माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An Easy Textbook

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

NCERT ZONE

अध्याय 7

निर्देशांक ज्यामिति

(Coordinate Geometry)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1. बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए :

(i) (2, 3), (4, 1) **(ii) (– 5, 7), (– 1, 3)** **(iii) $(a, b), (-a, -b)$**

हल :(i) दिए हुए बिन्दु : (2, 3) व (4, 1)

यहाँ $x_1 = 2,\quad y_1 = 3,\quad x_2 = 4,\quad y_2 = 1$

$\therefore$ बिन्दुओं (2, 3) व (4, 1) के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{2\times 4} = 2\sqrt{2}$$

अतः **दिए हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी $= 2\sqrt{2}$ मात्रक।** **उत्तर**

- **(ii)** दिए हुए बिन्दु : (– 5, 7) व (– 1, 3)

यहाँ $x_1 = -5,\quad y_1 = 7,\quad x_2 = -1,\quad y_2 = 3$

$\therefore$ बिन्दुओं (– 5, 7) व (– 1, 3) के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{[-1-(-5)]^2 + (3-7)^2}$$
$$= \sqrt{(-1+5)^2 + (3-7)^2}$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{2\times 16} = 4\sqrt{2}$$

अतः **दिए हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी $= 4\sqrt{2}$ मात्रक।** **उत्तर**

- **(iii)** दिए हुए बिन्दु : $(a,\ b)$ व $(-a,\ -b)$

यहाँ $x_1 = a,\quad y_1 = b\quad x_2 = -a,\quad y_2 = -b$

$\therefore$ बिन्दुओं $(a,\ b)$ और $(-a,\ -b)$ के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(-a-a)^2 + (-b-b)^2}$$
$$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$
$$= \sqrt{4(a^2 + b^2)} \quad = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

अतः **दिए हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी $= 2\sqrt{a^2 + b^2}$ मात्रक।** **उत्तर**

प्रश्न 2. बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप NCERT पाठ्यपुस्तक के अनुच्छेद 7·2 में दिए दोनों शहरों A व B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

हल : दिए हुए बिन्दु : (0, 0) व (36, 15)

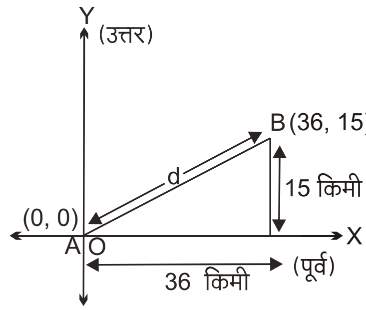
यहाँ $x_1 = 0,\quad y_1 = 0\quad x_2 = 36,\quad y_2 = 15$

$\therefore$ बिन्दुओं (0, 0) व (36, 15) के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(36-0)^2 + (15-0)^2} = \sqrt{1296 + 225}$$

$$= \sqrt{1521} = 39$$

अत: **दिए हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी = 39 मात्रक।** **उत्तर**



● हाँ, हम ज्ञात कर सकते हैं :

अनुच्छेद 7.2 में दिए गए शहरों के, कार्तीय निर्देशांक पद्धति के सापेक्ष निर्देशांक $A = (0,\ 0)$ तथा $B = (36,\ 15)$

$\therefore$ शहरों A से B के बीच की दूरी $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(36-0)^2 + (15-0)^2}$$

$$= \sqrt{1296 + 225} = \sqrt{1521}$$

= **39 किमी।** **उत्तर**

प्रश्न 3. निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1, 5) (2, 3) और (– 2, – 11) संरेखी हैं?

हल : माना दिए हुए बिन्दु $P = (1,\ 5)$, $Q = (2,\ 3)$ तथा $R = (-2,\ -11)$ हैं।

यहाँ $x_1 = 1,\quad y_1 = 5\quad x_2 = 2,\quad y_2 = 3$

$x_3 = -2,\quad y_3 = -11$

तब, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (दूरी सूत्र से)

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$\therefore$ $PQ = \sqrt{5}$ मात्रक = 2.23 मात्रक

$QR = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (-11-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2} = \sqrt{16+196} = \sqrt{212}$$

$\therefore$ $QR = \sqrt{212} = 14.56$ मात्रक

$RP = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$

$$= \sqrt{[1-(-2)]^2 + [5-(-11)]^2}$$

$$= \sqrt{(1+2)^2 + (5+11)^2} = \sqrt{(3)^2 + (16)^2}$$

$RP = \sqrt{9 + 256} = \sqrt{265} = 16.27$ मात्रक

अब, बिन्दुओं P, Q तथा R के संरेख होने के लिए $PQ + QR = RP$ होना चाहिए।

$\therefore$ $PQ + QR = 2.23 + 14.56 = 16.79 \neq RP$

$\because$ $PQ + QR \neq RP$

अत: **बिन्दु संरेख नहीं हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 4. जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (5, – 2), (6, 4) और (7, – 2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : माना दिए हुए बिन्दु $P = (5,\ -2)$, $Q = (6,\ 4)$ और $R = (7,\ -2)$ हैं, जो $\Delta\, PQR$ के शीर्ष हैं :

यहाँ $x_1 = 5,\quad y_1 = -2\quad x_2 = 6,\quad y_2 = 4$

$x_3 = 7,\quad y_3 = -2$

तब, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)]^2}$ (दूरी सूत्र से)

$$= \sqrt{(6-5)^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{(1)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{37} \text{ मात्रक}$$

$$QR = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2)} = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \text{ मात्रक}$$

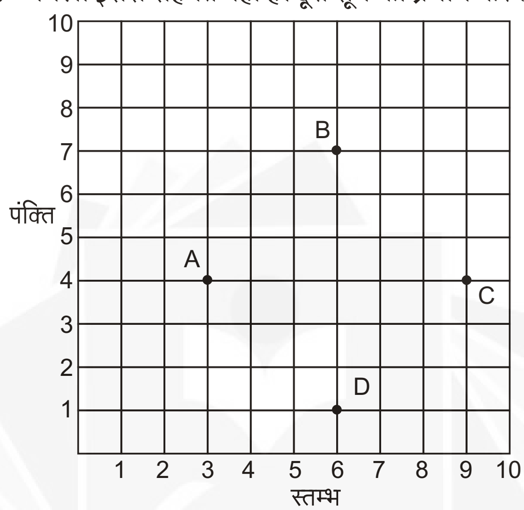
$\because$ ΔPQR में, $PQ = QR$

अर्थात ΔPQR दो भुजाएँ समान हैं।

$\Rightarrow$ ΔPQR समद्विबाहु है।

अतः **दिए गए बिन्दु एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।** उत्तर

प्रश्न 5. किसी कक्षा में, चार मित्र बिन्दुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसा कि निम्न आकृति में दर्शाया गया है। चम्पा और चमेली कक्षा के अन्दर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने के बाद, चम्पा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि $ABCD$ एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है?



हल : दी गई आकृति से बिन्दुओं A, B, C व D के निर्देशांक क्रमशः (3, 4), (6, 7), (9, 4) तथा (6, 1) हैं।

यहाँ $x_1 = 3, \quad y_1 = 4$

$x_2 = 6, \quad y_2 = 7$

$x_3 = 9, \quad y_3 = 4$

$x_4 = 6, \quad y_4 = 1$

तब दूरी सूत्र से, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$= \sqrt{(6-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{(6-9)^2 + (1-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$DA = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

विकर्ण $AC = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(9-3)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6$ मात्रक

विकर्ण $BD = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} = \sqrt{(6-6)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-6)^2} = 6$ मात्रक

$\because$ चतुर्भुज $ABCD$ की चारों भुजाएँ AB, BC, CD, DA परस्पर बराबर हैं और चतुर्भुज के विकर्ण AC व BD भी बराबर हैं।

अतः **चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है। चम्पा सही है।** उत्तर

प्रश्न 6. निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए :

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)

(ii) (– 3, 5), (3, 1), (0, 3), (– 1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

हल : (i) माना $P = (-1, -2), Q = (1, 0), R = (-1, 2)$ तथा $S = (-3, 0)$

यहाँ $x_1 = -1, \quad y_1 = -2$

$x_2 = 1, \quad y_2 = 0$

$x_3 = -1, \quad y_3 = 2$

$x_4 = -3, \quad y_4 = 0$

तब दूरी सूत्र से, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [0-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$QR = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$RS = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$SP = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} = \sqrt{[-1-(-3)]^2 + [-2-0]^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$PR = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{[-1-(-1)]^2 + [2-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(-1+1)^2 + (4)^2} = \sqrt{0 + (4)^2} = 4$ मात्रक

$\because \quad PQ^2 + QR^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8 = 16 = PR^2$

$\therefore \quad \angle Q$ समकोण है अर्थात दो संलग्न भुजाओं के मध्य कोण 90° है।

और चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हैं।

अत: **उक्त बिन्दुओं से बनने वाला चतुर्भुज एक वर्ग है।** उत्तर

● **(ii)** माना $P = (-3, 5), Q = (3, 1), R = (0, 3)$ तथा $S = (-1, -4)$

यहाँ $x_1 = -3, \quad y_1 = 5$

$x_2 = 3, \quad y_2 = 1$

$x_3 = 0, \quad y_3 = 3$

$x_4 = -1, \quad y_4 = -4$

तब दूरी सूत्र से, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{[3+3]^2 + (-4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (16)} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ मात्रक

$QR = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ मात्रक

$RP = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ मात्रक

$\because \quad PQ = 2\sqrt{13}$ और $QR + RP = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13} = PQ$

$\therefore$ बिन्दु P, Q, R एक रेखा में हैं

अत: **बिन्दुओं P, Q, R व S से चतुर्भुज नहीं बनेगा।** उत्तर

● **(iii)** माना $P = (4, 5)$, $Q = (7, 6)$, $R = (4, 3)$ तथा $S = (1, 2)$

यहाँ $x_1 = 4$, $y_1 = 5$

$x_2 = 7$, $y_2 = 6$

$x_3 = 4$, $y_3 = 3$

$x_4 = 1$, $y_4 = 2$

तब दूरी सूत्र से, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(7-4)^2 + (6-5)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ मात्रक

$QR = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(4-7)^2 + (3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ मात्रक

$RS = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$

$= \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$SP = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$

$= \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ मात्रक

$QS = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(1-7)^2 + (2-6)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ मात्रक

$\because$ बिन्दुओं P, Q, R, S से बने चतुर्भुज $PQRS$ में $PQ = RS$ तथा $QR = SP$ अर्थात सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।

अत: **चतुर्भुज $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।** **उत्तर**

प्रश्न 7. X-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2, 9)$ से समदूरस्थ है।

हल : माना X-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $P(h, 0)$ हैं (क्योंकि X-अक्ष के लिए प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक शून्य होता है)।

माना $A \equiv (2, -5)$ तथा $B \equiv (-2, 9)$

तब, $P(h, 0)$ और $A(2, -5)$ की दूरी $AP = \sqrt{(h-2)^2 + [0-(-5)]^2} = \sqrt{(h-2)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{h^2 - 4h + 4 + 25} = \sqrt{h^2 - 4h + 29}$

और $P(h, 0)$ व $B(-2, 9)$ की दूरी $BP = \sqrt{[h-(-2)]^2 + (0-9)^2} = \sqrt{(h+2)^2 + 81}$

$= \sqrt{h^2 + 4h + 4 + 81} = \sqrt{h^2 + 4h + 85}$

प्रश्न के अनुसार दोनों दूरियाँ समान हैं अर्थात $BP = AP$

$$\therefore \quad \sqrt{h^2 + 4h + 85} = \sqrt{h^2 - 4h + 29}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$h^2 + 4h + 85 = h^2 - 4h + 29$$

$$\Rightarrow \quad 4h + 4h = -85 + 29$$

$$\Rightarrow \quad 8h = -56$$

$$\Rightarrow \quad h = -7$$

अत: **अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $= (h, 0) = (-7, 0)$** **उत्तर**

प्रश्न 8. y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु $P(2, -3)$ और $Q(10, y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल : दिए हुए बिन्दु $P = (2, -3)$ तथा $Q = (10, y)$

यहाँ $x_1 = 2$, $y_1 = -3$

$x_2 = 10$, $y_2 = y$

तब दूरी सूत्र से, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(10-2)^2 + [y-(-3)]^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (y+3)^2}$

परन्तु प्रश्न में दिया है कि दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी $(PQ) = 10$ मात्रक

$\therefore \quad \sqrt{8^2 + (y+3)^2} = 10$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$8^2 + (y+3)^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad (y+3)^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64$

$\Rightarrow \quad (y+3)^2 = 36$

$\Rightarrow \quad (y+3) = \pm 6$

यदि $y + 3 = +6$ तो $y = +6 - 3 = 3$; और

यदि $y + 3 = -6$ तो $y = -6 - 3 = -9$

अत: **y के अभीष्ट मान = $3, -9$** **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि $Q\ (0,\ 1)$ बिन्दुओं $P\ (5,\ -3)$ और $R\ (x,\ 6)$ से समदूरस्थ है तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $Q = (0,\ 1)$, $P = (5,\ -3)$ और $R = (x,\ 6)$

$\because$ Q, P तथा R से समदूरस्थ है।

$\therefore \quad QP = QR$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (6-1)^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{x^2 + (5)^2}$

$(5)^2 + (-4)^2 = x^2 + (5)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 4$

तब, $Q = (0,\ 1), P = (5,\ -3)$ और $R = (\pm 4,\ 6)$

$QR = \sqrt{(\pm 4 - 0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

$PR = \sqrt{(\pm 4 - 5)^2 + [6-(-3)]^2} = \sqrt{(\pm 4 - 5)^2 + (6+3)^2}$

$= \sqrt{(-4-5)^2 + (9)^2}$ या $\sqrt{(4-5)^2 + (9)^2}$

$= \sqrt{(-9)^2 + (9)^2}$ या $\sqrt{(-1)^2 + (9)^2}$

$\therefore \quad = \sqrt{81 + 81}$ या $\sqrt{1 + 81}$

$\therefore \quad = \sqrt{162} = \sqrt{2 \times 81}$ या $\sqrt{82}$

$\therefore \quad PR = 9\sqrt{2}$ या $\sqrt{82}$

अत: **$x = \pm 4$, $QR = \sqrt{41}$ और $PR = 9\sqrt{2}$ अथवा $\sqrt{82}$** **उत्तर**

प्रश्न 10. x और y में एक ऐसा सम्बन्ध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु $(x,\ y)$ बिन्दुओं $(3, 6)$ और $(-3,\ 4)$ से समदूरस्थ हो।

हल : माना बिन्दु $P = (x,\ y)$, $Q = (3,\ 6)$ तथा $R = (-3,\ 4)$

$\because$ बिन्दु $P\ (x,\ y)$ बिन्दुओं $Q\ (3,\ 6)$ व $R\ (-3,\ 4)$ से समदूरस्थ है।

अर्थात $\quad QP = RP$

$\Rightarrow \quad QP^2 = RP^2$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y-6)^2 = [x-(-3)]^2 + (y-4)^2$ (दूरी सूत्र से)

$\therefore \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = (x+3)^2 + (y-4)^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x - 12y + 45 = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25$

$\therefore \quad -6x - 12y = 6x - 8y + 25 - 45$

$\therefore \quad -6x - 12y - 6x + 8y = -20$

$\therefore \quad -12x - 4y = -20$

$\Rightarrow \quad 3x + y = 5$ [(-4) से दोनों पक्षों में भाग देने पर]

अत: **अभीष्ट सम्बन्ध : $3x + y = 5$** **उत्तर**

प्रश्नावली 7.2

प्रश्न 1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल : दिए गए बिन्दु : $(-1, 7)$ और $(4, -3)$

यहाँ $x_1 = -1, \quad y_1 = 7$ तथा अनुपात $m_1 : m_2 = 2 : 3$

$x_2 = 4, \quad y_2 = -3$

माना विभाजक बिन्दु $P(x, y)$ है।

तब विभाजन सूत्र से, $x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ और $y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$\therefore \quad = \dfrac{(2 \times 4) + (3 \times -1)}{2+3}$ $\quad \therefore \quad = \dfrac{(2 \times -3) + (3 \times 7)}{2+3}$

$= \dfrac{8 + (-3)}{5} = \dfrac{8-3}{5} = 1$ $\quad = \dfrac{-6+21}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$

अत: **अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक = $(x, y) = (1, 3)$** उत्तर

प्रश्न 2. बिन्दुओं $(4, -1)$ और $(-2, -3)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

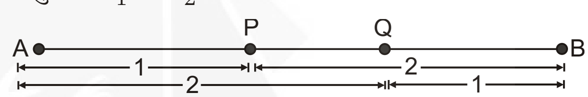
हल : माना $A = (4, -1)$ तथा $B = (-2, -3)$ दिए गए बिन्दु हैं।

माना बिन्दु $P(x, y)$ तथा $Q(x', y')$ AB को समत्रिभाजित करते हैं।

तब, $AP : PB = 1 : 2$ और $AQ : QB = 2 : 1$

यहाँ $x_1 = 4, \quad y_1 = -1$ तथा अनुपात $m_1 : m_2 = 1 : 2$

$x_2 = -2, \quad y_2 = -3$



तब, **बिन्दु P के लिए :**

$x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ तथा $y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$\therefore \quad x = \dfrac{(1 \times -2) + (2 \times 4)}{1+2}$ $\quad \therefore \quad y = \dfrac{(1 \times -3) + (2 \times -1)}{1+2}$

$= \dfrac{-2+8}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ $\quad = \dfrac{-3+(-2)}{3} = -\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ बिन्दु P के निर्देशांक $= (x, y) = \left(2, -\dfrac{5}{3}\right)$

और **बिन्दु Q के लिए :** अनुपात $m_1 : m_2 = 2 : 1$

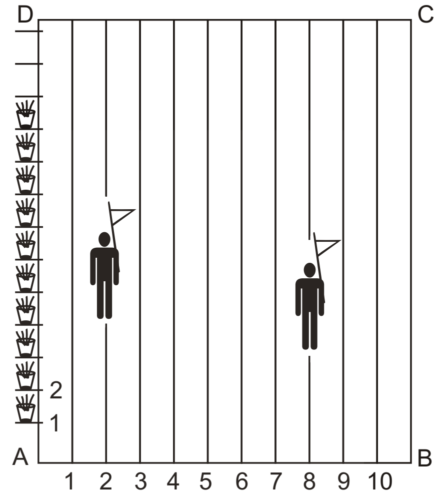
$x' = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ तथा $y' = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$

$\therefore \quad = \dfrac{(2 \times -2) + (1 \times 4)}{2+1}$ $\quad = \dfrac{(2 \times -3) + (1 \times -1)}{2+1}$

$= \dfrac{-4+4}{3} = 0$ $\quad = \dfrac{-6+(-1)}{3} = -\dfrac{7}{3}$

$\therefore$ बिन्दु Q के निर्देशांक $= (x', y') = \left(0, -\dfrac{7}{3}\right)$

अत: **समत्रिभाजक बिन्दु $P\left(2, -\dfrac{5}{3}\right)$ तथा $Q\left(0, -\dfrac{7}{3}\right)$** उत्तर



प्रश्न 3. आपके स्कूल में खेल-कूद क्रिया-कलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान $ABCD$ में, चूने से परस्पर 1 मीटर की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1 मीटर की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झण्डा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झण्डा गाड़ देती है। दोनों झण्डों के बीच की दूरी क्या है? यदि रश्मि को एक नीला झण्डा इन दोनों झण्डों को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झण्डा कहाँ गाड़ना चाहिए?

हल : $\because$ भुजा AD पर परस्पर 1 मीटर की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं।

$\therefore$ $AD = 100$ मीटर

प्रश्नानुसार, निहारिका के झण्डे की स्थिति = दूसरी पंक्ति में AD का $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर दूरी

= दूसरी पंक्ति में 100 का $\frac{1}{4}$ भाग $= 100 \times \frac{1}{4} = 25$ मीटर $= (2,\ 25)$

तथा प्रीत के झण्डे की स्थिति = आठवीं पंक्ति में AD का $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर दूरी

= आठवीं पंक्ति में 100 का $\frac{1}{5}$ भाग $= 100 \times \frac{1}{5} = 20$ मीटर

$= (8,\ 20)$

$\therefore$ झण्डों के बीच की दूरी = बिन्दु $(2,\ 25)$ तथा $(8,\ 20)$ के बीच की दूरी $= \sqrt{(8-2)^2 + (20-25)^2}$

(दूरी सूत्र से)

$= \sqrt{(6)^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$ मीटर

$\because$ रश्मि को इन दोनों झण्डों को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु पर झण्डा गाड़ना है, तब

$(2, 25)$ और $(8, 20)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{25+20}{2}\right)$

$= \left(\frac{10}{2},\ \frac{45}{2}\right) = \left(5,\ \frac{45}{2}\right)$

अत: **रश्मि को पाँचवीं पंक्ति में AD के अनुदिश $\frac{45}{2}$ मीटर दूरी पर झण्डा गाड़ना चाहिए।** **उत्तर**

प्रश्न 4. बिन्दुओं $(-3,\ 10)$ और $(6,\ -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $(-1,\ 6)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल : माना बिन्दुओं $(-3,\ 10)$ और $(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $(-1,\ 6)$, $m_1 :\ m_2$ में विभक्त करता है, तब

यहाँ $x_1 = -3,\quad y_1 = 10$
$x_2 = 6,\quad y_2 = -8$
$x = -1,\quad y = 6$

विभाजन सूत्र से,

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$-1 = \frac{(m_1 \times 6) + (m_2 \times -3)}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad 6 = \frac{(m_1 \times -8) + (m_2 \times 10)}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow \quad 6\,m_1 - 3\,m_2 = -\,m_1 - m_2 \qquad \Rightarrow \quad -\,8\,m_1 + 10\,m_2 = 6\,m_1 + 6\,m_2$

$\Rightarrow \quad 6\,m_1 + m_1 = 3\,m_2 - m_2 \qquad \Rightarrow \quad -\,8\,m_1 - 6\,m_1 = 6\,m_2 - 10\,m_2$

$\Rightarrow \quad 7\,m_1 = 2\,m_2 \qquad \Rightarrow \quad -\,14\,m_1 = -\,4\,m_2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{7} \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$

दोनों ही निर्देशांकों से, $m_1 : m_2 = 2 : 7$

अत: **अभीष्ट अनुपात $= 2 : 7$** **उत्तर**

प्रश्न 5. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A\,(1,\ -5)$ और $B\,(-4,\ 5)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड X-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है बिन्दु $A = (1,\ -5)$ तथा $B = (-4,\ 5)$

यहाँ $x_1 = 1, \quad y_1 = -5$

$x_2 = -4, \quad y_2 = 5$

माना रेखाखण्ड AB X-अक्ष से अनुपात $m_1 : m_2$ में विभाजित होता है।

$\because$ X-अक्ष के लिए $y = 0$ होता है अर्थात X-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है।

$\therefore$ विभाजक बिन्दु $(x,\ 0)$ होगा जिसके लिए

$$0 = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 \times 5) + (m_2 \times -5)}{m_1 + m_2} \qquad \text{(विभाजन सूत्र से)}$$

$\Rightarrow \quad 5\,m_1 - 5\,m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad m_1 : m_2 = 1 : 1$

तब,
$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{(1 \times -4) + (1 \times 1)}{1+1} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

अत: **X-अक्ष से रेखाखण्ड AB बिन्दु $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ पर $1 : 1$ में विभाजित है।** **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि बिन्दु $(1, 2), (4,\ y), (x,\ 6)$ और $(3, 5)$ इसी क्रम में लेने पर, एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हों तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल : माना $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिनमें $A \equiv (1,\ 2)$, $B \equiv (4,\ y)$, $C \equiv (x,\ 6)$ तथा $D \equiv (3,\ 5)$ इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करेंगे।

$\therefore$ AC का मध्य-बिन्दु = बिन्दुओं $(1, 2)$ तथा $(x, 6)$ का

$$\text{मध्य-बिन्दु} = \left[\frac{\text{दोनों बिन्दुओं के भुज का योग}}{2}, \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटि का योग}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{1+x}{2},\ \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2},\ 4\right)$$

BD का मध्य-बिन्दु = बिन्दुओं $(4, y)$ तथा $(3, 5)$ का

$$\text{मध्य-बिन्दु} = \left[\frac{\text{दोनों बिन्दुओं के भुज का योग}}{2}, \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटि का योग}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{4+3}{2},\ \frac{y+5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2},\ \frac{y+5}{2}\right)$$

$\because$ AC और BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं

$\therefore$ AC का मध्य-बिन्दु वही होगा जो BD का है।

अर्थात $\left(\dfrac{1+x}{2},\ 4\right) = \left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{y+5}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1+x}{2} = \dfrac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 6$

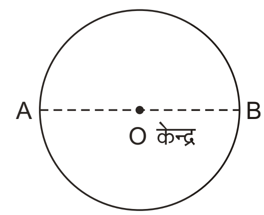
और $\quad \dfrac{y+5}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad y + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

अत: $\quad \boldsymbol{x = 6,} \quad \boldsymbol{y = 3}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2, − 3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

हल : दिया है, वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक = (2, − 3)

तथा बिन्दु B के निर्देशांक = (1, 4)



माना बिन्दु A के निर्देशांक (x_1, y_1) हैं।

$x = 2, \quad y = -3$

$x_2 = 1, \quad y_2 = 4$

माना केन्द्र O के निर्देशांक $(x, y) \equiv (2, -3)$ व्यास AB के मध्य-बिन्दु पर है।

$\therefore \quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ तथा $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$\Rightarrow \quad 2 = \dfrac{x_1 + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad -3 = \dfrac{y_1 + 4}{2}$

$\Rightarrow \quad x_1 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 + 4 = -6$

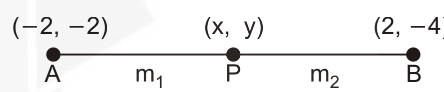
$\Rightarrow \quad x_1 = 4 - 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -6 - 4$

$\Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -10$

अत: **बिन्दु A के निर्देशांक $(x_1, y_1) = (3, -10)$** **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि A और B क्रमशः (− 2, − 2) और (2, − 4) हों तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \dfrac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखण्ड AB पर स्थित हो।

हल : दिया है, $A \equiv (-2, -2)$, $\quad B \equiv (2, -4)$



यहाँ $\quad x_1 = -2, \quad y_1 = -2$

$x_2 = 2, \quad y_2 = -4$

$\because \quad AP = \dfrac{3}{7} AB \quad \Rightarrow \quad AP = \dfrac{3}{7}(AP + PB)$ [$\because$ बिन्दु P रेखाखण्ड AB पर स्थित है।]

$\Rightarrow \quad 7\,AP = 3\,AP + 3\,PB$

$\Rightarrow \quad 4\,AP = 3\,PB \quad \Rightarrow \quad AP : PB = 3 : 4$

$\Rightarrow \quad m_1 : m_2 = 3 : 4$ (माना)

यदि P के निर्देशांक (x, y) हों तो

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \quad (\text{विभाजन सूत्र से})$$

$$= \frac{(3 \times 2) + (4 \times -2)}{3 + 4} \quad\quad = \frac{(3 \times -4) + (4 \times -2)}{3 + 4}$$

$$= \frac{6 + (-8)}{7} \quad\quad = \frac{-12 - 8}{7}$$

$$= -\frac{2}{7} \quad\quad = -\frac{20}{7}$$

अत: **बिन्दु P के निर्देशांक $(x, y) = \left(-\dfrac{2}{7}, \; -\dfrac{20}{7}\right)$** **उत्तर**

प्रश्न 9. बिन्दुओं $A\ (-\ 2,\ \ 2)$ और $B\ (2,\ \ 8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

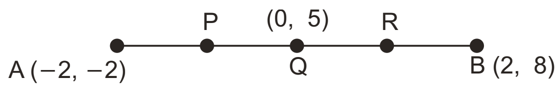
हल : माना बिन्दु $A = (-\ 2,\ \ 2)$ तथा $B = (2,\ \ 8)$

तब, रेखाखण्ड AB को दो बराबर भागों में बाँटने वाले बिन्दु Q के निर्देशांक

= बिन्दुओं $(-\ 2, 2)$ तथा $(2, 8)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{-\ 2+2}{2},\ \ \frac{2+8}{2}\right) = \left(\frac{0}{2},\ \frac{10}{2}\right) = (0,\ \ 5)$$

$\therefore \qquad Q = (0,\ \ 5)$



तब, रेखाखण्ड AQ के मध्य-बिन्दु P के निर्देशांक = बिन्दुओं $(-\ 2,\ \ 2)$ तथा $(0,\ \ 5)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{-\ 2+0}{2},\ \ \frac{2+5}{2}\right) = \left(-\ 1,\ \ \frac{7}{2}\right)$$

और रेखाखण्ड QB के मध्य-बिन्दु R के निर्देशांक = बिन्दुओं $(0,\ \ 5)$ तथा $(2,\ \ 8)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{0+2}{2},\ \ \frac{5+8}{2}\right) = \left(1,\ \ \frac{13}{2}\right)$$

अत: **दिए हुए बिन्दुओं को 4 बराबर भागों में बाँटने वाले बिन्दुओं P, Q व R के निर्देशांक क्रमशः $\left(-\ 1,\ \ \frac{7}{2}\right)$, $(0,\ \ 5)$ व $\left(1,\ \ \frac{13}{2}\right)$ हैं।** उत्तर

प्रश्न 10. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, $(3,\ \ 0)$, $(4,\ \ 5)$, $(-\ 1,\ \ 4)$ और $(-\ 2,\ \ -\ 1)$ हैं।

हल : माना समचतुर्भुज के शीर्ष क्रमशः $A \equiv (3,\ \ 0), B \equiv (4,\ \ 5),\ C \equiv (-\ 1, 4)$ तथा $D \equiv (-\ 2,\ \ -\ 1)$

$\therefore$ समचतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC की लम्बाई $= \sqrt{(-\ 1-3)^2 + (4-0)^2}$ (दूरी सूत्र से)

$$= \sqrt{(-\ 4)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16}$$
$$= 4\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

तथा विकर्ण BD की लम्बाई $= \sqrt{(-\ 2-4)^2 + (-\ 1-5)^2}$

$$= \sqrt{(-\ 6)^2 + (-\ 6)^2} = \sqrt{36+36}$$
$$= \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$\because$ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ एक विकर्ण $\times$ दूसरा विकर्ण $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 24 \times 2 = 24 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अत: **समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 24 वर्ग मात्रक।** उत्तर

प्रश्नावली 7.3

प्रश्न 1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं :

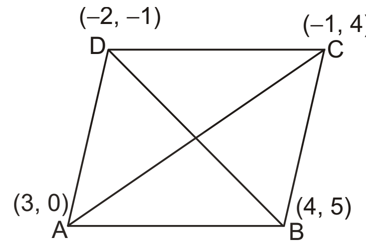
(i) $(2,\ \ 3)$, $(-\ 1,\ \ 0)$, $(2,\ \ -\ 4)$ (ii) $(-\ 5,\ \ -\ 1)$, $(3,\ \ -\ 5)$, $(5,\ \ 2)$

हल : (i) दिया है, त्रिभुज के शीर्ष : $(2,\ \ 3)$, $(-\ 1,\ \ 0)$ तथा $(2,\ \ -\ 4)$

यहाँ $x_1 = 2, \qquad y_1 = 3$

$x_2 = -\ 1, \qquad y_2 = 0$

$x_3 = 2, \qquad y_3 = -\ 4$



त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[2\{0-(-4)\} + (-1)(-4-3) + 2(3-0)]$

$= \frac{1}{2}[2 \times 4 + (-1)(-7) + 2 \times 3]$

$= \frac{1}{2}(8+7+6) = \frac{21}{2}$ वर्ग इकाई

अत: **त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{21}{2}$ वर्ग मात्रक।** **उत्तर**

- **(ii)** दिया है, त्रिभुज के शीर्ष : $(-5, -1)$, $(3, -5)$ तथा $(5, 2)$

यहाँ $x_1 = -5$, $y_1 = -1$

$x_2 = 3$, $y_2 = -5$

$x_3 = 5$, $y_3 = 2$

त्रिभुज Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[(-5)(-5-2) + 3\{2-(-1)\} + 5\{-1-(-5)\}]$

$= \frac{1}{2}[(-5)(-7) + 3(2+1) + 5(-1+5)]$

$= \frac{1}{2}(35 + 3 \times 3 + 5 \times 4) = \frac{1}{2}(35+9+20) = \frac{1}{2} \times 64 = 32$ वर्ग मात्रक

अत: **त्रिभुज का क्षेत्रफल = 32 वर्ग मात्रक।** **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'k' का मान ज्ञात कीजिए ताकि तीनों बिन्दु संरेखी हों :

(i) $(7, -2)$, $(5, 1)$, $(3, k)$ **(ii) $(8, 1)$, $(k, -4)$, $(2, -5)$**

हल : (i) माना बिन्दु $A \equiv (7, -2)$; $B \equiv (5, 1)$ तथा $C \equiv (3, k)$

यहाँ $x_1 = 7$, $y_1 = -2$

$x_2 = 5$, $y_2 = 1$

$x_3 = 3$, $y_3 = k$

तब, ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[7(1-k) + 5\{k-(-2)\} + 3(-2-1)]$

$= \frac{1}{2}[7(1-k) + 5(k+2) + 3(-3)]$

$= \frac{1}{2}(7 - 7k + 5k + 10 - 9) = \frac{1}{2}(8 - 2k) = \frac{2}{2}(4-k) = 4 - k$

परन्तु यदि उक्त बिन्दु A, B, C संरेख हों तो ΔABC का क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए।

$\therefore$ $4 - k = 0 \Rightarrow k = 4$

अत: **k का मान = 4** **उत्तर**

- **(ii)** माना बिन्दु $A \equiv (8, 1)$, $B \equiv (k, -4)$ तथा $C \equiv (2, -5)$

यहाँ $x_1 = 8$, $y_1 = 1$

$x_2 = k$, $y_2 = -4$

$x_3 = 2$, $y_3 = -5$

तब, $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\,[8\,\{-\,4 - (-\,5)\} + k\,(-\,5 - 1) + 2\,\{1 - (-\,4)\}]$$

$$= \frac{1}{2}\,[8\,(-\,4 + 5) + k\,(-\,6) + 2\,(1 + 4)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[8 \times 1 - 6\,k + 2 \times 5] = \frac{1}{2}\,(8 - 6\,k + 10)$$

$$= \frac{1}{2}\,(18 - 6\,k) = \frac{2}{2}\,(9 - 3\,k) = 9 - 3\,k$$

परन्तु यदि उक्त बिन्दु A, B, C संरेख हैं तो $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए।

$\therefore \qquad -\,3\,k + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad k = 3$

अत: **k का मान $= 3$** उत्तर

प्रश्न 3. शीर्षों (0, − 1), (2, 1) और (0, 3) वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का दिए हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\Delta\, ABC$ के शीर्ष $A \equiv (0,\ -\,1), B \equiv (2,\ 1)$ तथा $C \equiv (0, 3)$

यहाँ $\quad x_1 = 0, \quad y_1 = -\,1$

$\quad x_2 = 2, \quad y_2 = 1$

$\quad x_3 = 0, \quad y_3 = 3$

तब, $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

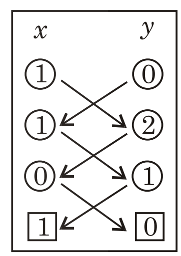
$$= \frac{1}{2}\,[0\,(1 - 3) + 2\,\{3 - (-\,1)\} + 0\,(-\,1 - 1)]$$

$= \frac{1}{2}\,[0 + 2\,(3 + 1) + 0] = \frac{1}{2}\,(2 \times 4) = 4$ वर्ग मात्रक

भुजा AB का मध्य-बिन्दु $D \equiv \left[\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right] \equiv \left(\frac{0 + 2}{2},\ \frac{-\,1 + 1}{2}\right) = (1,\ 0)$

भुजा BC का मध्य-बिन्दु $E \equiv \left[\frac{x_2 + x_3}{2},\ \frac{y_2 + y_3}{2}\right] \equiv \left(\frac{2 + 0}{2},\ \frac{1 + 3}{2}\right) = (1,\ 2)$

भुजा CA का मध्य-बिन्दु $F \equiv \left[\frac{x_3 + x_1}{2},\ \frac{y_3 + y_1}{2}\right] \equiv \left(\frac{0 + 0}{2},\ \frac{-\,1 + 3}{2}\right) = (0,\ 1)$



तब, $\Delta\, DEF$ के शीर्ष : $D = (1,\ 0),\ E = (1,\ 2),\ F = (0,\ 1)$

$\Delta\, DEF$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\,[\{1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0\} - \{0 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1\}]$

$= \frac{1}{2}\,[\{2 + 1 + 0\} - \{0 + 0 + 1\}] = \frac{1}{2}\,[3 - 1] = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ वर्ग मात्रक

$\therefore$ **शीर्षों (0, − 1), (2, 1) और (0, 3) वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1वर्ग मात्रक।**

पुन: **दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अभीष्ट अनुपात = 1 : 4** उत्तर

प्रश्न 4. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (− 4, − 2), (− 3, − 5), (3, − 2) और (2, 3) हैं।

हल : माना चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष क्रमशः $A \equiv (-\,4,\ -\,2), B \equiv (-3,\ -\,5), C \equiv (3,\ -\,2)$ तथा $D \equiv (2, 3)$ हैं।

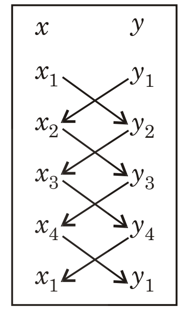
यहाँ $\quad x_1 = -\,4, \quad y_1 = -\,2$

$\quad x_2 = -\,3, \quad y_2 = -\,5$

$\quad x_3 = 3, \quad y_3 = -\,2$

$\quad x_4 = 2, \quad y_4 = 3$

तब, चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1)]$



$$= \frac{1}{2}[\{(-4\times-5)+(-3\times-2)+(3\times3)+(2\times-2)\} - \{(-2\times-3)+(-5\times3)+(-2\times2)+(3\times-4)\}]$$

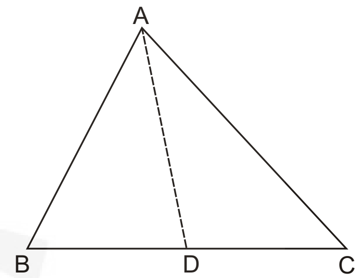
$$= \frac{1}{2}[\{20+6+9-4\}-\{6-15-4-12\}]$$

$$= \frac{1}{2}[(31)-(-25)] = \frac{1}{2}[31+25]$$

$$= \frac{1}{2}[56] = 28 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अत: **अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 28 वर्ग मात्रक।** उत्तर

प्रश्न 5. कक्षा IX में आपने पढ़ा है (NCERT पाठ्यपुस्तक के अध्याय 9, उदाहरण 3) कि किसी त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। उस त्रिभुज ABC के लिए इस परिणाम का सत्यापन कीजिए जिसके शीर्ष $A(4, -6)$, $B(3, -2)$ और $C(5, 2)$ हैं।



हल : दिए है, ΔABC के शीर्ष $A \equiv (4, -6)$, $B \equiv (3, -2)$ और $C \equiv (5, 2)$

यहाँ $x_1 = 4,\quad y_1 = -6$

$x_2 = 3,\quad y_2 = -2$

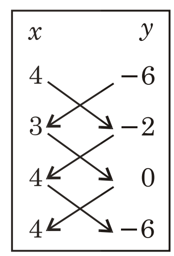
$x_3 = 5,\quad y_3 = 2$

माना BC का मध्य-बिन्दु D है चूँकि AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है।

तब, $D \equiv \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right] \equiv \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \equiv (4, 0)$

इस प्रकार माध्यिका AD, ΔABC को दो त्रिभुजों (ΔABD व ΔACD) में विभक्त करती है।

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)]$



$$= \frac{1}{2}[\{4\times(-2)+3\times2+5\times(-6)\} - \{-6\times3+(-2)\times5+2\times4\}]$$

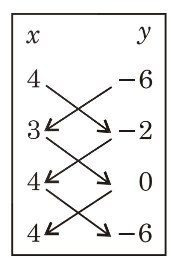
$$= \frac{1}{2}[\{-8+6-30\}-\{-18-10+8\}]$$

$$= \frac{1}{2}[-32-(-20)] = \frac{1}{2}[-32+20]$$

$$= \frac{1}{2}\times(-12) = 6 \text{ वर्ग मात्रक}$$ (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

ΔABD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[\{4\times(-2)+3\times0+4\times(-6)\} - \{(-6)\times3+(-2)\times4+0\times4\}]$

$$= \frac{1}{2}[\{-8+0-24\}-\{-18-8+0\}] = \frac{1}{2}[\{-32\}-\{-26\}]$$



$$= \frac{1}{2}[-32+26] = \frac{1}{2}\times(-6) = 3 \text{ वर्ग मात्रक}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

तब, ΔACD का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $- \Delta ABD$ का क्षेत्रफल

$= (6 - 3) = 3$ वर्ग मात्रक

अत: **स्पष्ट है कि ΔABC की माध्यिका AD, ΔABC को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज ABD व त्रिभुज ACD में विभक्त करती है।** **Proved.**

प्रश्नावली 7.4 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1. बिन्दुओं A (2, − 2) और B (3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ जिस अनुपात में विभाजित करती है, उसे ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, बिन्दु $A \equiv (2, -2)$ तथा $B \equiv (3, 7)$

यहाँ $\quad x_1 = 2, \quad y_1 = -2$

$\quad x_2 = 3, \quad y_2 = 7$

माना दिए हुए बिन्दुओं से बना रेखाखण्ड रेखा $2x + y - 4 = 0$ को $m_1 : m_2$ में विभक्त करता है जबकि प्रतिच्छेद बिन्दु (x, y) है।

तब, $\quad x = \dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ और $y = \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ (विभाजन सूत्र से)

$$= \frac{3\,m_1 + 2\,m_2}{m_1 + m_2} \qquad = \frac{(m_1 \times 7) + (m_2 \times -2)}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{7\,m_1 - 2\,m_2}{m_1 + m_2}$$

$\because$ बिन्दु (x, y) रेखा $2x + y - 4 = 0$ पर स्थित होगा; अत: इसके निर्देशांक रेखा $2x + y - 4 = 0$ को सन्तुष्ट करेंगे।

$$\therefore \quad 2 \times \frac{3\,m_1 + 2\,m_2}{m_1 + m_2} + \frac{7\,m_1 - 2\,m_2}{m_1 + m_2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6\,m_1 + 4\,m_2}{m_1 + m_2} + \frac{7\,m_1 - 2\,m_2}{m_1 + m_2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6\,m_1 + 7\,m_1 + 4\,m_2 - 2\,m_2}{m_1 + m_2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{13\,m_1 + 2\,m_2}{m_1 + m_2} = 4$$

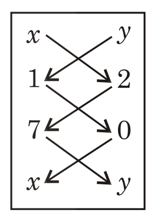
$$\Rightarrow \quad 13\,m_1 + 2\,m_2 = 4\,m_1 + 4\,m_2$$

$$\Rightarrow \quad 9\,m_1 = 2\,m_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{9}$$

अत: **अभीष्ट अनुपात = 2 : 9** **उत्तर**

प्रश्न 2. x और y में एक सम्बन्ध ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु (x, y), (1, 2) और (7, 0) संरेखी हैं।



हल : बिन्दुओं (x, y), (1, 2) और (7, 0) से बने

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\,[\{x \times 2 + 1 \times 0 + 7 \times y\} - \{y \times 1 + 2 \times 7 + 0 \times x\}]$

$$= \frac{1}{2}\,[\{2x + 0 + 7y\} - \{y + 14 + 0\}]$$

$$= \frac{1}{2}\,[2x + 7y - y - 14] = \frac{1}{2}\,[2x + 6y - 14] = \frac{2}{2}(x + 3y - 7)$$

$$= x + 3y - 7$$

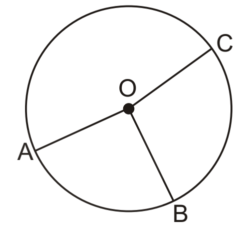
यदि उक्त बिन्दु संरेखीय हैं तो उनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\therefore \quad x + 3y - 7 = 0$$

अत: **x और y में अभीष्ट सम्बन्ध : $x + 3y - 7 = 0$** **उत्तर**

प्रश्न 3. बिन्दुओं (6, − 6), (3, − 7) और (3, 3) से होकर जाने वाले वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(6, -6)$, $B(3, -7)$ तथा $C(3, 3)$ बिन्दु एक वृत्त की परिधि पर स्थित हैं और वृत्त का केन्द्र $O(h, k)$ है।



तब, OA, OB तथा OC वृत्त की त्रिज्याएँ होंगी।

अत: $OA = OB = OC$

$\Rightarrow \quad OA^2 = OB^2 = OC^2$

$OA^2 = [$ केन्द्र $O(h, k)$ और बिन्दु $A(6, -6)$ के बीच की दूरी $]^2$

$= (h-6)^2 + (k+6)^2$ (दूरी सूत्र से)

$= h^2 - 12h + 36 + k^2 + 12k + 36$

$\therefore \quad OA^2 = h^2 + k^2 - 12h + 12k + 72$ ...(1)

$OB^2 = [$ केन्द्र $O(h, k)$ और बिन्दु $B(3, -7)$ के बीच की दूरी $]^2$

$= (h-3)^2 + (k+7)^2$

$= h^2 - 6h + 9 + k^2 + 14k + 49$

$\therefore \quad OB^2 = h^2 + k^2 - 6h + 14k + 58$ ...(2)

$OC^2 = [$ केन्द्र $O(h, k)$ और बिन्दु $C(3, 3)$ की दूरी $]^2$

$= (h-3)^2 + (k-3)^2$

$= h^2 - 6h + 9 + k^2 - 6k + 9$

$\therefore \quad OC^2 = h^2 + k^2 - 6h - 6k + 18$ ...(3)

समीकरण (2) में से समीकरण (3) को घटाने पर, $20k + 40 = OB^2 - OC^2 = 0$ $[\because OB = OC]$

$\Rightarrow \quad k = -\dfrac{40}{20} \quad \Rightarrow \quad k = -2$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर, $-6h - 2k + 14 = OA^2 - OB^2 = 0$ $[\because OA = OB]$

$\Rightarrow \quad 6h + 2k = 14$

$\Rightarrow \quad 6h + (2 \times -2) = 14$ $(\because k = -2)$

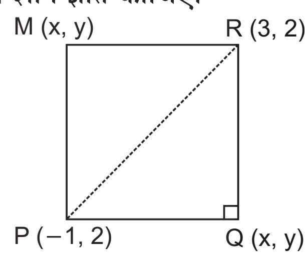
$\Rightarrow \quad 6h - 4 = 14$

$\Rightarrow \quad 6h = 14 + 4 = 18 \quad \Rightarrow h = \dfrac{18}{6}$

$\therefore \quad h = 3$

अत: **वृत्त का केन्द्र $\equiv (h, k) \equiv (3, -2)$** **उत्तर**

प्रश्न 4. किसी वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष $(-1, 2)$ और $(3, 2)$ हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।



हल : माना $PQRM$ एक वर्ग है और $P(-1, 2)$ तथा $R(3, 2)$ वर्ग के शीर्ष हैं। माना Q और M के निर्देशांक (x, y) हैं।

$\because$ वर्ग की चारों भुजाओं की लम्बाई समान होती है प्रत्येक संलग्न भुजाओं के मध्य कोण 90° होता है।

$\therefore \quad PQ = MR$

$\Rightarrow \quad PQ^2 = MR^2$

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$

$[\because d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]$

$\Rightarrow \quad x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y$

$\Rightarrow \quad 2x - 4y + 5 = -6x - 4y + 13$

$\Rightarrow \quad 2x - 4y + 6x + 4y + 5 - 13 = 0$

$\Rightarrow \quad 8x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x = 8$ $\therefore x = 1$ ...(1)

समकोण ΔPQR में,

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 = (3+1)^2 + (2-2)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y + x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y = (4)^2 + (0)^2$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 18 = 16$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) से x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$\Rightarrow \quad (1)^2 + y^2 - 2 \times 1 - 4y + 1 = 0$$

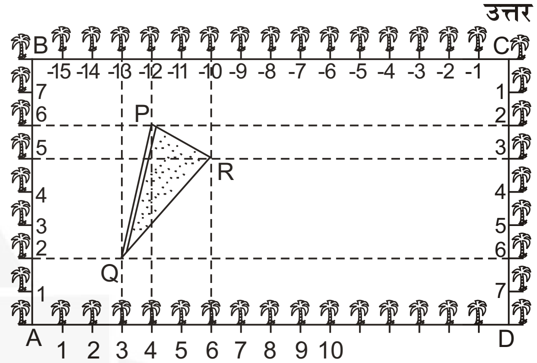
$$\Rightarrow \quad 1 + y^2 - 2 - 4y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(y-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, 4$$

अत: **वर्ग के अन्य दो अभीष्ट शीर्ष (1, 0) तथा (1, 4) हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 5. कृष्णानगर के एक सेकेण्डरी स्कूल के कक्षा X के विद्यार्थियों को उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए एक आयताकार भूखण्ड दिया गया है। गुलमोहर की पौध (sapling) को परस्पर 1 मीटर की दूरी पर इस भूखण्ड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखण्ड के अन्दर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। विद्यार्थियों को भूखण्ड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।

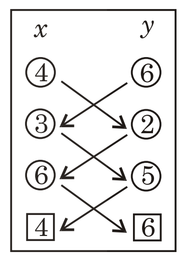


(i) A को मूलबिन्दु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि मूलबिन्दु C हो तो ΔPQR के शीर्षों के निर्देशांक क्या होंगे?

साथ ही उपर्युक्त दोनों स्थितियों में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

हल : चित्र देखिए। बिन्दुओं P, Q व R से सम्मुख अक्षों पर लम्ब खींचे गए हैं।



- **(i) यदि A मूलबिन्दु हो तो x-अक्ष और y-अक्ष क्रमश: AD और AB को माना जाएगा।**

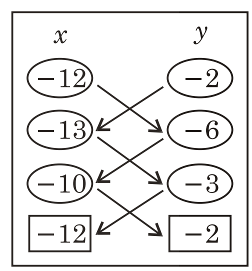
$\therefore$ बिन्दु $P = (4,\ 6)$, $Q = (3,\ 2)$ तथा $R = (6,\ 5)$

तब, ΔPQR का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}[\{4 \times 2 + 3 \times 5 + 6 \times 6\} - \{6 \times 3 + 2 \times 6 + 5 \times 4\}]$

$$= \frac{1}{2}[(8 + 15 + 36) - (18 + 12 + 20)]$$

$$= \frac{1}{2}[59 - 50] = \frac{1}{2} \times 9 = \mathbf{\frac{9}{2}} \text{ **वर्ग मात्रक।**}$$

उत्तर



- **(ii) जब C मूलबिन्दु हो तो x-अक्ष और y-अक्ष क्रमश: CB और CD को माना जाएगा।**

$\therefore$ $P = (-12,\ -2)$, $Q = (-13,\ -6)$ तथा $R = (-10,\ -3)$

तब, ΔPQR का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}[\{(-12)(-6) + (-13)(-3) + (-10)(-2)\}$

$$- \{(-2)(-13) + (-6)(-10) + (-3)(-12)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[(72 + 39 + 20) - (26 + 60 + 36)]$$

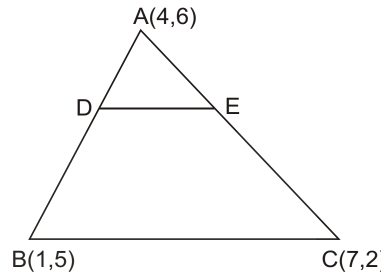
$$= \frac{1}{2}[(131) - (122)] = \frac{1}{2} \times 9 = \mathbf{\frac{9}{2}} \text{ वर्ग मात्रक।}$$

उत्तर

दोनों ही स्थितियों में त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है। **उत्तर**

प्रश्न 6. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A (4, 6), B (1, 5) और C (7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमश: D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{4}$ है। ΔADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना ΔABC के क्षेत्रफल से कीजिए।

हल : दिया है, $\Delta\, ABC$ के शीर्ष $A(4,\ 6), B(1,\ 5)$ और $C(7,\ 2)$ हैं।



$$\because \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad AB = 4\,AD$$

$$\Rightarrow \quad AD + DB = 4\,AD \qquad \text{(चित्र से)}$$

$$\Rightarrow \quad DB = 3AD$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ माना D के निर्देशांक यदि $(x,\ y)$ हों तो

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{(विभाजन सूत्र से)}$$

$$= \frac{(1\times 1)+(3\times 4)}{1+3} \qquad = \frac{1\times 5 + 3\times 6}{1+3}$$

$$= \frac{1+12}{4} = \frac{13}{4} \qquad = \frac{5+18}{4} = \frac{23}{4}$$

$$\therefore \quad D \equiv \left(\frac{13}{4},\ \frac{23}{4}\right)$$

इसी प्रकार,
$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad AC = 4\,AE$$

$$\Rightarrow \quad AE + EC = 4\,AE \qquad \text{(चित्र से)}$$

$$\Rightarrow \quad EC = 3AE$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$$

माना E के निर्देशांक $(x',\ y')$ हों तो

$$x' = \frac{m_1x_3 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y' = \frac{m_1y_3 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{(विभाजन सूत्र से)}$$

$$= \frac{1\times 7 + 3\times 4}{1+3} \qquad = \frac{1\times 2 + 3\times 6}{1+3}$$

$$= \frac{7+12}{4} = \frac{19}{4} \qquad = \frac{2+18}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\therefore \quad E \equiv \left(\frac{19}{4},\ 5\right)$$

अब, $\because A \equiv (4,\ 6),\ D \equiv \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right),\ E \equiv \left(\frac{19}{4}, 5\right)$

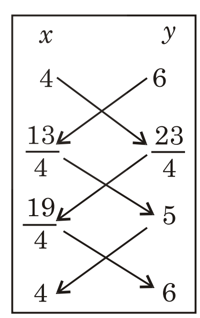
$$\therefore \quad \Delta\, ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\left[\left\{\left(4\times\frac{23}{4}\right) + \left(\frac{13}{4}\times 5\right) + \left(\frac{19}{4}\times 6\right)\right\} - \left\{\left(6\times\frac{13}{4}\right) + \left(\frac{23}{4}\times\frac{19}{4}\right) + 5\times 4\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{23 + \frac{65}{4} + \frac{114}{4}\right\} - \left\{\frac{78}{4} + \frac{437}{16} + 20\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{92+65+114}{4}\right\} - \left\{\frac{312+437+320}{16}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{271}{4} - \frac{1069}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1084-1069}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{15}{16} = \frac{15}{32} \text{ वर्ग मात्रक}$$



और $\Delta\ ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[\{4\times5+1\times2+7\times6\}-\{6\times1+5\times7+2\times4\}]$

$= \frac{1}{2}[\{20+2+42\}-\{6+35+8\}]$

$= \frac{1}{2}[64-49] = \frac{1}{2}\times15 = \frac{15}{2}$ वर्ग मात्रक

अत: $\Delta\ ADE$ व $\Delta\ ABC$ के क्षेत्रफल में अनुपात $= \frac{15}{32} : \frac{15}{2} = \mathbf{1 : 16}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. मान लीजिए $A(4,\ 2)$, $B(6,\ 5)$ और $C(1,\ 4)$ एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिन्दु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि $AP : PD = 2 : 1$ हो।

(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिन्दुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि $BQ : QE = 2 : 1$ हो और $CR : RF = 2 : 1$ हो।

(iv) आप क्या देखते हैं?

[नोट—वह बिन्दु जो तीनों माध्यिकाओं में सार्वनिष्ठ हो, उस त्रिभुज का केन्द्रक (centroid) **कहलाता है और यह प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।]**

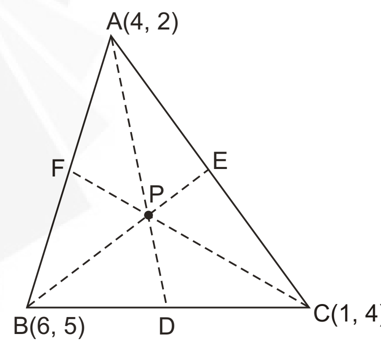
(v) यदि $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ और $C(x_3,\ y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं तो इस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए, बिन्दु $A \equiv (4,\ 2)$, $B \equiv (6,\ 5)$ तथा $C \equiv (1,\ 4)$, $\Delta\ ABC$ के शीर्ष हैं।

यहाँ $x_1 = 4$ $\quad y_1 = 2$

$x_2 = 6$ $\quad y_2 = 5$

$x_3 = 1$ $\quad y_3 = 4$



- **(i)** $\because D$, रेखाखण्ड BC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ D के निर्देशांक $= \left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$

$= \left(\frac{6+1}{2},\ \frac{5+4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

अत: **बिन्दु D के निर्देशांक** $= \left(\mathbf{\frac{7}{2}},\ \mathbf{\frac{9}{2}}\right)$ **उत्तर**

- **(ii)** माना बिन्दु P के निर्देशांक $(x,\ y)$ हैं। दिया है, $AP : PD = 2 : 1$

यहाँ, $x_1 = 4,$ $\quad y_1 = 2,$ $\quad m_1 : m_2 = 2 : 1$

$x_4 = \frac{7}{2},$ $\quad y_4 = \frac{9}{2}$

तब, $x = \frac{m_1x_4 + m_2x_1}{m_1+m_2}$ तथा $y = \frac{m_1y_4 + m_2y_1}{m_1+m_2}$ (विभाजन सूत्र से)

$= \frac{\left(2\times\frac{7}{2}\right)+(1\times4)}{2+1}$ $\qquad = \frac{\left(2\times\frac{9}{2}\right)+(1\times2)}{2+1}$

$= \frac{7+4}{3} = \frac{11}{3}$ $\qquad = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}$

$\therefore$ $P = \left(\frac{11}{3},\ \frac{11}{3}\right)$

अत: **माध्यिका AD को 2 : 1 में विभाजित करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक** $= \left(\mathbf{\frac{11}{3}},\ \mathbf{\frac{11}{3}}\right)$ **उत्तर**

● **(iii)** AC के मध्य-बिन्दु E के निर्देशांक $= \left[\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right] = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$

$$= \left(\frac{5}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

$B = (6, 5)$ तथा $E = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

BE को 2 : 1 में बाँटने वाले बिन्दु Q के निर्देशांक $(\because BQ : QE = 2 : 1)$

यहाँ, $x_2 = 6$, $y_2 = 5$, $x_5 = \frac{5}{2}$,

$y_5 = 3$ तथा $m_1 : m_2 = 2 : 1$

$$= \left[\frac{m_1x_5 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_5 + m_2y_2}{m_1 + m_2}\right] = \left(\frac{\left(2 \times \frac{5}{2}\right) + (1 \times 6)}{2+1}, \frac{(2 \times 3) + (1 \times 5)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{5+6}{3}, \frac{6+5}{3}\right) = \left(\mathbf{\frac{11}{3}}, \mathbf{\frac{11}{3}}\right)$$ **उत्तर**

AB के मध्य-बिन्दु F के निर्देशांक $= \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right] = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(5, \frac{7}{2}\right)$

$C = (1, 4)$ तथा $F = \left(5, \frac{7}{2}\right)$

CF को 2 : 1 में बाँटने वाले बिन्दु R के निर्देशांक $(\because CR : RF = 2 : 1)$

यहाँ, $x_3 = 1$, $y_3 = 4$, $x_6 = 5$,

$y_6 = \frac{7}{2}$ तथा $m_1 : m_2 = 2 : 1$

$$= \left[\frac{m_1x_6 + m_2x_3}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_6 + m_2y_3}{m_1 + m_2}\right] = \left(\frac{(2 \times 5) + (1 \times 1)}{2+1}, \frac{\left(2 \times \frac{7}{2}\right) + (1 \times 4)}{2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{10+1}{3}, \frac{7+4}{3}\right) = \left(\mathbf{\frac{11}{3}}, \mathbf{\frac{11}{3}}\right)$$ **उत्तर**

● **(iv) त्रिभुज की माध्यिकाओं का एक (संगामी) प्रतिच्छेद बिन्दु होता है जो माध्यिका को 2 : 1 में बाँटता है।** **उत्तर**

● **(v)** यदि ΔABC के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ व $C(x_3, y_3)$ हों तो

रेखाखण्ड BC का मध्य-बिन्दु $D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

तब, यदि माध्यिका AD को 2 : 1 में बाँटने वाला बिन्दु $P(x, y)$ हो तो

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + (1 \times x_1)}{2+1} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + (1 \times y_1)}{2+1}$$ (विभाजन सूत्र से)

$$= \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अत: Δ ***ABC* के केन्द्रक के निर्देशांक** $= \left(\mathbf{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}, \mathbf{\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}\right)$ **उत्तर**

प्रश्न 8. बिन्दुओं $A\ (-1,\ -1)$, $B\ (-1,\ 4)$, $C\ (5,\ 4)$ और $D\ (5,\ -1)$ से एक आयत $ABCD$ बनता है। P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। क्या चतुर्भुज $PQRS$ एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

हल : दिए हुए बिन्दु $A \equiv (-1,\ -1)$, $B \equiv (-1,\ 4)$, $C \equiv (5,\ 4)$, $D \equiv (5,\ -1)$ एक आयत $ABCD$ के शीर्ष है।

यहाँ, $(x_1,\ y_1) = (-1,\ -1)$, $\quad (x_2,\ y_2) = (-1,\ 4)$,

$(x_3,\ y_3) = (5,\ 4)$ तथा $(x_4,\ y_4) = (5,\ -1)$

रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु $P = \left[\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right] = \left(\dfrac{-1 + (-1)}{2},\ \dfrac{-1 + 4}{2}\right)$

$$= \left(\frac{-2}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$$

रेखाखण्ड BC का मध्य-बिन्दु $Q = \left[\dfrac{x_2 + x_3}{2},\ \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right] = \left(\dfrac{-1 + 5}{2},\ \dfrac{4 + 4}{2}\right) = \left(\dfrac{4}{2},\ \dfrac{8}{2}\right) = (2,\ 4)$

रेखाखण्ड CD का मध्य-बिन्दु $R = \left[\dfrac{x_3 + x_4}{2},\ \dfrac{y_3 + y_4}{2}\right] = \left(\dfrac{5 + 5}{2},\ \dfrac{4 + (-1)}{2}\right)$

$$= \left(\frac{10}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \left(5,\ \frac{3}{2}\right)$$

रेखाखण्ड DA का मध्य-बिन्दु $S = \left[\dfrac{x_4 + x_1}{2},\ \dfrac{y_4 + y_1}{2}\right] = \left(\dfrac{-1 + 5}{2},\ \dfrac{-1 + (-1)}{2}\right)$

$$= \left(\frac{4}{2},\ \frac{-2}{2}\right) = (2,\ -1)$$

तब, $\quad P = \left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\quad Q = (2,\ 4)$, $\quad R = \left(5,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\quad S = (2,\ -1)$

अब दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र से,

भुजा $PQ = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + \left(4 - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(3)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{61}{4}}$

भुजा $QR = \sqrt{(5 - 2)^2 + \left(\dfrac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{(3)^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{61}{4}}$

भुजा $RS = \sqrt{(2 - 5)^2 + \left(-1 - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{61}{4}}$

भुजा $SP = \sqrt{[(-1) - 2]^2 + \left(\dfrac{3}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{61}{4}}$

विकर्ण $PR = \sqrt{[5 - (-1)]^2 + \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(6)^2 + 0} = 6$

विकर्ण $QS = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$

$\because$ चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = QR = RS = SP$ और विकर्ण $PR \neq$ विकर्ण QS

अतः **चतुर्भुज $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।** उत्तर