= AD^2 - 2\,BD.DM + BD^2$$
$$= AD^2 - (2\,BD)\,.\,DM + BD^2$$
$$= AD^2 - BC.DM + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 \quad [\because D, BC \text{ का मध्य-बिन्दु है }]$$

$$AB^2 = AD^2 - BC \,.\, DM + \frac{1}{4} BC^2 \qquad \therefore BD = \frac{1}{2} BC \;...(3)$$

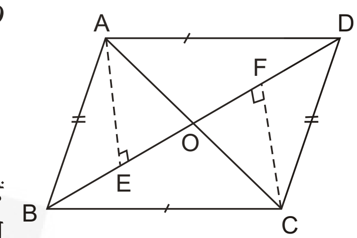
अत: $$\boldsymbol{AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$ **Proved.**

- **(iii)** खण्ड (i) व खण्ड (ii) के परिणामों का योग करने पर,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} BC^2$$
$$= 2\,AD^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

अत: $$\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = 2\,AD^2 + \frac{1}{2} BC^2}$$ **Proved.**

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।



हल : दिया है : $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

रचना : A से BD पर AE तथा C से BD पर CF लम्ब खींचा।

उपपत्ति : $\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है और AC तथा BD उसके विकर्ण हैं जो परस्पर O पर काटते हैं। तथा हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ $AO = OC$ तथा $OB = OD$ तथा $AB = CD$

तब, समकोण $\Delta\, AEB$ में,

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= AE^2 + (BO - OE)^2 \qquad (\because\; BE = BO - OE)$$
$$= AE^2 + \left(\frac{1}{2}BD - OE\right)^2 \qquad \left[\because\; OB = OD = \frac{1}{2}BD\right]$$
$$= AE^2 + \frac{1}{4}BD^2 + OE^2 - 2 \times \frac{1}{2} BD.OE$$
$$= \frac{1}{4}BD^2 + (AE^2 + OE^2) - BD.OE$$

$(\because \Delta\; AEO$ समकोणीय है $\therefore AO^2 = AE^2 + OE^2)$

$$= \frac{1}{4}BD^2 + (AO^2) - BD.OE \qquad \left[\because\; AO = OC = \frac{1}{2}AC\right]$$
$$= \frac{1}{4}BD^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 - BD.OE$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 - BD.OE \qquad ...(1)$$

पुन: समकोण त्रिभुज AED में,

$$DA^2 = AE^2 + DE^2$$
$$= AE^2 + (DO + OE)^2 \qquad [\because\; DE = DO + OE]$$
$$= AE^2 + \left(\frac{1}{2}BD + OE\right)^2 \qquad \left[\because\; OB = OD = \frac{1}{2}BD\right]$$
$$= AE^2 + \frac{1}{4}BD^2 + OE^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} BD \cdot OE$$

$$= (AE^2 + OE^2) + \frac{1}{4}BD^2 + BD.OE$$

$$= AO^2 + \frac{1}{4}BD^2 + BD.OE$$

($\because \Delta\, AEO$ समकोणीय है $\therefore\ AO^2 = AE^2 + OE^2$)

$$= \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \frac{1}{4}BD^2 + BD.OE \qquad \left(\because\ AO = OC = \frac{1}{2}AC\right)$$

$$\Rightarrow \quad DA^2 = \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + BD.OE \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$AB^2 + DA^2 = \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}AC^2$$

$$= \frac{1}{2}BD^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

$$= \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2)$$

$$\therefore \quad AB^2 + DA^2 = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2) \qquad ...(3)$$

समीकरण (3) में, $AB = CD$ और $DA = BC$ रखने पर,

$$CD^2 + BC^2 = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2) \qquad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

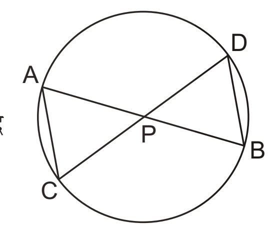
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2) + \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2)$$

अत: $\boldsymbol{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2}$ **Proved.**

प्रश्न 7. दी गई आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta\, APC \sim \Delta\, DPB$

(ii) $AP.PB = CP.DP$



हल : दिया है : एक वृत्त की AB व CD दो जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।

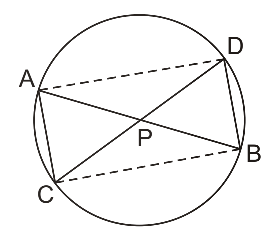
सिद्ध करना है :

(i) $\Delta\, APC \sim \Delta\, DPB$

(ii) $AP.PB = CP.DP$

रचना : रेखाखण्ड AD व CB खींचे।

उपपत्ति :



● **(i)** $\because$ जीवा AB और CD परस्पर P पर काटती हैं।

$\therefore$ शीर्षाभिमुख कोण $\angle APC = \angle BPD$

$\angle CAP = \angle BDP$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।)

और $\angle ACP = \angle DBP$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।)

अब, $\Delta\, APC$ और $\Delta\, BPD$ में,

$$\angle APC = \angle BPD$$
$$\angle CAP = \angle BDP$$
$$\angle ACP = \angle DBP$$

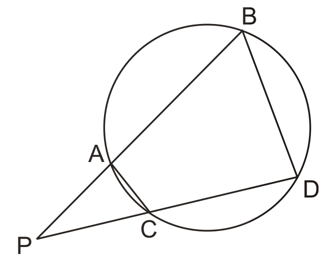
$\therefore$ दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटी AAA से,

$$\boldsymbol{\Delta\, APC \sim \Delta\, DPB}$$ **Proved.**

● **(ii)** ΔAPC और ΔDPB में,

$$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{PB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{AP.PB = CP.DP}$$ **Proved.**

प्रश्न 8. दी गई आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि



(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ **(ii) $PA.PB = PC.PD$**

हल : दिया है : AB और CD एक वृत्त की दो जीवाएँ हैं जो बढ़ाने पर एक-दूसरे को वृत्त के बाहर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$

(ii) $PA.PB = PC.PD$

रचना : रेखाखण्ड AC व BD को पूरा किया।

उपपत्ति : (i) $\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है और $\angle PAC$ उसका बहिष्कोण है।

$\therefore$ $$\angle PAC = \angle BDC$$

या $$\angle PAC = \angle BDP \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार, $\angle PCA$ चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ का बहिष्कोण है।

$\therefore$ $$\angle PCA = \angle ABD$$

या $$\angle PCA = \angle PBD \qquad ...(2)$$

अब ΔPAC और ΔPBD में,

$$\angle CPA = \angle BPD$$ (दोनों त्रिभुजों का उभयनिष्ठ कोण है।)

$$\angle PAC = \angle BDP$$ [समीकरण (1) से]

$$\angle PCA = \angle PBD$$ [समीकरण (2) से]

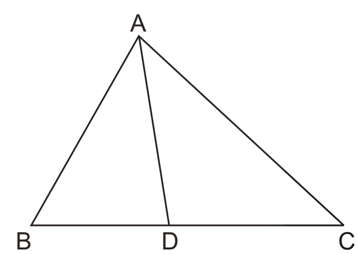
$\therefore$ दो त्रिभुजों की समरूपता के गुणधर्म AAA से,

$$\boldsymbol{\Delta PAC \sim \Delta PDB}$$ **Proved.**

● **(ii)** $\because \Delta PAC \sim \Delta PDB$

$\therefore$ $$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{PA.PB = PC.PD}$$ **Proved.**

प्रश्न 9. दी गई आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\boldsymbol{\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ की भुजा BC पर एक बिन्दु D ऐसा है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

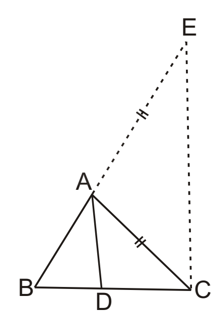
सिद्ध करना है : AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

रचना : BA को उसकी सीध में E तक इतना बढ़ाया कि $AE = AC$ हो। रेखाखण्ड CE खींचा।

उपपत्ति : $\because$ दिया है, $$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$\because$ $AC = AE \Rightarrow$ $$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

तब, $\Delta\ BEC$ में, $$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$



$\therefore$ अनुपातिकता के मूलभूत प्रमेय के विलोम से, $AD \parallel EC$

$\because$ $AD \parallel EC$ और BE तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $$\angle BAD = \angle AEC \qquad ...(1)$$

$\because$ $AD \parallel EC$ और AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle CAD = \angle ACE$ (एकान्तर कोण) ...(2)

परन्तु ΔACE में रचना से, $AC = AE$

$\therefore$ $\angle AEC = \angle ACE$ ($\because$ समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।) ...(3)

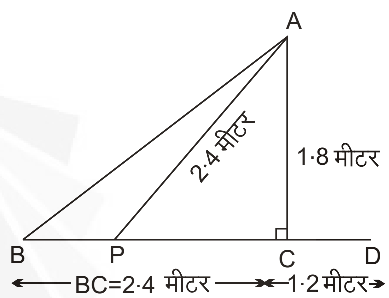
तब समीकरण (1), (2) व (3) से, $\angle BAD = \angle CAD$

परन्तु $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$

अत: **$AD, \angle BAC$ का समद्विभाजक है।** **Proved.**

प्रश्न 10. नाज़िमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है। उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1. 8 मीटर ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी की सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाज़िमा से दूरी 3. 6 मीटर है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी की सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दूरी 2. 4 मीटर है। यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है? यदि वह डोरी को 5 सेमी/सेकण्ड की दर से अन्दर खींचे तो 12 सेकण्ड के बाद नाज़िमा की काँटे से क्षैतिज दूरी कितनी होगी?

हल : चित्र में, नाजिमा की मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा A पानी की सतह से 1.8 मीटर ऊँचाई पर है जिससे $AC = 1.8$ मीटर है। डोरी AB के सिरे B पर एक काँटा है जिसकी बिन्दु C से दूरी $BC = 2.4$ मीटर है और नाजिमा से B की दूरी $BD = 3.6$ मीटर है।



$\therefore$ $CD = BD - BC$

$= 3.6 - 2.4 = 1.2$ मीटर

माना डोरी की लम्बाई AB है।

तब समकोण ΔACB में,

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow$ $$AB^2 = (2.4)^2 + (1.8)^2$$

$$= 5.76 + 3.24 = 9.0$$

$\Rightarrow$ $$AB = \sqrt{9.00} = 3 \text{ मीटर}$$

अत: **डोरी की लम्बाई $AB = 3$ मीटर।** **उत्तर**

जब वह डोरी को 5 सेमी प्रति सेकण्ड की दर से अन्दर खींच रही है तो 12 सेकण्ड में खींची

दूरी $= 5 \times 12 = 60$ सेमी $= 0.6$ मीटर

तब पानी के बाहर डोरी की लम्बाई $AP = 3.0 - 0.6 = 2.4$ मीटर

तब काँटे से छड़ के सिरे A के ठीक नीचे बिन्दु C की क्षैतिज दूरी PC होगी

$\therefore$ समकोण ΔACP में, $PC^2 + AC^2 = AP^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\therefore$ $PC^2 + (1.8)^2 = (2.4)^2$

$\therefore$ $PC^2 + 3.24 = 5.76$

$\therefore$ $PC^2 = 5.76 - 3.24 = 2.52$

$\therefore$ $PC = \sqrt{2.52} = 1.587$ मीटर

$= 1.59$ मीटर (लगभग)

$\therefore$ काँटे से नाज़िमा की क्षैतिज दूरी $PD = PC + CD = (1.59) + (1.2)$ सेमी $= 2.79$ मीटर

अत: **काँटे से नाज़िमा की क्षैतिज दूरी = 2. 79 मीटर।** **उत्तर**