माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An **Easy Textbook**

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

NCERT ZONE

अध्याय 8 | त्रिकोणमिति का परिचय

(Introduction to Trigonometry)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत

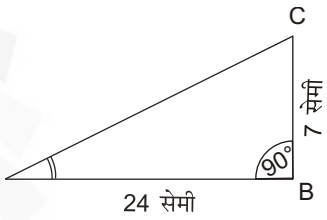
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24$ सेमी और $BC = 7$ सेमी है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A, \cos A$ **(ii) $\sin C, \cos C$**

हल : समकोण ΔABC बनाया जिसमें $\angle B = 90°$ है



तब, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$\therefore$ $AC^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$

$\therefore$ $AC = \sqrt{625} = 25$ सेमी

[$\because$ $AB = 24$ सेमी तथा $BC = 7$ सेमी]

(i) समकोण ΔABC में, $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{7}{25}$

और $\cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{24}{25}$

अत: $\mathbf{\sin A = \frac{7}{25}}$ **तथा** $\mathbf{\cos A = \frac{24}{25}}$ **उत्तर**

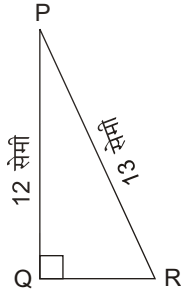
● **(ii)** समकोण ΔABC में, $\sin C = \dfrac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{24}{25}$

और $\cos C = \dfrac{\angle C \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{7}{25}$

अत: $\mathbf{\sin C = \frac{24}{25}}$ **तथा** $\mathbf{\cos C = \frac{7}{25}}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. चित्र में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : समकोण ΔPQR में,



$$PQ^2 + QR^2 = PR^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow$ $(12)^2 + QR^2 = (13)^2$

$\Rightarrow$ $QR^2 = (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow$ $QR = 5$ सेमी

$$\tan P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle P \text{ की आधार भुजा}}$$

$\therefore$ $\tan P = \dfrac{QR}{PQ} = \dfrac{5}{12}$

और $\cot R = \dfrac{\angle\ R \text{ की आधार भुजा}}{\angle\ R \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{QR}{PQ} = \dfrac{5}{12}$

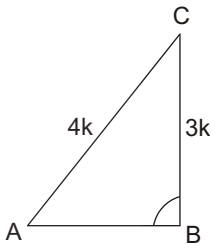
$\therefore \quad \cot R = \dfrac{5}{12}$

अत: $\tan P - \cot R = \dfrac{5}{12} - \dfrac{5}{12} = \mathbf{0}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि $\sin A = \dfrac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

हल : दिया है, किसी समकोण त्रिभुज में,

$$\sin A = \frac{3}{4}$$



$\therefore \quad \dfrac{\angle\ A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4} = k$ (माना)

$\therefore \quad BC = 3k$ तथा $AC = 4k$

तब, समकोण $\Delta\ ABC$ में, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\therefore \quad AB^2 + (3k)^2 = (4k)^2$

$\therefore \quad AB^2 + 9k^2 = 16k^2 \quad \Rightarrow \quad AB^2 = 7k^2$

$\Rightarrow \quad AB = k\sqrt{7}$

तब, $\cos A = \dfrac{\angle\ A \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कर्ण } AC} = \dfrac{k\sqrt{7}}{4k} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

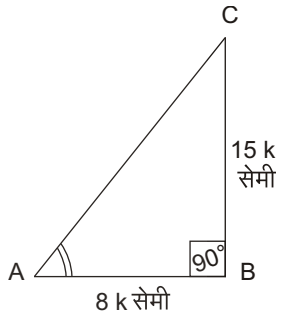
तथा $\tan A = \dfrac{\angle\ A \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\angle\ A \text{ की आधार भुजा } AB} = \dfrac{3k}{k\sqrt{7}} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

अत: $\cos A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ **तथा** $\tan A = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $15 \cot A = 8 \quad \Rightarrow \quad \cot A = \dfrac{8}{15}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\angle\ A \text{ की आधार भुजा } AB}{\angle\ A \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{8}{15} = k$ (माना)



$\Rightarrow \quad AB = 8k$ तथा $AC = 15k$ जहाँ k धन संख्या है।

तब, समकोण त्रिभुज ABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= (8k)^2 + (15k)^2 = 64k^2 + 225k^2 = 289k^2$

$\therefore \quad AC^2 = 289k^2$

$\Rightarrow \quad AC = \sqrt{289k^2} = 17k$ इकाई

तब, $\sin A = \dfrac{\angle\ A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15k}{17k}$

$\therefore \quad \sin A = \dfrac{15}{17}$

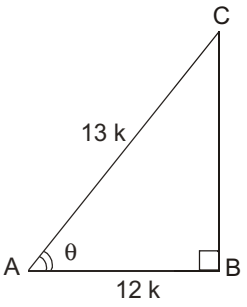
तथा $\sec A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{17\,k}{8\,k}$

$\therefore \quad \sec A = \dfrac{17}{8}$

अत: $\mathbf{\sin A = \dfrac{15}{17}}$ **तथा** $\mathbf{\sec A = \dfrac{17}{8}}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि $\sec\theta = \dfrac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

nue : $\because \quad \sec\theta = \dfrac{13}{12}$



$\therefore \quad \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा}} = \dfrac{13}{12}$

$\therefore \quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13}{12} = k$ (माना)

$\therefore \quad AC = 13\,k, \qquad AB = 12\,k$

तब, समकोण $\Delta\, ABC$ में,

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow \quad (12\,k)^2 + BC^2 = (13\,k)^2$

$\Rightarrow \quad BC^2 = (13\,k)^2 - (12\,k)^2 = 169\,k^2 - 144\,k^2 = 25\,k^2$

$\therefore \quad BC = \sqrt{25\,k^2} = 5\,k$

तब, $\sin\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\text{कर्ण } AC} = \dfrac{5\,k}{13\,k} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{5}{13};$

$\cos\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कर्ण } AC} = \dfrac{12\,k}{13\,k} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{12}{13};$

$\tan\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा } AB} = \dfrac{5\,k}{12\,k} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{5}{12};$

$\cot\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{12\,k}{5\,k} \Rightarrow \cot\theta = \dfrac{12}{5};$

तथा $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण } AC}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{13\,k}{5\,k} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{5}$

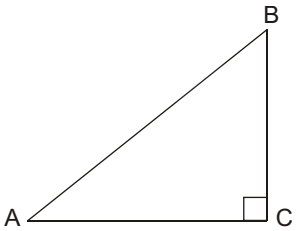
अत: $\mathbf{\sin\theta = \dfrac{5}{13};}$ $\mathbf{\cos\theta = \dfrac{12}{13};}$ $\mathbf{\tan\theta = \dfrac{5}{12};}$

$\mathbf{\cot\theta = \dfrac{12}{5}}$ **तथा** $\mathbf{\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{5}.}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि $\angle A$ तथा $\angle B$ न्यूनकोण हों और $\cos A = \cos B$ हो तो दिखाइए कि :

$$\angle A = \angle B$$

हल : माना त्रिभुज ABC में $\angle C$ समकोण है।



तब, $\angle A$ तथा $\angle B$ न्यूनकोण होंगे।

$\because \quad \cos A = \cos B$

$\therefore \quad \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } AC}{\text{कर्ण } AB} = \dfrac{\angle B \text{ की आधार भुजा } BC}{\text{कर्ण } AB}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB}$

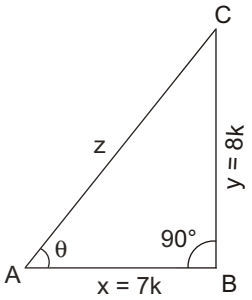
$\Rightarrow \quad AC = BC$

$\because$ $\Delta\ ACB$ में, $AC = BC$ $\quad \therefore$ $\Delta\ ACB$ समद्विबाहु है।

$\therefore \angle A = \angle B$ **Proved.**

प्रश्न 7. यदि $\cot\theta = \dfrac{7}{8}$, तो (i) $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$, (ii) $\cot^2\theta$ का मान निकालिए।

हल : $\because$ दिया है, $\cot\theta = \dfrac{7}{8}$



$\therefore \quad \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7}{8}$

$\therefore \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{8} = k$ (माना) $\quad \Rightarrow \quad x = 7k$ तथा $y = 8k$

तब, समकोण त्रिभुज ABC में, माना कर्ण $AC = z$

$\Rightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2 = (7k)^2 + (8k)^2 = 49k^2 + 64k^2$

$z^2 = 113k^2$

$\Rightarrow$ कर्ण $z = k\sqrt{113}$

$\therefore \quad \sin\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{8k}{k\sqrt{113}} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{8}{\sqrt{113}}$

और $\cos\theta = \dfrac{\text{कोण } \theta \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{z} = \dfrac{7k}{k\sqrt{113}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{113}}$

- **(i)** $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \dfrac{\left(1+\dfrac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\dfrac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)}$ [$\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान रखने पर]

$$= \frac{(1)^2 - \left(\dfrac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{(1)^2 - \left(\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)^2} \quad [\text{सूत्र : } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ से }]$$

$$= \frac{1 - \dfrac{64}{113}}{1 - \dfrac{49}{113}} = \frac{\dfrac{(113-64)}{113}}{\dfrac{(113-49)}{113}} = \frac{\dfrac{49}{113}}{\dfrac{64}{113}} = \frac{49}{113} \times \frac{113}{64} = \frac{49}{64}$$

अतः **$\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ का मान $= \dfrac{49}{64}$** **उत्तर**

- **(ii)** $\cot^2\theta = [\cot\theta]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{49}{64}$

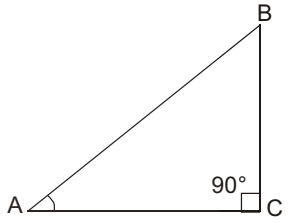
अतः **$\cot^2\theta$ का मान $= \dfrac{49}{64}$** **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि $3 \cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

हल : दिया है, $3 \cot A = 4 \quad \Rightarrow \quad \cot A = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3} = k \text{ (माना)}$$



$\therefore$ यदि $AC = 4k$ और $BC = 3k$ है तो

समकोण ΔACB में, $AB^2 = BC^2 + CA^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$$= (3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$$

$\Rightarrow \quad AB = 5k$

तब, $$\tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)}{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)}{\text{कर्ण } (AB)} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)}{\text{कर्ण } (AB)} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

तब, $$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{16} \times \frac{16}{25} = \frac{7}{25}$$

$\therefore$ $$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{7}{25} \quad \ldots(1)$$

अब, $$\cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$\therefore$ $$\cos^2 A - \sin^2 A = \frac{7}{25} \quad \ldots(2)$$

तब, समीकरण (1) व (2) से, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है। **उत्तर**

प्रश्न 9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

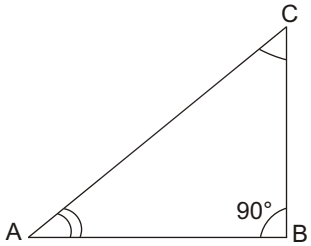
(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

हल : दिया है, समकोण ΔABC में $\angle B = 90°$

तब, $\angle A + \angle C = 90°$ अर्थात $\angle A$ तथा $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

तथा $$\tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \quad \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



माना $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = k$ जहाँ k एक धन संख्या है।

$\therefore$ $BC = k$ तथा $AB = \sqrt{3}k$

तब, समकोण त्रिभुज ABC में,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= (\sqrt{3}\,k)^2 + (k)^2 = 3\,k^2 + k^2 = 4k^2 = (2\,k)^2$$
$$AC = 2\,k$$

तब, $\sin A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\,k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$;

$\cos A = \frac{\angle A \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,k}{2\,k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

और $\sin C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}\,k}{2\,k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos C = \frac{\angle C \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\,k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2}$;

- **(i)** $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = \mathbf{1}$

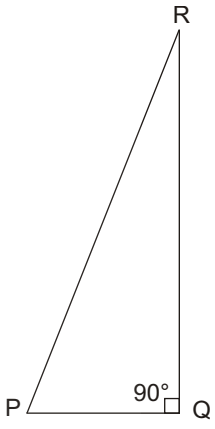
$\therefore$ $\boldsymbol{\sin A \cos C + \cos A \sin C = 1}$ **उत्तर**

- **(ii)** $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0$

$\therefore$ $\boldsymbol{\cos A \cos C - \sin A \sin C = 0}$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $\Delta\, PQR$ में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ सेमी और $PQ = 5$ सेमी है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, समकोण $\Delta\, PQR$ में, $\angle Q = 90°$



$\therefore$ $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow$ $(5)^2 + QR^2 = PR^2$ ($\because$ $PQ = 5$ सेमी)

$\Rightarrow$ $25 = PR^2 - QR^2$

$\Rightarrow$ $25 = (PR + QR)(PR - QR)$ [$\because$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

$\Rightarrow$ $25 = 25\,(PR - QR)$ ($\because$ $PR + QR = 25$, दिया है)

या $PR - QR = 1$ ...(1)

और $PR + QR = 25$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर, $2PR = 26$ या $PR = 13$ सेमी

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर, $2QR = 24$ या $QR = 12$ सेमी

समकोण $\Delta\, PQR$ में,

$$\sin P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{\angle P \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

तथा $$\tan P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle P \text{ की आधार भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

अत: $\boldsymbol{\sin P = \frac{12}{13}}$, $\boldsymbol{\cos P = \frac{5}{13}}$ तथा $\boldsymbol{\tan P = \frac{12}{5}}$ **उत्तर**

प्रश्न 11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) $\cot A$, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

हल : (i) $\because \tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}}$

$\therefore$ $\tan A$ का मान 1 से कम तभी हो सकता है जब $\angle A$ की सम्मुख भुजा, $\angle A$ की आधार भुजा से छोटी हो। परन्तु ऐसा सदैव होना आवश्यक नहीं है।

अत: कथन "$\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है'' **असत्य** है। **उत्तर**

- **(ii)** $\because \sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}}$

  परन्तु दिया है कि $\sec A = \frac{12}{5}$

  जिसका आशय है कि किसी $\angle A$ के लिए समकोण त्रिभुज के कर्ण और $\angle A$ के आधार का अनुपात $12 : 5$ होता है। परन्तु ऐसा सदैव होना आवश्यक नहीं है।

  अत: कथन ''कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$,, **असत्य** है। **उत्तर**

- **(iii)** $\because \cos A$ कोण A की cosine का संक्षिप्त रूप होता है जबकि cosecant A का अर्थ है cosec A;

  अत: दिया हुआ कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **(iv)** $\cot A$ का अर्थ $\angle A$ के cotangent से है।

  स्वतन्त्र रूप में cot का कोई अस्तित्व ही नहीं है। अत cot A, cot और A का गुणनफल कदापि नहीं है।

  अत: दिया हुआ कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **(v)** किसी समकोण त्रिभुज में कोण θ के लिए

  यदि $\sin \theta = \frac{4}{3}$ तो इसका अर्थ है कि θ की सम्मुख भुजा और कर्ण का अनुपात $4 : 3$ है।

  परन्तु कर्ण, समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है।

  अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \text{cosec } 30^\circ}$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \text{cosec } 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

हल : (i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \qquad \left[\because \sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

अत: $\mathbf{\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60° = 1}$ **उत्तर**

- **(ii)** $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \left[\therefore \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ तथा } \operatorname{cosec} 30° = 2, \ \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= (2 \times 1) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

अत: $\mathbf{2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60° = 2}$ **उत्तर**

- **(iii)** $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{1}}$ $\qquad \left[\therefore \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ तथा } \operatorname{cosec} 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times 2(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \times \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2[(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2]} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2(6-2)} \qquad [\because \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2 \times 4} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

अत: $\dfrac{\mathbf{\cos 45°}}{\mathbf{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}} = \dfrac{\mathbf{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}}{\mathbf{8}}$ **उत्तर**

- **(iv)** $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°} = \dfrac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$

$$\left[\therefore \tan 45° = \cot 45° = 1, \ \sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}, \text{ तथा } \operatorname{cosec} 60° = \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} \times \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}-4}$$

[हर व अंश दोनों में हर के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3})^2-(4)^2} \qquad [\because \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{(3\sqrt{3})^2+(4)^2-2\times 4\times 3\sqrt{3}}{27-16}$$

$$[\because \ (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab]$$

$$= \frac{27+16-24\sqrt{3}}{11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

अत: $\dfrac{\mathbf{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}}{\mathbf{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}} = \dfrac{\mathbf{43-24\sqrt{3}}}{\mathbf{11}}$ **उत्तर**

● **(v)** $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ} = \dfrac{\left[5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\left[4\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$\left[\because \quad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \ \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ तथा } \tan 45^\circ = 1\right]$$

$$= \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{1+3}{4}} = \frac{\frac{67}{12}}{1} = \frac{67}{12}$$

अत: $\dfrac{\mathbf{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}}{\mathbf{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}} = \dfrac{\mathbf{67}}{\mathbf{12}}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए :

(i) $\dfrac{\mathbf{2\tan 30^\circ}}{\mathbf{1+\tan^2 30^\circ}} =$

(a) $\sin 60^\circ$ **(b)** $\cos 60^\circ$ **(c)** $\tan 60^\circ$ **(d)** $\sin 30^\circ$.

(ii) $\dfrac{\mathbf{1-\tan^2 45^\circ}}{\mathbf{1+\tan^2 45^\circ}} =$

(a) $\tan 90^\circ$ **(b)** 1 **(c)** $\sin 45^\circ$ **(d)** 0.

(iii) sin 2 *A* = 2 sin *A* तब सत्य होता है, जबकि *A* बराबर है :

(a) 0° **(b)** 30° **(c)** 45° **(d)** 60°.

(iv) $\dfrac{\mathbf{2\tan 30^\circ}}{\mathbf{1-\tan^2 30^\circ}}$ **बराबर है :**

(a) $\cos 60^\circ$ **(b)** $\sin 60^\circ$ **(c)** $\tan 60^\circ$ **(d)** $\sin 30^\circ$.

हल : (i) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30} = \dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\left[\because \ \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{4} \qquad (\because 3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$$

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

- **(ii)** $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$ $[\because \quad \tan 45° = 1]$

$$= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

- **(iii)** $\sin 2A = 2 \sin A$

यदि $A = 0°$, तो $\sin 2A = \sin 2 \times 0° = \sin 0° = 0$

और $2 \sin A = 2 \sin 0° = 2 \times 0 = 0$

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

- **(iv)** $\frac{2 \tan 30°}{1-\tan^2 30°} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\left[\because \quad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$$= \tan 60° \qquad (\because \sqrt{3} = \tan 60°)$$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि $\tan (A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A+B \le 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\tan (A+B) = \sqrt{3}$

या $\tan (A+B) = \tan 60° \Rightarrow A+B = 60°$ ...(1)

तथा $\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan (A-B) = \tan 30° \Rightarrow A-B = 30°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर, $2A = 90° \Rightarrow A = 45°$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर, $2B = 30° \Rightarrow B = 15°$

अत: $A = 45°$ तथा $B = 15°$ **उत्तर**

प्रश्न 4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$.

(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$

(v) $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

हल : (i) माना कि $A = 30°$ तथा $B = 30°$

तो $\sin(A+B) = \sin(30° + 30°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और $\sin A + \sin B = \sin 30° + \sin 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\therefore$ $\sin(A+B) \neq \sin A + \sin B$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **(ii)** $\because$ $\sin 0° = 0,\ \sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin 90° = 1$

$\therefore$ θ का मान बढ़ने पर $\sin\theta$ का मान भी बढ़ता है परन्तु यह $\theta = 90°$ तक ही सही है, आगे नहीं।

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

- **(iii)** $\because$ $\cos 0° = 1$ और $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \cos 90° = 0$

स्पष्ट है कि θ का मान बढ़ने पर $\cos\theta$ में वृद्धि नहीं होती।

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **(iv)** $\because$ $\sin\theta = \cos\theta$

$\therefore$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°$

$\therefore$ θ के सभी मानों के लिए $\sin\theta \neq \cos\theta$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **(v)** त्रिकोणमितीय अनुपातों के विभिन्न मानों के लिए संकलित सारणी को देखने से स्पष्ट है कि $\cot A$ = अनिर्धारित

$\therefore$ $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

प्रश्नावली 8.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित का मान निकालिए :

(i) $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ **(ii)** $\frac{\tan 26°}{\cot 64°}$

(iii) $\cos 48° - \sin 42°$ **(iv)** $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

हल : (i) $\because$ $\sin 18° = \sin(90° - 72°)$

$= \sin(90° - A)$ [माना कि $72° = A$]

$= \cos A$ [$\because \sin(90° - A) = \cos A$]

$= \cos 72°$ [$\because A = 72°$]

$\Rightarrow$ $\sin 18° = \cos 72°$

$\Rightarrow$ $\frac{\sin 18°}{\cos 72°} = 1$ [गुणा के पक्षान्तरण द्वारा]

अत: $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ **का मान = 1** **उत्तर**

- **(ii)** $\because$ $\tan 26° = \tan(90° - 64°)$

$= \tan(90° - A)$ [माना कि $64° = A$]

$= \cot A$ [$\because \tan(90° - A) = \cot A$]

$= \cot 64°$ [$\because A = 64°$]

$\Rightarrow \quad \tan 26^\circ = \cot 64^\circ$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$ [गुणा के पक्षान्तरण द्वारा]

अत: $\dfrac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$ **का मान = 1** **उत्तर**

● **(iii)** $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \cos(90^\circ - 42^\circ) - \sin 42^\circ$

$= \cos(90^\circ - A) - \sin 42^\circ$ [माना कि $A = 42^\circ$]

$= \sin A - \sin 42^\circ$ [$\because \cos(90^\circ - A) = \sin A$]

$= \sin 42^\circ - \sin 42^\circ$ [$\because A = 42^\circ$]

$= 0$

अत: $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = 0$ **उत्तर**

● **(iv)** $\text{cosec } 31^\circ - \sec 59^\circ = \text{cosec}(90^\circ - 59^\circ) - \sec 59^\circ$

$= \text{cosec}(90^\circ - A) - \sec A$ [माना कि $A = 59^\circ$]

$= \sec A - \sec A$ [$\because \text{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$]

$= 0$

अत: $\text{cosec } 31^\circ - \sec 59^\circ = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 2. दिखाइए कि

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

हल : (i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$

$= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan(90^\circ - 48^\circ) \tan(90^\circ - 23^\circ)$

$= \tan A \tan B \tan(90^\circ - A) \tan(90^\circ - B)$

[माना $A = 48^\circ$ तथा $B = 23^\circ$]

$= \tan A \tan B \cot A \cot B$ [$\because \tan(90^\circ - \theta)] = \cot\theta$]

$= \tan A \tan B . \dfrac{1}{\tan A} \cdot \dfrac{1}{\tan B}$

$\left[\because \cot A = \dfrac{1}{\tan A} \text{ तथा } \cot B = \dfrac{1}{\tan B}\right]$

$= 1$

अत: $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$ **Proved.**

● **(ii)** $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$

$= \cos 38^\circ \cos(90^\circ - 38^\circ) - \sin 38^\circ \sin(90^\circ - 38^\circ)$

$= \cos A \cos(90^\circ - A) \sin A \sin(90^\circ - A)$ [यदि $38^\circ = A$ हो]

$= \cos A \sin A - \sin A \cos A$

[$\because \cos(90^\circ - A) = \sin A$ और $\sin(90^\circ - A) = \cos A$]

$= \sin A \cos A - \sin A \cos A$

$= 0$

अत: $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$ **Proved.**

प्रश्न 3. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ 2A एक न्यूनकोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \cot(A - 18^\circ)$ [माना $2A = \theta$]

$\Rightarrow \quad \cot(90^\circ - \theta) = \cot(A - 18^\circ)$ [$\because \tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)$]

$\Rightarrow \quad 90^\circ - \theta = A - 18^\circ$

$\Rightarrow \quad 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$ [$\theta = 2A$ रखने पर]

$\Rightarrow \quad 90° + 18° = A + 2A$

$\therefore \quad 3A = 108° \quad \Rightarrow \quad A = \frac{108°}{3} = 36°$

अत: A **का मान** $= 36°$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि $\tan A = \cot B$ तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90°$.

हल : दिया है, $\tan A = \cot B$

$\Rightarrow \quad \tan A = \tan (90° - B)$ [सूत्र : $\cot \theta = \tan (90° - \theta)$ से]

$\Rightarrow \quad A = 90° - B$

$\therefore \quad A + B = 90°$ [पक्षान्तरण द्वारा]

अत: **स्पष्ट है कि $\tan A = \cot B$ होने पर $A + B = 90°$ होगा।** **Proved.**

प्रश्न 5. यदि $\sec 4A = \text{cosec}\,(A - 20°)$, जहाँ $4A$ एक न्यूनकोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\sec 4A = \text{cosec}\,(A - 20°)$ ...(1)

$\sec 4A = \text{cosec}\,(90° - 4A)$ ...(2) [सूत्र $\sec \theta = \text{cosec}\,(90° - A)$ से]

समीकरण (2) से $\sec 4A$ का मान दिए हुए समीकरण (1) में रखने पर,

$\text{cosec}\,(A - 20°) = \text{cosec}\,(90° - 4A)$

$\Rightarrow \quad A - 20° = 90° - 4A$

$\Rightarrow \quad A + 4A = 90° + 20°$

$\Rightarrow \quad 5A = 110° \quad \Rightarrow \quad A = \frac{110°}{5} = 22°$

अत: $A = 22°$ **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्त:कोण हों तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

हल : यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्त:कोण हों तो

हम जानते हैं कि **त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग** $= 180°$

$\therefore \quad A + B + C = 180°$

$\Rightarrow \quad (B + C) = 180° - A$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{180° - A}{2} = 90° - \frac{A}{2}$

दोनों ओर sine अनुपात लेने पर,

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ [सूत्र $\sin (90° - \theta) = \cos \theta$ से]

अत: $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ **Proved.**

प्रश्न 7. $\sin 67° + \cos 75°$ को $0°$ और $45°$ के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\sin 67° + \cos 75° = \sin (90° - 23°) + \cos (90° - 15°)$

$= \sin (90° - A) + \cos (90° - B)$ [माना $23° = A$ तथा $15° = B$]

$= \cos A + \sin B$ [$\because \sin (90° - A) = \cos A$, $\cos (90° - B) = \sin B$]

$= \cos 23° + \sin 15°$ [$\because A = 23°$ व $B = 15°$]

अत: $\sin 67° + \cos 75° = \cos 23° + \sin 15°$ **उत्तर**

प्रश्नावली 8.4

प्रश्न 1. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : ∵ हम जानते हैं $\cot A$ और $\operatorname{cosec} A$ में सम्बन्ध '$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$' है और $\operatorname{cosec} A$ और $\sin A$ में सम्बन्ध प्रतिलोम का है।

$$\therefore \quad \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

तब, $$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$ **उत्तर**

इसी प्रकार,

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\Rightarrow \quad \sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A} = \sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$

और $$\mathbf{\tan A = \frac{1}{\cot A};}$$

अत: $$\mathbf{\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}};\ \sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}}$$ तथा $$\mathbf{\tan A = \frac{1}{\cot A}}$$

उत्तर

प्रश्न 2. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

हल : (i) ∵ $$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} \qquad [\because\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \tan^2 A}{\tan^2 A}}} \qquad \left[\because\ \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\tan^2 A}}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \tan^2 A - 1}}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} \qquad \textbf{(Note)}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sqrt{\sec^2 A}} \qquad [\because\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}$$ **उत्तर**

● **(ii)** $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$ **उत्तर**

● **(iii)** $\tan A = \sqrt{\tan^2 A}$

$= \sqrt{1 + \tan^2 A - 1}$ **(Note)**

$= \sqrt{\sec^2 A - 1}$ $[\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$

$\therefore$ $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$ **उत्तर**

● **(iv)** $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\tan^2 A}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A - 1}}$ **(Note)**

$= \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ $[\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$

$\therefore$ $\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ **उत्तर**

● **(v)** $\operatorname{cosec} A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \sqrt{1 + \cot^2 A} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\tan^2 A}}$ $\left[\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \text{ तथा } \cot A = \dfrac{1}{\tan A}\right]$

$= \sqrt{\dfrac{1 + \tan^2 A}{\tan^2 A}} = \sqrt{\dfrac{\sec^2 A}{1 + \tan^2 A - 1}} = \sqrt{\dfrac{\sec^2 A}{\sec^2 A - 1}} = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. मान निकालिए :

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

हल : (i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°} = \dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 (90° - 63°)}{\cos^2 17° + \cos^2 (90° - 17°)}$

$= \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 (90° - A)}{\cos^2 \theta + \cos^2 (90° - \theta)}$ [माना $A = 63°$ तथा $\theta = 17°$]

$= \dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

$[\because \sin (90° - A) = \cos A, \cos (90° - A) = \sin A]$

$= \dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$

$= \frac{1}{1}$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ तथा $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$

$= 1$

अत: $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ का मान $= 1$ **उत्तर**

● **(ii)** $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

$= \sin A \cos (90° - A) + \cos A . \sin (90° - A)$ [माना $A = 25°$]

$= \sin A . \sin A + \cos A . \cos A$

$[\because \cos (90° - A) = \sin A$ तथा $\sin (90° - A) = \cos A]$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= \sin^2 25° + \cos^2 25°$ $[\because A = 25°]$

$= 1$

अत: $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65° = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 4. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ **बराबर है :**

(a) 1 **(b)** 9 **(c)** 8 **(d)** 0.

(ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$ **बराबर है :**

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** − 1.

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ **बराबर है :**

(a) $\sec A$ **(b)** $\sin A$ **(c)** $\operatorname{cosec} A$ **(d)** $\cos A$.

(iv) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ **बराबर है :**

(a) $\sec^2 A$ **(b)** − 1 **(c)** $\cot^2 A$ **(d)** $\tan^2 A$.

हल : (i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A = 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$

$= 9 (1 + \tan^2 A - \tan^2 A)$ $[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$= 9 \times (1)$

$= 9$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

● **(ii)** $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$

$= \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)\left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right)$

$\left[\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ तथा $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}\right]$

$= \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}$

$= \frac{[(\sin \theta + \cos \theta) + 1]\,[(\sin \theta + \cos \theta) - 1]}{\sin \theta \cos \theta}$

$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta}$ [सूत्र $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से]

$= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$

$[\because (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$$= \frac{1 + 2 \sin\theta \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta} \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= 2$$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

- **(iii)** $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) = \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}(1 - \sin A)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A} \qquad [\text{सूत्र } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ से}]$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A} \qquad [\text{सूत्र } 1 - \sin^2 A = \cos^2 A \text{ से}]$$

$$= \cos A$$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

- **(iv)** $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$ $\left[\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A, \; 1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A\right]$

$$= \left[\frac{\sec A}{\text{cosec } A}\right]^2 = \left[\frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\sin A}}\right]^2 \qquad \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}, \; \text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right]^2 = \left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [\tan A]^2 \qquad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$= \tan^2 A$$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यूनकोण हैं :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ **(ii)** $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \, \text{cosec}\,\theta$ **(iv)** $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

(v) सर्वसमिका $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec } A + \cot A$$

(vi) $\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$ **(vii)** $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(x) $\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

हल : (i) L.H.S. $= (\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$ $\left[\because \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} \qquad [\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta]$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \qquad [\because a^2-b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\boldsymbol{(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ **Proved.**

- **(ii) L.H.S.** $= \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

$$= \frac{1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} \qquad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} \qquad [(1+\sin A) \text{के निरसन से}]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos A}$$

$$= 2\sec A = \textbf{R.H.S.} \qquad \left[\because \frac{1}{\cos A} = \sec A\right]$$

अत: $\boldsymbol{\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A}$ **Proved.**

- **(iii) L.H.S.** $= \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)]$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1 + \sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} + 1$$

$$= \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta + 1 = 1 + \sec\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$$

$$\left[\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\right]$$

$$= \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ **Proved.**

- **(iv) L.H.S.** $= \dfrac{1 + \sec A}{\sec A} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A}} = \dfrac{\dfrac{\cos A + 1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos A}}$ $\left[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A}\right]$

$$= \frac{(1 + \cos A)}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1} = \frac{1 + \cos A}{1}$$

$$= \frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)}$$ [हर व अंश को $(1 - \cos A)$ से गुणा करने पर]

$$= \frac{(1)^2 - (\cos A)^2}{1 - \cos A}$$ [सूत्र : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ से]

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A}$$ $[\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A]$

$$= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\dfrac{1 + \sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ **Proved.**

- **(v)** $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \dfrac{\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\sin A}}{\dfrac{\cos A + \sin A - 1}{\sin A}}$ [हर व अंश प्रत्येक को $\sin A$ से भाग देने पर]

$$= \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \dfrac{\sin A}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin A}}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{\sin A} - \dfrac{1}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cot A - 1 + \text{cosec } A}{\cot A + 1 - \text{cosec } A} \qquad \left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ तथा } \text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{(\cot A + \text{cosec } A) - 1}{(1 - \text{cosec } A + \cot A)}$$

$$= \frac{(\text{cosec } A + \cot A) - (\text{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{(1 - \text{cosec } A + \cot A)} \qquad [\because \text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$$

$$= \frac{(\text{cosec } A + \cot A) - (\text{cosec } A - \cot A)(\text{cosec } A + \cot A)}{(1 - \text{cosec } A + \cot A)}$$

$$= \frac{(\text{cosec } A + \cot A)[1 - (\text{cosec } A - \cot A)]}{(1 - \text{cosec } A + \cot A)}$$

$$= \frac{(\text{cosec } A + \cot A)(1 - \text{cosec } A + \cot A)}{(1 - \text{cosec } A + \cot A)}$$

$$= (\text{cosec } A + \cot A) = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\dfrac{\boldsymbol{\cos A - \sin A + 1}}{\boldsymbol{\cos A + \sin A - 1}} = \textbf{cosec } \boldsymbol{A} + \textbf{cot } \boldsymbol{A}$ **Proved.**

● **(vi) L.H.S.** $= \sqrt{\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sqrt{\dfrac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}}$

[हर व अंश दोनों को हर के संयुग्मी $(1 + \sin A)$ से गुणा करने पर]

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{(1 - \sin^2 A)}}$$ [सूत्र : $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ से]

$$= \frac{(1 + \sin A)}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} = \frac{1 + \sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$$ $[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$

$$= \frac{1 + \sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A = \textbf{R.H.S.} \qquad \left[\because \frac{1}{\cos A} = \sec A \text{ तथा } \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A\right]$$

अत: $\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{1 + \sin A}}{\boldsymbol{1 - \sin A}}} = \textbf{sec } \boldsymbol{A} + \textbf{tan } \boldsymbol{A}$ **Proved.**

● **(vii) L.H.S.** $= \dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \dfrac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{(1 - 2\sin^2\theta)}{[2(1 - \sin^2\theta) - 1]}$$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ रखने पर]

$$= \tan\theta \times \frac{(1 - 2\sin^2\theta)}{[2 - 2\sin^2\theta - 1]} \qquad \left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \tan\theta \times \frac{(1 - 2\sin^2\theta)}{(1 - 2\sin^2\theta)}$$ [हर को सरल करने पर]

$$= \tan\theta = \textbf{R.H.S.}$$ [निरसन से]

अत: $\dfrac{\boldsymbol{\sin\theta - 2\sin^3\theta}}{\boldsymbol{2\cos^3\theta - \cos\theta}} = \textbf{tan } \boldsymbol{\theta}$ **Proved.**

● **(viii) L.H.S.** $= (\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$$= \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A \text{ cosec } A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \sec A$$

$[\because (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \sec^2 A + \text{cosec}^2 A + 2\sin A \text{ cosec } A + 2\cos A \sec A$$

$[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1,\ \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \text{ तथा } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

$$= 1 + (1 + \tan^2 A) + (1 + \cot^2 A) + 2 \sin A \times \frac{1}{\sin A} + 2 \cos A \times \frac{1}{\cos A}$$

$$\left[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \text{ तथा } \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= 1 + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A + 2 + 2$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\textbf{(sin } A + \textbf{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$ **Proved.**

● **(ix) L.H.S.** $= (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$$= \left(\operatorname{cosec} A - \frac{1}{\operatorname{cosec} A}\right)\left(\sec A - \frac{1}{\sec A}\right)\left[\because \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A},\ \cos A = \frac{1}{\sec A}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 A - 1}{\operatorname{cosec} A} \times \frac{\sec^2 A - 1}{\sec A}$$

$$= \frac{\cot^2 A}{\operatorname{cosec} A} \times \frac{\tan^2 A}{\sec A} \qquad [\because \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A \text{ तथा } \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$$

$$= \frac{(\cot A . \tan A)^2}{\frac{1}{\sin A} \times \frac{1}{\cos A}} = \frac{\left(\frac{1}{\tan A} \times \tan A\right)^2}{\frac{1}{\sin A \cos A}} \qquad \left[\because \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$$

$$= \frac{(1)^2}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} \qquad [\because 1 = \sin^2 A + \cos^2 A]$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\sin A \cos A} + \frac{\cos^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}} \qquad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ तथा } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{1}{\tan A + \cot A} = \textbf{L.H.S.}$$

अत: $\textbf{(cosec } A - \textbf{sin } A)\textbf{ (sec } A - \textbf{cos } A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ **Proved.**

● **(x)** सिद्ध करना है, $\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

$$\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} \qquad \left[\because \begin{array}{l} 1 + \tan^2 = \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \end{array}\right]$$

$$= \left(\frac{\sec A}{\operatorname{cosec} A}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\sin A}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right)^2 = \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A},\ \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\right]$$

$$= (\tan A)^2 \qquad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \tan^2 A \qquad \ldots(1)$$

पुनः $\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2 \qquad \left[\because \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{-\frac{1-\tan A}{\tan A}}\right)^2 = \left((1-\tan A)\times -\frac{\tan A}{(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= (-\tan A)^2 = \tan^2 A$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A \qquad \ldots(2)$$

तब, समीकरण (1) व (2) से,

$$\left(\frac{\mathbf{1+\tan^2 A}}{\mathbf{1+\cot^2 A}}\right) = \left(\frac{\mathbf{1-\tan A}}{\mathbf{1-\cot A}}\right)^2 = \mathbf{\tan^2 A}$$ **Proved.**