माध्यमिक शिक्षा परिषद्, उ० प्र० द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रमानुसार।

Active™ NCERT BASED

An **Easy Textbook**

(एक सरल पाठ्यपुस्तक)

गणित कक्षा | 10

माध्यमिक शिक्षा परिषद् उ० प्र० द्वारा प्रेषित प्रतिदर्श प्रश्न-पत्र पर आधारित

5 Solved Sample Papers

Sample Paper | 1

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] [**पूर्णांक :** 70

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड में दिए गए प्रश्न के उत्तर के लिए चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से केवल एक सही है। सही विकल्प छाँटकर उसे अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए :

(क) परिमेय संख्या $\frac{14587}{1250}$ का दशमलव प्रसार निम्नलिखित किन दशमलव स्थानों के बाद समाप्त हो जाएगा :

(a) एक (b) दो (c) तीन (d) चार। 1

हल : परिमेय संख्या $= \frac{14587}{1250} = \frac{14587}{2 \times 5^4} = \frac{14587}{2^4 \times 5^4} \times 2^3 = \frac{14587 \times 8}{10^4} = \frac{116696}{10000} = 11.6696$

$\therefore$ दशमलव के चार स्थान बाद दी गयी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार समाप्त हो जाता है।

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

(ख) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, c \neq 0$ के शून्यक बराबर हैं, तो : 1

(a) c और a विपरीत चिह्नों के हैं (b) c और b विपरीत चिह्नों के हैं

(c) c और a एक ही चिह्न के हैं (d) c और b एक ही चिह्न के हैं।

हल : दिए गए द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, c \neq 0$ के शून्यक बराबर होंगे यदि x^2 का गुणांक तथा अचर पद समान चिह्न रखते हैं अर्थात c तथा a समान चिह्न रखते हैं जबकि b अर्थात x का गुणांक धनात्मक/ऋणात्मक कुछ भी हो सकता है परन्तु शून्य नहीं हो सकता है।

उदाहरण : (i) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

$\Rightarrow f(x) = (x+3)^2$

शून्यक के लिए,

$(x+3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -3, -3$

(ii) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2$

शून्यक के लिए,

$(x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 3, 3$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ग) द्विघात समीकरण $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ के : 1

(a) दो भिन्न वास्तविक मूल हैं (b) दो बराबर वास्तविक मूल हैं

(c) कोई वास्तविक मूल नहीं है (d) दो से अधिक वास्तविक मूल हैं।

हल : दी गई समीकरण : $2x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

उक्त की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 2, \quad b = -\sqrt{5} \quad c = 1$$

$\therefore$ विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$$= (-\sqrt{5})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 5 - 8 = -3 < 0$$

$\because$ विविक्तकर ऋणात्मक है, अत: दी गई द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(घ) A. P. : $-11, -8, -5, \ldots, 49$ के अन्त से चौथा पद है : 1

(a) 37 (b) 40 (c) 43 (d) 58.

हल : हम जानते हैं कि किसी A.P. का अन्त से nवाँ पद :

$$a_n = l - (n-1)\,d \qquad \ldots(1)$$

यहाँ, $l = 49 =$ अन्तिम पद (दिया है)

सार्वअन्तर, $d = -8 - (-11) = -8 + 11 = 3$

समीकरण (1) से,

$$a_4 = 49 - (4-1) \times 3 = 49 - 3 \times 3 = 49 - 9$$

$\therefore$ $a_4 = 40$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(ङ) बिन्दु $P(-6, 8)$ की मूलबिन्दु से दूरी है : 1

(a) 8 (b) $2\sqrt{7}$ (c) 10 (d) 6.

हल : $\because$ बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

यहाँ, $x_1 = -6, y_1 = 8$ तथा मूलबिन्दु अर्थात $x_2 = 0, y_2 = 0$

$\therefore$ $P(-6, 8)$ तथा मूलबिन्दु अर्थात $O(0, 0)$ के बीच की दूरी,

$$PO = \sqrt{[0-(-6)]^2 + (0-8)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \sqrt{(10)^2} = 10$$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(च) यदि $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ और $\cos\beta = \frac{1}{2}$ दिया है, तो $(\alpha + \beta)$ का मान है : 1

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90°.

हल : दिया है, $\sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30°$ $\left[\because \sin 30° = \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow$ $\alpha = 30°$

तथा $\cos\beta = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\Rightarrow$ $\beta = 60°$

$\therefore$ $\alpha + \beta = 30° + 60° = 90°$

$\therefore$ $(\alpha + \beta)$ का अभीष्ट मान 90° है।

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}$ तथा -1 है। 1

हल : माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= \alpha + \beta$ तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\,\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग $\frac{1}{4}$ तथा गुणनफल -1 है।

$\therefore$ $$(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} \quad \text{और} \quad \alpha\,\beta = -1 \qquad ...(1)$$

तब, द्विघात बहुपद $= (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)\,x + \alpha\,\beta$

$$= x^2 - \frac{1}{4}x + (-1) \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$= \frac{4x^2 - x - 4}{4} = k\,(4x^2 - x - 4)$$

अत: **अभीष्ट बहुपद $4x^2 - x - 4$** या **$k\,(4x^2 - x - 4)$** है, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है। **उत्तर**

(ख) क्या श्रेढ़ी $3,\ 3+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2},\ 3+3\sqrt{2},\ldots$ एक A.P. है? यदि हाँ, तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए और इसके तीन और पद लिखिए। 1

हल : दिया हुआ अनुक्रम : $3,\ 3+\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2},\ 3+3\sqrt{2},\ldots$

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3+\sqrt{2}, \quad a_3 = 3+2\sqrt{2}, \quad a_4 = 3+3\sqrt{2}$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर : $a_2 - a_1 = (3+\sqrt{2}) - 3 = \sqrt{2}$

$$a_3 - a_2 = (3+2\sqrt{2}) - (3+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$a_4 - a_3 = (3+3\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर नियत $(\sqrt{2})$ है।

$\therefore$ **सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ और दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।** **उत्तर**

तब, पाँचवाँ पद $a_5 = a_1 + 4\,d = 3 + 4\sqrt{2}$

छठा पद $a_6 = a_1 + 5\,d = 3 + 5\sqrt{2}$

सातवाँ पद $a_7 = a_1 + 6\,d = 3 + 6\sqrt{2}$

अत: **दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद हैं :**

$$\mathbf{3 + 4\sqrt{2}, \quad 3 + 5\sqrt{2}, \quad 3 + 6\sqrt{2}}$$ **उत्तर**

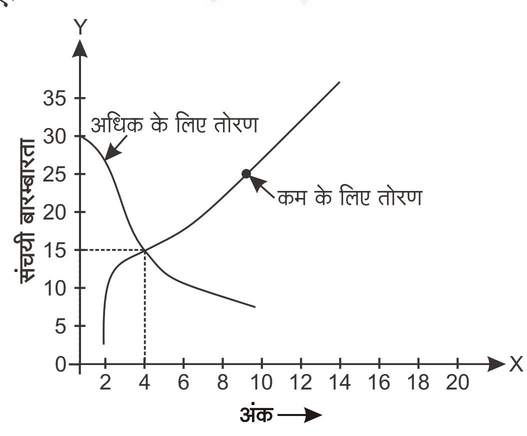
(ग) सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\tan 47^\circ}{\cot 43^\circ} = 1$ 1

हल : $$\frac{\tan 47^\circ}{\cot 43^\circ} = \frac{\tan(90^\circ - 43^\circ)}{\cot 43^\circ} = \frac{\cot 43^\circ}{\cot 43^\circ} \qquad [\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta]$$

$$= 1$$

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(घ) निम्न आकृति में "कम के लिए" तथा "अधिक के लिए" तोरण के आलेख का प्रयोग करते हुए आँकड़ों के माध्यक का मान ज्ञात कीजिए। 1



हल : ''अधिक के लिए'' तथा ''कम के लिए'' तोरण के प्रतिच्छेद बिन्दु पर x–निर्देशांक माध्यक को दर्शाता है।

$\therefore$ माध्यक = 4 **उत्तर**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) एक विद्यार्थी कहता है कि यदि आप एक पासे को फेंकेंगे, तो यह या तो 1 दर्शाएगा या 1 नहीं दर्शाएगा। इसलिए, 1 प्राप्त करने और 1 नहीं प्राप्त करने में से प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। क्या यह सही है? कारण दीजिए। 2

हल : यदि हम एक पासे को फेंकते हैं

तो कुल सम्भव परिणाम = 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6

$\therefore$ कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 6

अब 1 प्राप्त होने के सम्भावित परिणाम = केवल 1

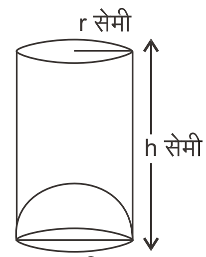
$\therefore$ सम्भावित परिणामों की संख्या = 1

$\therefore$ '1' प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

अब '1' नहीं प्राप्त होने की प्रायिकता = 1 – '1' प्राप्त होने की प्रायिकता = $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(ख) एक बेलनाकार बर्तन, जिसकी तली में अर्द्धगोलाकार भाग आकृति में दर्शाए अनुसार ऊपर की ओर उठा हुआ है, की धारिता $\frac{\pi r^2}{3}[3h-2r]$ है। क्या यह सही है? कारण दीजिए। 2



आकृति

हल : हम जानते हैं,

बेलन की धारिता = $\pi r^2 h$ सेमी^{3}

तथा अर्द्धगोले की धारिता = $\frac{2}{3}\pi r^3$ सेमी

चित्रानुसार, बेलनाकार बर्तन की धारिता = बेलन की धारिता – अर्द्धगोले की धारिता

$$= \pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2(3h-2r)$$

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(ग) दो समरूप त्रिभुजों के संगत शीर्षलम्बों का अनुपात $\frac{3}{5}$ है। क्या यह कहना सही है कि इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात $\frac{6}{5}$ है? क्यों? 2

हल : दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के गुण से,

$$\frac{\text{क्षेत्रफल}_1}{\text{क्षेत्रफल}_2} = \left(\frac{\text{शीर्षलम्ब}_1}{\text{शीर्षलम्ब}_2}\right)^2$$

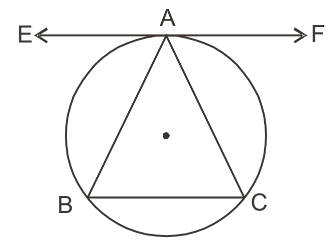
$$\Rightarrow \left(\frac{\text{क्षेत्रफल}_1}{\text{क्षेत्रफल}_2}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \qquad \left[\because \frac{\text{शीर्षलम्ब}_1}{\text{शीर्षलम्ब}_2} = \frac{3}{5}, (\text{दिया है})\right]$$

$$= \frac{9}{25} \neq \frac{6}{5}$$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(घ) $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC के शीर्ष A पर त्रिभुज के परिवृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा भुजा BC के समान्तर होती है। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए। 2

हल : माना समद्विबाहु $\Delta\ ABC$ के परिवृत्त पर स्पर्श रेखा EAF है।



दिया है, $$AB = AC$$

$\Rightarrow$ $$\angle ABC = \angle ACB \quad ...(1)$$

[$\because$ समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।]

अब चूँकि $\angle EAB$ और $\angle BCA$ जीवा AB के एकान्तर वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$\therefore$ $$\angle EAB = \angle BCA \quad ...(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\angle EAB = \angle ABC \quad \Rightarrow \quad EAF \parallel BC$$

अत: स्पर्श रेखा भुजा BC के समान्तर है।

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) समीकरण $\lambda\, x + 3\, y = -\,7,\ 2x + 6y = 14$ के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए, λ का मान 1 होना चाहिए। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए। 2

हल : दिया गया रैखिक समीकरण युग्म है :

$$\lambda\, x + 3\, y = -\,7 \quad \Rightarrow \quad \lambda\, x + 3\, y + 7 = 0 \quad ...(1)$$

तथा $$2\, x + 6\, y = 14 \quad \Rightarrow \quad 2\, x + 6\, y - 14 = 0 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$$a_1 = \lambda, \quad b_1 = 3, \quad c_1 = 7$$

तथा $$a_2 = 2, \quad b_2 = 6, \quad c_2 = -\,14$$

यहाँ, $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{-14} = -\frac{1}{2}$$

चूँकि दिए गए समीकरण के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं अर्थात दोनों रेखाएँ सम्पाती होंगी।

जिसके लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad \frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $$\lambda = 1 \quad \text{तथा} \quad \lambda = -\,1$$

परन्तु हम देखते हैं कि $\lambda = 1$ पर,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ जो कि समान्तर रेखाओं के एक युग्म के प्रतिबन्ध को दर्शाता है।

$\therefore$ दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का $\lambda = 1$ पर कोई हल नहीं है।

$\lambda = -\,1$ पर, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ जो कि प्रतिच्छेदी रेखाओं के एक युग्म के प्रतिबन्ध को दर्शाता है।

$\therefore$ दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का $\lambda = -\,1$ पर एक अद्वितीय हल है।

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(ख) $6x^2 - \sqrt{2}x - 2 = 0$ के मूल संगत द्विघात बहुपद के गुणनखण्ड करके ज्ञात कीजिए। 2

हल : $$6x^2 - \sqrt{2}\,x - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$6x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,x - 2 = 0$$

$\Rightarrow \quad 3.2x^2 - 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}.\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad 3x(2x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(2x - \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow \quad (2x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow \quad 2x - \sqrt{2} = 0$ या $3x + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ या $x = \frac{-\sqrt{2}}{3}$

अत: **अभीष्ट मूल $\frac{\sqrt{2}}{2}$ और $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ हैं।** **उत्तर**

(ग) क्या A.P.: 31, 28, 25, ... का 0 कोई पद है? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए। 2

हल : माना दी गई A.P. का nवाँ पद 0 है अर्थात $a_n = 0$

दिया है, प्रथम पद $a = 31$ तथा सार्वअन्तर $d = 28 - 31 = -3$

$\because$ A.P. का nवाँ पद $a_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad 0 = 31 + (n-1) = (-3) \quad \Rightarrow \quad 3(n-1) = 31 \quad \Rightarrow \quad n - 1 = \frac{31}{3}$

$\Rightarrow \quad n = 1 + \frac{31}{3} = \frac{31+3}{3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$

चूँकि n एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए।

अत: **0 दी गई A.P. का कोई पद नहीं है।** **उत्तर**

(घ) सिद्ध कीजिए : $(\mathbf{cosec}\,\theta - \mathbf{cot}\,\theta)^2 = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ 2

हल : L.H.S. $= (\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \qquad \left[\because \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} \qquad [\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta]$$

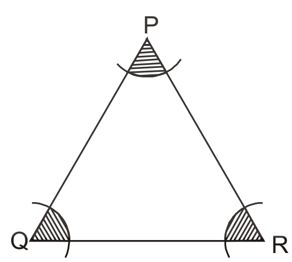
$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $(\mathbf{cosec}\,\theta - \mathbf{cot}\,\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ **Proved.**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दी गई आकृति में, 14 सेमी की त्रिज्याएँ लेकर तथा P, Q और R को केन्द्र मानकर चाप खींचे गए हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4



हल : दिया है, प्रत्येक चाप की त्रिज्या $(r) = 14$ सेमी

अब, केन्द्रीय कोण P के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\angle P}{360°} \times \pi r^2 = \dfrac{\angle P}{360°} \times (\pi) \times (14)^2$ सेमी^{2}

$\left[\because \text{ केन्द्रीय कोण } \theta \text{ तथा त्रिज्या } r \text{ के किसी त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल } = \dfrac{\pi r^2}{360°} \times \theta\right]$

केन्द्रीय कोण Q के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\angle Q}{360°} \times \pi r^2 = \dfrac{\angle Q}{360°} \times \pi \times (14)^2$ सेमी^{2}

तथा केन्द्रीय कोण R के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\angle R}{360°} \times \pi r^2 = \dfrac{\angle R}{360°} \times \pi \times (14)^2$ सेमी^{2}

इस प्रकार, तीनों त्रिज्यखण्डों के क्षेत्रफलों का योग (सेमी^{2} में)

$$= \frac{\angle P}{360°} \times \pi \times (14)^2 + \frac{\angle Q}{360°} \times \pi \times (14)^2 + \frac{\angle R}{360°} \times \pi \times (14)^2$$

$$= \frac{\angle P + \angle Q + \angle R}{360°} \times 196 \times \pi = \frac{180°}{360°} \times 196\pi \text{ सेमी}^2$$

[$\because$ त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।]

$$= \frac{1}{2} \times 196\pi = 98 \times \frac{22}{7} = 14 \times 22 = 308 \text{ सेमी}^2$$

अत: **छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल 308 सेमी^{2} है।** **उत्तर**

(ख) एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $BC = 12$ सेमी, $AB = 5$ सेमी और $\angle B = 90°$ है। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ हो। क्या नया त्रिभुज भी एक समकोण त्रिभुज है? 4

हल : रचना के पद :

(1) $BC = 12$ सेमी का रेखाखण्ड खींचा।

(2) बिन्दु B से $AB = 5$ सेमी खींची जोकि B पर समकोण बनाती है।

(3) बिन्दु AC को मिलाया। $\Delta\ ABC$ दिया गया समकोण त्रिभुज है।

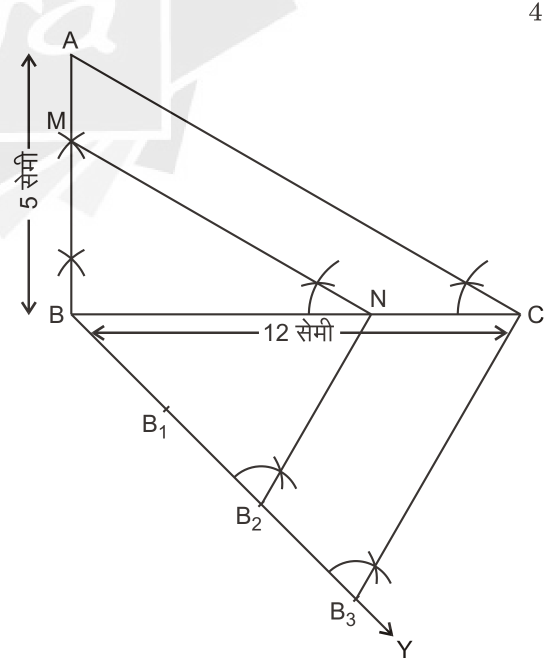
(4) बिन्दु B से, नीचे की ओर न्यूनकोण $\angle CBY$ बनाया।

(5) किरण BY पर तीन बिन्दुओं B_1, B_2, B_3 को इस प्रकार दर्शाएँ कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$।

(6) B_2N को मिलाया।

(7) बिन्दु B_2 से, $B_2N \parallel B_3C$ खींची जोकि BC को N पर प्रतिच्छेद करती है।

(8) बिन्दु N से, $NM \parallel CA$ खींची जोकि BA को M पर काटती है। $\Delta\ MBN$ अभीष्ट त्रिभुज है। अत: $\Delta\ MBN$ भी B बिन्दु पर समकोण त्रिभुज है।



(ग) निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 50 है। यदि सभी बारम्बारताओं का योग 90 है, तो p और q के मान ज्ञात कीजिए। 4

प्राप्तांक	बारम्बारता
20 – 30	p
30 – 40	15
40 – 50	25
50 – 60	20
60 – 70	q
70 – 80	8
80 – 90	10

हल : सर्वप्रथम हम संचयी बारम्बारता सारणी की रचना करेंगे।

प्राप्तांक	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता (cf)
20 – 30	p	p
30 – 40	15	$p+15$
40 – 50	25	$p+40=cf$
50 – 60	20	$p+60$
60 – 70	q	$p+q+60$
70 – 80	8	$p+q+68$
80 – 90	10	$p+q+78$

दिया है कि, $N = 90$

$\therefore \quad \dfrac{N}{2} = \dfrac{90}{2} = 45$

जो कि अन्तराल (50 – 60) में स्थित है जिसे माध्यक अन्तराल या वर्ग कहते हैं।

यहाँ, निम्न सीमा $(l) = 50$, $f = 20$, $cf = 40 + p$ तथा वर्ग चौड़ाई, $h = 10$

$$\therefore \quad \text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h = 50 + \frac{(45 - 40 - p)}{20} \times 10$$

$$50 = 50 + \frac{5 - p}{2}$$

$\Rightarrow \quad 5 - p = 0$

$\Rightarrow \quad p = 5$

तथा $\quad \sum f_i = 78 + p + q = 90$

$\Rightarrow \quad 78 + 5 + q = 90$

$\Rightarrow \quad q = 90 - 83$

$\Rightarrow \quad q = 7$

अत: $\boldsymbol{p = 5}$ **तथा** $\boldsymbol{q = 7}$ उत्तर

(घ) एक थैले में 5 लाल गेंद और कुछ नीली गेंदें हैं यदि इस थैले में से नीली गेंद निकालने की प्रायिकता लाल गेंद निकालने की प्रायिकता की दुगुनी है तो थैले में नीली गेंदों की संख्या ज्ञात कीजिए। 4

हल : माना थैले में नीली गेंदों की संख्या x है।

$\therefore$ थैले में कुल गेंदों की संख्या $= 5$ लाल $+\ x$ नीली $= (5 + x)$

थैले में से यादृच्छया 1 गेंद निकालने पर,

कुल सम्भव परिणाम = $(5 + x)$

लाल गेंद निकलने की घटना के अनुकूल परिणाम = 5

$\therefore$ लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $P(R) = \dfrac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}} = \dfrac{5}{5+x}$

तब, नीली गेंद निकलने की प्रायिकता $P(B) = 1 - P(R)$

$$= 1 - \frac{5}{5+x} = \frac{x}{5+x} \qquad [\because P(A) + P(A') = 1]$$

प्रश्नानुसार, नीली गेंद निकलने की प्रायिकता लाल गेंद निकलने की प्रायिकता की दुगुनी है।

अर्थात $$P(B) = 2 \times P(R)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{5+x} = 2 \times \frac{5}{5+x}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{5+x} = \frac{10}{5+x} \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

अत: **थैले में नीली गेंदों की संख्या = 10** उत्तर

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दो पानी के नल एक-साथ हौज को $9\frac{3}{8}$ घण्टों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम व्यास वाले नल से 10 घण्टे कम समय लेता है। प्रत्येक द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए। 4

हल : माना कम व्यास वाला नल पानी के हौज को x घण्टे में भरता है।

$\because$ बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में 10 घण्टे कम समय लेता है।

$\therefore$ बड़े व्यास वाला नल हौज को $(x - 10)$ घण्टे में भरेगा।

$\therefore$ पहले नल द्वारा हौज को भरने की प्रति घण्टा दर = $\dfrac{1}{x}$ भाग

इसी प्रकार, दूसरे नल द्वारा हौज को भरने की प्रति घण्टा दर = $\dfrac{1}{x-10}$ भाग

यदि दोनों नल एक-साथ खुले हों तो 1 घण्टे में हौज का $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-10}\right)$ भाग भर जाएगा।

परन्तु दिया है कि $9\frac{3}{8}$ घण्टे या $\frac{75}{8}$ घण्टे में पूरा हौज भर जाएगा

$\therefore$ $$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10}\right) \times \frac{75}{8} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x - 10 + x}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{2x - 10}{x^2 - 10x} = \frac{8}{75}$$

$\Rightarrow$ $$8x^2 - 80x = 150x - 750 \qquad \text{(वज्रगुणन से)}$$

$\Rightarrow$ $$8x^2 - 80x - 150x + 750 = 0$$

$\Rightarrow$ $$8x^2 - 230x + 750 = 0$$

$\Rightarrow$ $$4x^2 - 115x + 375 = 0$$

उपर्युक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ से करने पर,

$$a = 4, \quad b = -115 \quad \text{तथा} \quad c = 375$$

तब द्विघात सूत्र से, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ $$x = \frac{-(-115) \pm \sqrt{(-115)^2 - 4 \times 4 \times 375}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{115 \pm \sqrt{13225 - 6000}}{8} = \frac{115 \pm \sqrt{7225}}{8} = \frac{115 \pm 85}{8}$$

$$= \frac{115 + 85}{8} \quad \text{या} \quad \frac{115 - 85}{8}$$

$$= \frac{200}{8} \quad \text{या} \quad \frac{30}{8}$$

$$= 25 \quad \text{या} \quad 3\frac{3}{4}$$

अत: छोटा नल हौज को 25 घण्टे या $3\frac{3}{4}$ घण्टे में भर सकता है।

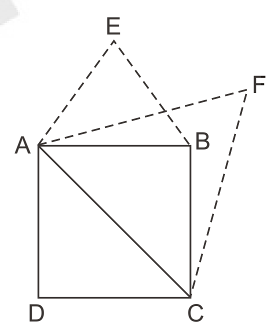
जब दोनों नल हौज को भरते हैं तब 9 घण्टे से अधिक समय लगता है तब केवल एक नल उसे $3\frac{3}{4}$ घण्टे में भर दे यह असम्भव एवं असंगत है।

अत: छोटा नल उसे 25 घण्टे में भरता है, तब बड़ा नल उसे $25 - 10 = 15$ घण्टे में भर सकता है।

अत: **कम व्यास वाला नल हौज को 25 घण्टे में** और **अधिक व्यास वाला नल उसे 15 घण्टे में भर सकता है।** **उत्तर**

(ख) सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है। 4

हल : दिया है : $ABCD$ एक वर्ग है जिसकी एक भुजा AB तथा विकर्ण AC है। AB तथा AC पर समबाहु $\Delta\, ABE$ तथा $\Delta\, ACF$ बनाए गए हैं।



सिद्ध करना है : $\Delta\, ABE$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \Delta\, ACF$ का क्षेत्रफल

उपपत्ति : वर्ग $ABCD$ की भुजा $= AB$

वर्ग $ABCD$ का विकर्ण $AC = AB\sqrt{2}$

भुजा AB पर बने समबाहु $\Delta\, ABE$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \dfrac{(AB)^2\ \sqrt{3}}{4}$

विकर्ण AC पर बने समबाहु $\Delta\, ACF$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2 $= \dfrac{(AC)^2\ \sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ $$\frac{\Delta\, ABE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, ACF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{[(AB)^2\ \sqrt{3}]/4}{[(AC)^2\ \sqrt{3}]/4} = \frac{(AB)^2\ \sqrt{3}}{(AC)^2\ \sqrt{3}} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2$$

$$= \left[\frac{AB}{AB\sqrt{2}}\right]^2 \qquad [\because AC = AB\sqrt{2}]$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}$$

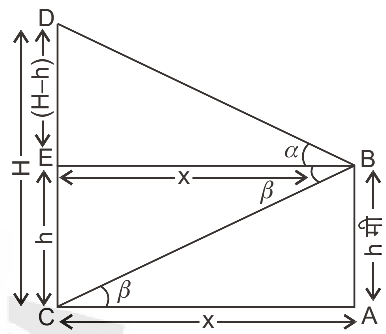
$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta\, ACF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{2}$$

अत: Δ ***ABE* का क्षेत्रफल** $= \dfrac{1}{2}\Delta$ ***ACF* का क्षेत्रफल।** **Proved.**

(ग) किसी मकान की खिड़की भूमि से h मीटर की ऊँचाई पर है। इस खिड़की से, सड़क के दूसरी ओर स्थित एक अन्य मकान के शिखर और आधार के क्रमश: उन्नयन और अवनमन कोण α और β पाए जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि दूसरे मकान की ऊँचाई $h(1+\tan\alpha\cot\beta)$ मीटर है। 4

हल : माना खिड़की बिन्दु B पर स्थित है।

$\therefore \qquad AB = h$ मीटर



माना $CD = H$ अन्य मकान की ऊँचाई है जो सड़क के दूसरी ओर स्थित है। खिड़की B की स्थिति से, उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमश: α तथा β हैं।

अर्थात $\qquad \angle EBD = \alpha$

तथा $\qquad \angle EBC = \beta = \angle BCA \qquad$ (एकान्तर कोण)

रेखा CD पर लम्ब BE खींचा।

माना $\qquad AC = BE = x$

तथा $\qquad DE = DC - EC = H - h$

समकोण $\Delta\, EBD$ में,

$$\tan\alpha = \frac{ED}{BE} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\alpha = \frac{H-h}{x}$$

$$\therefore \qquad x = (H-h)\cot\alpha \qquad \ldots(1)$$

अब, समकोण $\Delta\, ABC$ में,

$$\tan\beta = \frac{AB}{AC} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{h}{(H-h)\cot\alpha} \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$\Rightarrow \qquad (H-h) = \frac{h}{\tan\beta.\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad H - h = h\tan\alpha.\cot\beta$$

$$\Rightarrow \qquad H = h + h\tan\alpha.\cot\beta$$

$$\Rightarrow \qquad = h\,(1+\tan\alpha.\cot\beta)$$

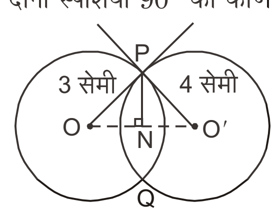
अत: **दूसरे मकान की ऊँचाई $h\,(1+\tan\alpha.\cot\beta)$ मीटर है।** **Proved.**

(घ) केन्द्रों O और O' वाले तथा क्रमश: त्रिज्याओं 3 सेमी और 4 सेमी वाले दो वृत्त परस्पर बिन्दुओं P और Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OP और $O'P$ दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ हैं। उभयनिष्ठ जीवा PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 4

हल : यहाँ, दो वृत्तों की त्रिज्याएँ, $OP = 3$ सेमी तथा $PO' = 4$ सेमी है। ये दोनों वृत्त P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं।

यहाँ, OP और PO' बिन्दु P से खींची गईं दो स्पर्शियाँ हैं, जो परस्पर लम्बवत् हैं अर्थात दोनों स्पर्शियाँ 90° का कोण बनाती हैं।

अर्थात $\qquad \angle OPO' = 90^\circ \quad$ [$\because$ वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है।]



OO' तथा PN को मिलाया।

समकोण $\Delta\, OPO'$ में,

$$(OO')^2 = (OP)^2 + (PO')^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

⇒ $OO' = \sqrt{25} = 5$ सेमी

तथा $PN \perp OO'$

माना $ON = x$ तब $NO' = 5 - x$

समकोण $\Delta\, ONP$ में,

$$OP^2 = ON^2 + PN^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

⇒ $PN^2 = OP^2 - ON^2$

$$= (3)^2 - x^2 = 9 - x^2 \qquad ...(1)$$

तथा समकोण $\Delta\, O'NP$ में,

$$(PO')^2 = (PN^2) + (NO')^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

⇒ $(4)^2 = (PN)^2 + (5 - x)^2$

⇒ $(PN)^2 = 16 - (5 - x)^2 \qquad ...(2)$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$9 - x^2 = 16 - (5 - x)^2$$

⇒ $7 + x^2 - (25 + x^2 - 10\,x) = 0$

⇒ $10\,x = 18$

⇒ $x = 1.8$

पुनः समकोण $\Delta\, ONP$ में,

$$OP^2 = ON^2 + PN^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

⇒ $PN^2 = OP^2 - ON^2$

$$= (3)^2 - x^2 = 9 - (1.8)^2 = 9 - 3.24 = 5.76$$

∴ $PN = \sqrt{5.76} = 2.4$

अतः उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई, $PQ = 2 \times PN$

$= 2 \times 2.4 =$ **4.8 सेमी** **उत्तर**

7. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि n, $n + 4$, $n + 8$, $n + 12$ और $n + 16$ में से एक और केवल एक ही 5 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक हैं। 6

हल : n को 5 से विभाजित करने पर, माना भागफल तथा शेषफल क्रमशः q तथा r हैं।

तब, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$n = 5q + r,$ जहाँ $0 \le r < 5$

⇒ $n = 5q + r,$ जहाँ $r = 0, 1, 2, 3, 4$

⇒ $n = 5q$ या $5q + 1$ या $5q + 2$ या $5q + 3$ या $5q + 4$

स्थिति I. यदि $n = 5q$, तब n केवल 5 से ही विभाजित होता है।

स्थिति II. यदि $n = 5q + 1$, तब $n + 4 = 5q + 1 + 4 = 5q + 5 = 5\,(q + 1)$, जो कि केवल 5 से ही विभाजित है। अतः इस स्थिति में, $(n + 4)$, 5 से विभाजित है।

स्थिति III. यदि $n = 5q + 2$, तब $n + 8 = 5q + 2 + 8 = 5q + 10 = 5\,(q + 2)$, जो कि केवल 5 से ही विभाजित है। अतः इस स्थिति में, $(n + 8)$, 5 से विभाजित है।

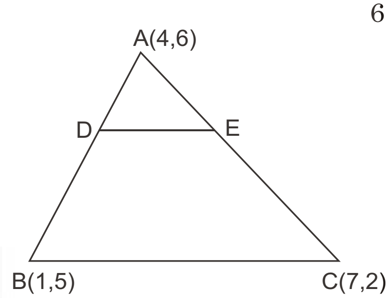
स्थिति IV. यदि $n = 5q + 3$, तब $n + 12 = 5q + 3 + 12 = 5q + 15 = 5\,(q + 3)$, जो कि केवल 5 से ही विभाजित है। अतः इस स्थिति में, $(n + 12)$, 5 से विभाजित है।

स्थिति V. यदि $n = 5q + 4$, तब $n + 16 = 5q + 4 + 16 = 5q + 20 = 5(q + 4)$, जो कि केवल 5 से ही विभाजित है। अत: इस स्थिति में, $(n + 16)$, 5 से विभाजित है।

अत: **$n, n + 4, n + 8, n + 12$ और $n + 16$ में से एक और केवल एक ही 5 से विभाज्य है, जहाँ n कोई धनात्मक पूर्णांक है।** **Proved.**

अथवा **एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A (4, 6), B (1, 5) और C (7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमश: D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है। ΔADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना ΔABC के क्षेत्रफल से कीजिए।** 6

हल : दिया है, ΔABC के शीर्ष $A(4, 6)$, $B(1, 5)$ और $C(7, 2)$ हैं।



$\because \quad \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad AB = 4\,AD$

$\Rightarrow \quad AD + DB = 4\,AD$ (चित्र से)

$\Rightarrow \quad DB = 3AD$

$\Rightarrow \quad \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ माना D के निर्देशांक यदि (x, y) हों तो

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \quad \text{(विभाजन सूत्र से)}$$

$$= \frac{(1 \times 1) + (3 \times 4)}{1 + 3} \qquad = \frac{1 \times 5 + 3 \times 6}{1 + 3}$$

$$= \frac{1 + 12}{4} = \frac{13}{4} \qquad = \frac{5 + 18}{4} = \frac{23}{4}$$

$$\therefore \quad D \equiv \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right)$$

इसी प्रकार, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad AC = 4\,AE$

$\Rightarrow \quad AE + EC = 4\,AE$ (चित्र से)

$\Rightarrow \quad EC = 3AE$

$\Rightarrow \quad \frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$

माना E के निर्देशांक (x', y') हों तो

$$x' = \frac{m_1x_3 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \text{तथा} \quad y' = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \quad \text{(विभाजन सूत्र से)}$$

$$= \frac{1 \times 7 + 3 \times 4}{1 + 3} \qquad = \frac{1 \times 2 + 3 \times 6}{1 + 3}$$

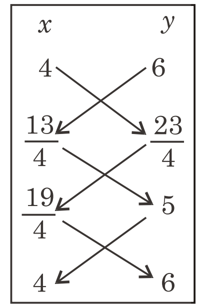
$$= \frac{7 + 12}{4} = \frac{19}{4} \qquad = \frac{2 + 18}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\therefore \quad E \equiv \left(\frac{19}{4}, 5\right)$$

अब, $\because \quad A \equiv (4, 6),\ D \equiv \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right),\ E \equiv \left(\frac{19}{4}, 5\right)$

$\therefore$ $\quad \Delta\, ADE$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\left[\left\{\left(4\times\dfrac{23}{4}\right)+\left(\dfrac{13}{4}\times 5\right)+\left(\dfrac{19}{4}\times 6\right)\right\}-\left\{\left(6\times\dfrac{13}{4}\right)+\left(\dfrac{23}{4}\times\dfrac{19}{4}\right)+5\times 4\right\}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{23+\frac{65}{4}+\frac{114}{4}\right\}-\left\{\frac{78}{4}+\frac{437}{16}+20\right\}\right]$$



$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{92+65+114}{4}\right\}-\left\{\frac{312+437+320}{16}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{271}{4}-\frac{1069}{16}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1084-1069}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{15}{16} = \frac{15}{32} \text{ वर्ग मात्रक}$$

और $\quad \Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}[\{4\times 5+1\times 2+7\times 6\}-\{6\times 1+5\times 7+2\times 4\}]$

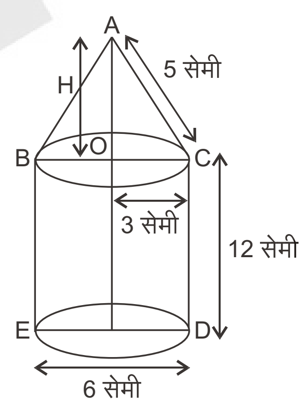
$$= \frac{1}{2}[\{20+2+42\}-\{6+35+8\}]$$

$$= \frac{1}{2}[64-49] = \frac{1}{2}\times 15 = \frac{15}{2} \text{ वर्ग मात्रक}$$

अत: $\Delta\, ADE$ व $\Delta\, ABC$ के क्षेत्रफल में अनुपात $= \dfrac{15}{32} : \dfrac{15}{2} = 1:16$ **उत्तर**

(ख) एक रॉकेट का आकार एक लम्ब वृत्तीय बेलन के रूप का है जिसका निचला सिरा बन्द है। इसके ऊपर बेलन की आधार त्रिज्या के बराबर आधार त्रिज्या वाला एक शंकु रखा हुआ है। बेलन के व्यास और ऊँचाई क्रमशः 6 सेमी और 12 सेमी हैं। यदि शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई 5 सेमी है, तो रॉकेट का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)। 6

हल : चूँकि रॉकेट, एक लम्ब वृत्तीय बेलन तथा एक शंकु का संयोजन है।



दिया है, $\quad$ बेलन का व्यास = 6 सेमी

$\therefore$ $\quad$ बेलन की त्रिज्या $(r) = \dfrac{6}{2} = 3$ सेमी

तथा $\quad$ बेलन की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

$\therefore$ $\quad$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= 3.14\times(3)^2\times 12$$

$$= 339.12 \text{ सेमी}^3$$

तथा $\quad$ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,\pi r h$

$$= 2\times 3.14\times 3\times 12 = 226.08 \text{ सेमी}^2$$

अब, समकोण $\Delta\, AOC$ में,

$$AC^2 = OA^2 + OC^2$$

$\Rightarrow \quad OA^2 = AC^2 - OC^2$

$\Rightarrow \quad H^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16$

$\Rightarrow \quad H = 4$

$\therefore$ $\quad$ शंकु की ऊँचाई, $H = 4$ सेमी

तथा $\quad$ शंकु की त्रिज्या = बेलन की त्रिज्या, $r = 3$ सेमी

अब, शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (3)^2 \times 4$

$= \frac{113.04}{3} = 37.68$ सेमी^{3}

तथा शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= 3.14 \times 3 \times 5 = 47.1$ सेमी^{2}

$\therefore$ रॉकेट का कुल आयतन = बेलन का आयतन + शंकु का आयतन

$= 339.12 + 37.68 = 376.8$ सेमी^{3}

तथा रॉकेट का कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठ + बेलन का वक्र पृष्ठ + बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$= 47.1 + 226.08 + \pi r^2$

$= 47.1 + 226.08 + 3.14 \times 3 \times 3$

$= 47.1 + 226.08 + 28.26 = 301.44$ सेमी^{2}

अतः **रॉकेट का कुल वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन क्रमशः 301.44 सेमी^{2} तथा 376.8 सेमी^{3} हैं।** **उत्तर**

अथवा **एक स्कूल के 50 विद्यार्थियों ने भाला फेंक प्रतियोगिता में भाग लिया। फेंकी गयी दूरियाँ (मीटर में) नीचे दी गयी हैं :** 6

दूरी (मीटर में)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
विद्यार्थियों की संख्या	6	11	17	12	4

(i) एक संचयी बारम्बारता बण्टन सारणी की रचना कीजिए।
(ii) 'से कम प्रकार की' एक संचयी बारम्बारता वक्र खींचिए और इससे फेंकी गयी माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।
(iii) माध्यक के सूत्र का प्रयोग करते हुए, माध्यक दूरी ज्ञात कीजिए।
(iv) क्या ऊपर (ii) और (iii) में प्राप्त किए गए माध्यक बराबर हैं?

हल : (i)

दूरी (मीटर में)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
0 – 20	6	6
20 – 40	11	$6+11=17$
40 – 60	17	$17+17=34$
60 – 80	12	$34+12=46$
80 – 100	4	$46+4=50$

(ii)

दूरी (मीटर में)	संचयी बारम्बारता (cf)
0 से कम	0
20 से कम	$0+6=6$
40 से कम	$6+11=17$
60 से कम	$17+17=34$
80 से कम	$34+12=46$
100 से कम	$46+4=50$

'से कम प्रकार' के तोरण को बनाने के लिए हम पेपर पर (0, 0), (20, 6), (40, 17), (60, 34), (80, 46) और (100, 50) बिन्दुओं को अंकित करते हैं तथा हस्तमुक्त रेखा द्वारा इन्हें मिलाते हैं।

अब, $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

Y-अक्ष पर $y = 25$ लेते हैं तथा X-अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते हैं, जो वक्र को बिन्दु A पर मिलती है। बिन्दु A से, X-अक्ष के लम्बवत् हम एक रेखा खींचते हैं, X-अक्ष पर यह रेखा जहाँ मिलती है वह बिन्दु अभीष्ट माध्यक अर्थात 49.4 होता है।

(iii) $\because \quad \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$, जो वर्ग 40 – 60 के अन्तर्गत विद्यमान है।

$\therefore$ निम्न सीमा, $l = 40, \quad f = 17, \quad cf = 17$

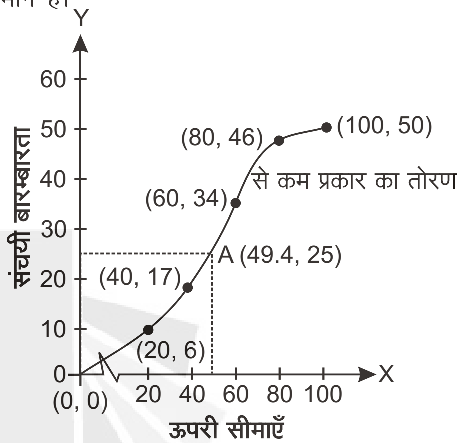
तथा वर्ग चौड़ाई, $h = 20$

$$\therefore \quad \text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$= 40 + \frac{(25-17)}{17} \times 20$$

$$= 40 + \frac{8 \times 20}{17}$$

$$= 40 + 9.41 = 49.41$$



(iv) हाँ, भाग (ii) और (iii) में प्राप्त किए गए माध्यक बराबर हैं।

Sample Paper 2

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] **[पूर्णांक : 70**

निर्देश : पूर्ववत्

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड में दिए गए प्रश्न के उत्तर के लिए चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ है, तो $\tan A$ का मान है : 1

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{5}{3}$.

हल : दिया है, $\cos A = \frac{4}{5}$

$\because \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\therefore \quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

अब, $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

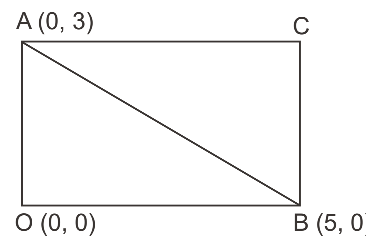
$\therefore$ $\tan A$ का अभीष्ट मान $\frac{3}{4}$ है।

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(ख) $AOBC$ एक आयत है, जिसके तीन शीर्ष A (0, 3), O (0, 0) और B (5, 0) हैं। इसका विकर्ण है : 1

(a) 5 (b) 3 (c) $\sqrt{34}$ (d) 4.

हल : अब, विकर्ण AB की लम्बाई = बिन्दुओं $A(0,\ 3)$ तथा $B(5,\ 0)$ के बीच की दूरी



$\because$ बिन्दुओं $(x_1,\ y_1)$ तथा $(x_2,\ y_2)$ के बीच की दूरी,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

यहाँ, $x_1 = 0, y_1 = 3$ तथा $x_2 = 5, y_2 = 0$

$\therefore$ बिन्दुओं $A(0,\ 3)$ तथा $B(5,\ 0)$ के बीच की दूरी

$$AB = \sqrt{(5-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$\therefore$ इसके विकर्ण की अभीष्ट लम्बाई $\sqrt{34}$ है।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ग) A. P. : 21, 42, 63, 84, ... का कौन-सा पद 210 है : 1

(a) 9 वाँ (b) 10 वाँ (c) 11 वाँ (d) 12 वाँ।

हल : माना दी गई A.P. का nवाँ पद 210 हैं।

यहाँ, प्रथम पद $a = 21$ तथा सार्वअन्तर $d = 42 - 21 = 21$ तथा $a_n = 210$

$\because$ $$a_n = a + (n-1)\,d$$

$\therefore$ $$210 = 21 + (n-1) \times 21$$

$\Rightarrow$ $$210 = 21 + 21\,n - 21 = 21\,n$$

$\Rightarrow$ $$n = \frac{210}{21} = 10$$

$\therefore$ A.P. का 10वाँ पद 210 है।

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(घ) पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरण $9x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{2} = 0$ को हल करने के लिए, इसमें किस अचर को जोड़ना और घटाना चाहिए : 1

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{9}{64}$.

हल : दी गई समीकरण : $9x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow$ $$(3x)^2 + \frac{1}{4}(3x) - \sqrt{2} = 0$$

$\Rightarrow$ $$z^2 + \frac{1}{4}z - \sqrt{2} = 0$$ [$z = 3x$ रखने पर]

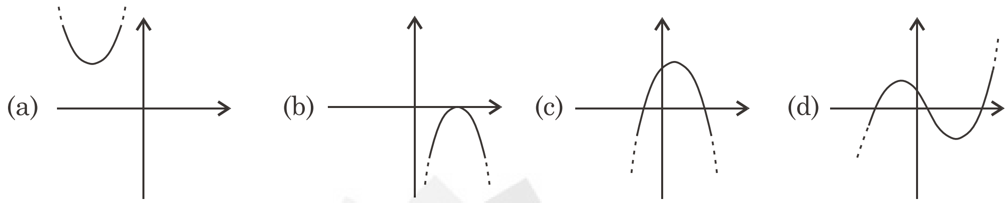
$\Rightarrow$ $$z^2 + \frac{1}{4}z + \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(z+\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}+\sqrt{2} = \frac{1+64\sqrt{2}}{64}$$

अत: समीकरण को हल करने हेतु $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ जोड़ना तथा घटाना चाहिए।

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(ङ) निम्नलिखित में से कौन एक द्विघात बहुपद का आलेख नहीं है : 1



हल : किसी द्विघात बहुपद $a\,x^2+b\,x+c, a \neq 0$ के लिए, समीकरण $y = a\,x^2+b\,x+c$ का ग्राफ दो में से कोई एक आकृति रखता है, या तो ऊपर की ओर खुला हुआ परवलय '$\cup$' या नीचे की ओर खुला हुआ परवलय '$\cap$'। ये क्रमश: $a > 0$ अथवा $a < 0$ पर निर्भर करता है। इन वक्रों को परवलय कहते हैं।

साथ ही एक द्विघात बहुपद का वक्र X-अक्ष को अधिकतम दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

परन्तु विकल्प (d) में, कोई परवलय की आकृति नहीं है और वक्र X–अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर रहा है। इसलिए विकल्प (d) वाला वक्र एक द्विघात बहुपद का आलेख नहीं है।

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

(च) संख्या n^2-1, 8 से विभाज्य होती है यदि n है एक : 1

(a) पूर्णांक (b) प्राकृत संख्या (c) विषम संख्या (d) सम संख्या।

हल : माना $x = n^2-1$

अब $n = 1$ रखने पर, $x = 1^2-1 = 1-1 = 0$

$n = 2$ रखने पर, $x = 2^2-1 = 4-1 = 3$

$n = 3$ रखने पर, $x = 3^2-1 = 9-1 = 8$

$n = 4$ रखने पर, $x = 4^2-1 = 16-1 = 15$

$n = 5$ रखने पर, $x = 5^2-1 = 25-1 = 24$ ... आदि

हम देखते हैं कि जब $n = 1, 3, 5, \ldots\ldots$ है तब (n^2-1), 8 से विभाज्य है।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वर्गों 10 – 25 तथा 35 – 55 का वर्ग-चिह्न अथवा मध्यमान ज्ञात कीजिए। 1

हल : 10 – 25 का मध्यमान $= \frac{10+25}{2} = \frac{35}{2} = 17.5$

तथा 35 – 55 का मध्यमान $= \frac{35+55}{2} = \frac{90}{2} = 45$

(ख) क्या भुजाओं 25 सेमी, 5 सेमी और 24 सेमी वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है? अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए। 1

हल : माना $a = 25$ सेमी, $b = 5$ सेमी तथा $c = 24$ सेमी

अब, $b^2+c^2 = (5)^2+(24)^2 = 25+576 = 601 \neq (25)^2$

अत: **दी गई भुजाएँ समकोण त्रिभुज नहीं बनातीं क्योंकि ये पाइथागोरस प्रमेय को सन्तुष्ट नहीं करती हैं।** **उत्तर**

(ग) क्या श्रेढ़ी $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$ एक A. P. है? यदि हाँ, तो इसके तीन और पद लिखिए। 1

हल : दिया हुआ अनुक्रम : $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots\ldots$

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{8}, \quad a_3 = \sqrt{18}, \quad a_4 = \sqrt{32}$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर :

$$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{4} - 1)$$
$$= \sqrt{2}(2-1) = \sqrt{2}$$
$$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}\sqrt{9} - \sqrt{2}\sqrt{4} = \sqrt{2}(\sqrt{9} - \sqrt{4})$$
$$= \sqrt{2}(3-2) = \sqrt{2}$$
$$a_4 - a_3 = \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2}\sqrt{16} - \sqrt{2}\sqrt{9} = \sqrt{2}(\sqrt{16} - \sqrt{9})$$
$$= \sqrt{2}(4-3) = \sqrt{2}$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर $\sqrt{2}$ नियत है।

अत: **सार्वान्तर $d = \sqrt{2}$ तथा दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।** **उत्तर**

(घ) एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ हैं। 1

हल : माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= \alpha + \beta$ तथा गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि बहुपद के शून्यकों का योग $\sqrt{2}$ तथा गुणनफल $\frac{1}{3}$ है।

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \sqrt{2} \quad \text{तथा} \quad \alpha\beta = \frac{1}{3} \qquad \ldots(1)$$

तब, द्विघात बहुपद $= (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

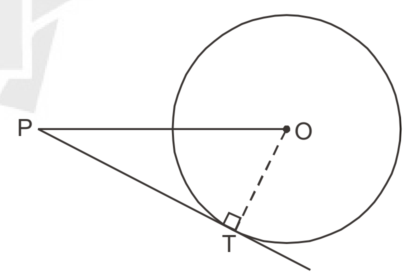
$$= x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{3} \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$
$$= \frac{1}{3}(3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1) \equiv k(3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1)$$

अत: **अभीष्ट बहुपद $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ या $k(3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1)$ है,** जहाँ $k = \frac{1}{3}$ एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) केन्द्र O वाले वृत्त पर किसी बाहरी बिन्दु P से खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई OP से सदैव छोटी होती है। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए। 2



हल : बाह्य बिन्दु P से एक स्पर्श रेखा PT खींची गई है। OT को मिलाया।

$\because \quad OT \perp PT$

$\therefore$ त्रिभुज OTP एक समकोण त्रिभुज बनाता है जिसमें $\angle OTP = 90°$

समकोण त्रिभुज में, त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं से कर्ण हमेशा बड़ा होता है।

$\therefore \quad OP > PT$

अथवा $\quad PT < OP$

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(ख) क्या भुजाओं 25 सेमी, 5 सेमी और 24 सेमी वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। 2

हल : माना $a = 25$ सेमी, $b = 5$ सेमी तथा $c = 24$ सेमी

अब, $$b^2 + c^2 = (5)^2 + (24)^2 = 25 + 576 = 601 \neq (25)^2$$

अत: **दी गई भुजाएँ समकोण त्रिभुज नहीं बनातीं क्योंकि ये पाइथागोरस प्रमेय को सन्तुष्ट नहीं करती हैं।** **उत्तर**

(ग) भुजा a वाले एक घनाकार बक्से के अन्दर एक ठोस गेंद पूर्णतया ठीक-ठीक रखी जा सकती है। गेंद का आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ है। क्या यह सही है? कारण दीजिए। 2

हल : चूँकि, भुजा a वाले एक घनाकार बक्से के अन्दर एक ठोस गेंद को पूर्णतया ठीक-ठीक रखा गया है। इसलिए ठोस गेंद के लिए व्यास a है।

$\therefore$ ठोस गेंद की त्रिज्या $= \frac{a}{2}$

$\therefore$ ठोस गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{8}$

$= \frac{1}{6}\pi a^3$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। उत्तर

(घ) मैं तीन सिक्कों को एक साथ उछालता हूँ। सम्भव परिणाम कोई चित नहीं, 1 चित, 2 चित या 3 चित हैं। अत: मैं कहता हूँ कि कोई चित प्राप्त न करने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इस निष्कर्ष में क्या गलती है? 2

हल : एक साथ तीन सिक्के उछाले जाते हैं।

तो कुल सम्भव परिणाम $= HHH, HHT, HTH, THH, TTT$
TTH, THT, HTT (जहाँ $H \to$ चित तथा $T \to$ पट)

$\therefore$ कुल सम्भव परिणामों की संख्या $= 2^3 = 8$

अब एक भी चित प्राप्त न करने का सम्भावित परिणाम $= TTT$

$\therefore$ कुल सम्भावित परिणामों की संख्या $= 1$

$\therefore$ कोई भी चित प्राप्त न करने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

अत: दिया गया निष्कर्ष असत्य है क्योंकि **एक भी चित न आने की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ है न कि $\frac{1}{4}$.** उत्तर

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) मान निकालिए : $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$ 2

हल : $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°} = \frac{\sin^2 63° + \sin^2 (90° - 63°)}{\cos^2 17° + \cos^2 (90° - 17°)}$

$= \frac{\sin^2 A + \sin^2 (90° - A)}{\cos^2 \theta + \cos^2 (90° - \theta)}$ [माना $A = 63°$ तथा $\theta = 17°$]

$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

[$\because \sin(90° - A) = \cos A, \cos(90° - A) = \sin A$]

$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$

$= \frac{1}{1}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ तथा $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$]

$= 1$

अत: $\frac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73}$ **का मान $= 1$** उत्तर

(ख) A. P. : 3, 8, 13, 18, ... का कौन-सा पद 78 है? 2

हल : दी गई A.P. : 3, 8, 13, 18, ...

पहला पद $a = 3$ तथा सार्वअन्तर $d = 8 - 3 = 5$

माना n वाँ पद 78 है

$\because$ n वाँ पद = 78

$\Rightarrow$ $a + (n-1)\,d = 78$ $[\because a_n = a + (n-1)\,d]$

$\Rightarrow$ $3 + (n-1)\,5 = 78$

$\Rightarrow$ $3 + 5n - 5 = 78$ $\Rightarrow$ $5n = 78 + 5 - 3 = 80$

$\Rightarrow$ $n = \dfrac{80}{5} = 16$

अत: **16 वाँ पद 78 है।** **उत्तर**

(ग) यदि $b = 0$, $c < 0$ हैं, तो क्या यह सत्य है कि $x^2 + bx + c = 0$ के मूल संख्यात्मक रूप से बराबर परन्तु विपरीत चिह्नों के होंगे? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए। 2

उत्तर : दिया है, $b = 0, c < 0$ तथा द्विघात समीकरण,

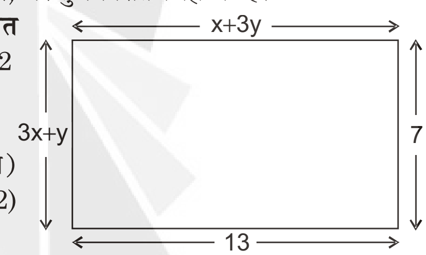
$$x^2 + bx + c = 0$$

$\therefore$ $x^2 + 0.x + c = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 = -c$ $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-c}$ [यहाँ $-c > 0 \because c < 0$]

अत: समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ के मूल संख्यात्मक रूप से बराबर, परन्तु विपरीत चिह्न के हैं।

(घ) निम्नलिखित आयत (देखिए आकृति) में x और y के मान ज्ञात कीजिए : 2



हल : हम जानते हैं कि,

आयत में आमने-सामने अर्थात विपरीत भुजाएँ बराबर होती है।

$\therefore$ $x + 3y = 13$ ...(1) (चित्र से)

तथा $3x + y = 7$ ...(2)

समीकरण (2) में 3 की गुणा करके समीकरण (1) में से घटाने पर,

$$\begin{array}{r} x + 3y = 13 \\ 9x + 3y = 21 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline -8x = -8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8}{-8} = 1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$1 + 3y = 13$ $\Rightarrow$ $3y = 13 - 1 = 12$

$\Rightarrow$ $y = \dfrac{12}{3} = 4$

अत: **$x = 1$ तथा $y = 4$.**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) एक थैले में 24 गेंद हैं, जिसमें से x लाल, $2x$ सफेद और $3x$ नीली हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गेंद 4

(i) लाल नहीं हो? (ii) सफेद हो?

हल : दिया है, एक थैले में गेंदों की कुल संख्या = 24

$\therefore$ $n(S) = 24$

थैले में लाल गेंदों की संख्या = x

थैले में सफेद गेंदों की संख्या = $2x$

तथा थैले में नीली गेंदों की संख्या = $3x$

प्रश्नानुसार,

$$x + 2x + 3x = 24$$

$\Rightarrow \quad 6x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24}{6} \quad \therefore \quad x = 4$

$\therefore$ थैले में लाल गेंदों की संख्या $= x = 4$

थैले में सफेद गेंदों की संख्या $= 2x = 2 \times 4 = 8$

तथा थैले में नीली गेंदों की संख्या $= 3x = 3 \times 4 = 12$

(i) माना घटना E_1 = चुनी हुई गेंद लाल नहीं है।

= चुनी हुई गेंद या तो सफेद है या नीली है।

$\therefore$ $n(E_1)$ = सफेद गेंदों की संख्या + नीली गेंदों की संख्या $= 8 + 12 = 20$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{20}{24} = \mathbf{\frac{5}{6}}$ **उत्तर**

(ii) माना घटना E_2 = चुनी हुई गेंद सफेद है।

$\therefore$ $n(E_2) = 8$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{24} = \mathbf{\frac{1}{3}}$ **उत्तर**

(ख) निम्नलिखित बारम्बारता बण्टन का माध्य 50 है, परन्तु 20-40 और 60-80 वर्गों की बारम्बारताएँ क्रमश: f_1 और f_2 ज्ञात नहीं हैं। ये बारम्बारताएँ ज्ञात कीजिए, यदि सभी बारम्बारताओं का योग 120 है। 4

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
बारम्बारता	17	f_1	32	f_2	19

हल : सर्वप्रथम हम दिए गए आँकड़ों का मध्यमान ज्ञात करेंगे।

वर्ग	बारम्बारता (f_i)	मध्यमान (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i u_i$
0 – 20	17	10	−2	−34
20 – 40	f_1	30	−1	$-f_1$
40 – 60	32	$50 = A$	0	0
60 – 80	f_2	70	1	f_2
80 – 100	19	90	2	38
	$\sum f_i = f_1 + f_2 + 68$			$\sum f_i u_i = f_2 - f_1 + 4$

दिया है कि सभी बारम्बारताओं का योग = 120

$\therefore \quad \sum f_i = 68 + f_1 + f_2 = 120$

$\therefore \quad f_1 + f_2 = 52$ ...(1)

यहाँ, कल्पित माध्य, $A = 50$ तथा वर्ग चौड़ाई, $h = 20$

पग-विचलन विधि द्वारा,

$$\text{माध्य} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$\Rightarrow \quad 50 = 50 + \frac{(4 + f_2 - f_1)}{120} \times 20$

$\Rightarrow \quad 4 + f_2 - f_1 = 0$

$- f_1 + f_2 = -4$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर,

$$2f_2 = 48 \quad \Rightarrow \quad f_2 = 24$$

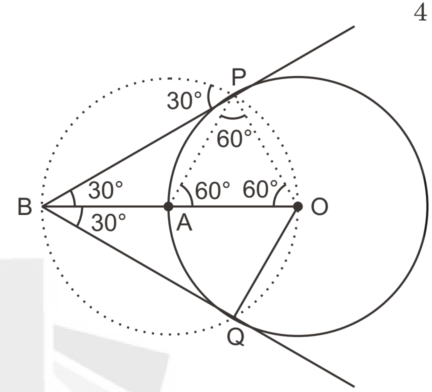
f_2 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$f_1 + 24 = 52 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 28$$

अतः **$f_1 = 28$ तथा $f_2 = 24$** **उत्तर**

(ग) त्रिज्या 4 सेमी का एक वृत्त खींचिए। इस पर स्पर्श रेखाओं के एक ऐसे युग्म की रचना कीजिए कि इनके बीच का कोण 60° हो। रचना का औचित्य भी दीजिए। वृत्त के केन्द्र और स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद-बिन्दु के बीच की दूरी को मापिए। 4

हल : रचना के पद :



(1) समतल पेपर पर एक बिन्दु O लीजिए तथा त्रिज्या $OA = 4$ सेमी का एक वृत्त खींचिए।

(2) OA को B तक इस प्रकार विस्तारित कीजिए कि $OA = AB = 4$ सेमी।

(3) A को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या $AO = AB = 4$ सेमी लेकर एक वृत्त खींचिए। माना यह वृत्त चरण 1 में खींचे गए वृत्त को P तथा Q पर प्रतिच्छेद करता है।

(4) अभीष्ट स्पर्श रेखाओं को प्राप्त करने हेतु BP तथा BQ को मिलाते हैं।

तर्क (Justification) :

$\Delta\, OAP$ में,

$OA = OP = 4$ सेमी (∵ त्रिज्या)

तथा $AP = 4$ सेमी (∵ A केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या)

∴ $\Delta\, OAP$ समबाहु है।

⇒ $\angle PAO = 60°$

⇒ $\angle BAP = 120°$

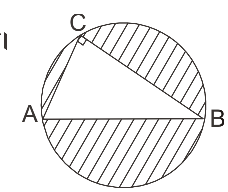
$\Delta\, BAP$ में,

$BA = AP$ तथा $\angle BAP = 120°$

∴ $\angle ABP = \angle APB = 30°$

⇒ $\angle PBQ = 60°$

(घ) संलग्न आकृति में, AB वृत्त का व्यास है, $AC = 6$ सेमी और $BC = 8$ सेमी है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)। 4



हल : दिया है, $AC = 6$ सेमी

तथा $BC = 8$ सेमी

हम जानते हैं कि अर्द्धवृत्त में बना कोण हमेशा समकोण होता है।

∴ $\angle C = 90°$ [∵ AB वृत्त का व्यास है।]

अब समकोण $\Delta\, ACB$ में,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

⇒ $AB^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

⇒ $AB = \sqrt{100} = 10$ सेमी [∵ भुजा कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।]

∴ $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times BC \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ सेमी^{2}

यहाँ, वृत्त का व्यास $AB = 10$ सेमी

∴ वृत्त की त्रिज्या $(r) = \frac{10}{2} = 5$ सेमी

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times (5)^2 = 3.14 \times 25 = 78.5$ सेमी^{2}

अत: छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल − ΔABC का क्षेत्रफल

$= 78.5 - 24 = \mathbf{54.5}$ **सेमी^{2}** उत्तर

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) मान लीजिए कि s उस त्रिभुज ABC के अर्द्ध-परिमाप को व्यक्त करता है, जिसमें $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ है। यदि एक वृत्त भुजाओं BC, CA और AB को क्रमश: D, E और F पर स्पर्श करता है, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = s - b$ है। 4

हल : ΔABC के अन्तर्गत एक वृत्त खींचा, जो भुजाओं BC, CA और AB को स्पर्श करता है।

दिया है, $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ हम जानते हैं कि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ समान होती हैं।

$\therefore$ $BD = BF = x$ (माना)

$DC = CE = y$ (माना)

तथा $AE = AF = z$ (माना)

अब, $BC + CA + AB = a + b + c$

$\Rightarrow$ $(BD + DC) + (CE + EA) + (AF + FB) = a + b + c$

$\Rightarrow$ $(x + y) + (y + z) + (z + x) = a + b + c$

$\Rightarrow$ $2(x + y + z) = 2s$ [$\because 2s = a + b + c = \Delta ABC$ का परिमाप]

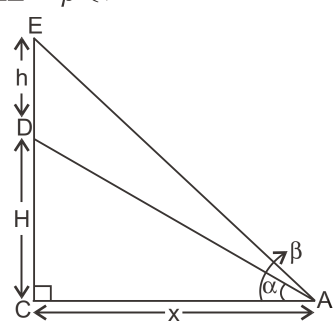
$\Rightarrow$ $s = x + y + z$

$\Rightarrow$ $x = s - (y + z)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{BD = s - b}$ [$\because b = AE + EC = z + y$] **Proved.**

(ख) एक ऊर्ध्वाधर मीनार एक क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा उस पर h ऊँचाई का एक ऊर्ध्वाधर ध्वज-दण्ड लगा हुआ है। समतल के किसी बिन्दु से ध्वज-दण्ड के निचले और ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण क्रमश: α और β हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\left(\dfrac{h \tan \alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}\right)$ है। 4

हल : माना CD एक मीनार है। जिसके ऊपर DE एक ध्वज दण्ड लगा है। समतल के किसी बिन्दु A पर ध्वज दण्ड के पाद और चोटी का उन्नयन कोण क्रमश: α तथा β हैं अर्थात $\angle CAD = \alpha$ और $\angle CAE = \beta$ है।



माना $DE = h$ तथा $DC = H$ और $AC = x$

अब, समकोण ΔCAE में,

$$\tan\beta = \frac{CE}{AC} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{CD + DE}{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{H + h}{x} \quad \text{...(1)}$$

समकोण ΔCAD में,

$$\tan\alpha = \frac{CD}{AC} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{H}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{H}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad x = H\cot\alpha \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (2) से x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\tan\beta = \frac{H + h}{H\cot\alpha} = \frac{H + h}{H}.\tan\alpha \quad \left[\because \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\right]$$

$\Rightarrow \quad H \tan\beta = H \tan\alpha + h \tan\alpha$

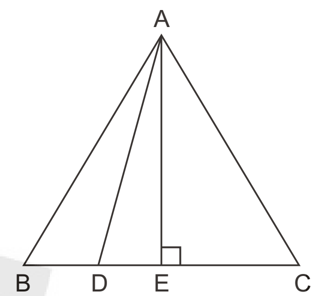
$\Rightarrow \quad H \tan\beta - H \tan\alpha = h \tan\alpha$

$\Rightarrow \quad H (\tan\beta - \tan\alpha) = h \tan\alpha$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{h \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

अतः **मीनार की ऊँचाई $\boldsymbol{\frac{h \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}}$ है।** **Proved.**

(ग) किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है। 4



हल : दिया है : $\Delta\ ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसके आधार BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3}BC$

सिद्ध करना है : $9\ AD^2 = 7\ AB^2$

रचना : A से BC पर AE लम्ब खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ समबाहु $\Delta\ ABC$ में,

$$AE \perp BC$$

$$\therefore \quad BE = CE = \frac{1}{2}BC$$

($\because$ समबाहु त्रिभुज में शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उस भुजा को समद्विभाजित करता है।)

$$\therefore \quad BE = \frac{1}{2}AB \qquad (\because BC = AB) \quad \ldots(1)$$

समकोण त्रिभुज AEB में,

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AE^2 \qquad [\text{ समीकरण}(1) \text{ से}]$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AE^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = AE^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 = AE^2 \qquad \ldots(2)$$

समकोण त्रिभुज AED में,

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \quad AE^2 = AD^2 - DE^2 \qquad \ldots(3)$$

$\because$ बिन्दु D पर BC समत्रिभाजित होता है।

$$BD = \frac{1}{3}BC \qquad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \quad BD = \frac{1}{3}AB \qquad (\because BC = AB) \ldots(4)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$$BE - BD = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB$$

$$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{6}AB \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (2) व समीकरण (3) से,

$$\frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - DE^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{6}AB\right)^2$$ [समीकरण (5) से]

$\Rightarrow$ $$\frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{36}AB^2 = AD^2$$

दोनों पक्षों में लघुत्तम समापवर्त्य 36 से गुणा करने पर,

$$36\times\left(\frac{3}{4}AB^2\right) + 36\times\left(\frac{1}{36}AB^2\right) = 36\ AD^2$$

$\Rightarrow$ $$27\ AB^2 + AB^2 = 36\ AD^2$$

$\Rightarrow$ $$28\ AB^2 = 36\ AD^2$$

$\Rightarrow$ $$7\ AB^2 = 9\ AD^2$$ (4 सार्वनिष्ठ है)

अत: $$9\ AD^2 = 7\ AB^2$$ **Proved.**

(घ) एक रेलगाड़ी एकसमान चाल से 360 किमी की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी/घण्टा अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घण्टा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए। 4

हल : माना रेलगाड़ी की चाल x किमी प्रति घण्टा है।

सूत्र; समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$ से, 360 किमी दूरी तय करने का समय = $\frac{360}{x}$ घण्टा

यदि रेलगाड़ी की चाल 5 किमी प्रति घण्टा अधिक होती अर्थात चाल $(x + 5)$ किमी प्रति घण्टा होती तो 360 किमी दूरी तय करने का समय = $\frac{360}{x+5}$ घण्टा होता।

$\because$ यह समय पहले समय से 1 घण्टा कम है।

$\therefore$ $$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{360\,x + 1800 - 360\,x}{x\,(x+5)} = 1$$ [सरल करने पर]

$\Rightarrow$ $$\frac{1800}{x^2 + 5\,x} = 1$$ [संक्षेपीकरण से]

$\Rightarrow$ $$x^2 + 5\,x = 1800$$ [वज्रगुणन से]

$\Rightarrow$ $$x^2 + 5\,x - 1800 = 0$$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, \quad b = 5 \quad \text{तथा} \quad c = -1800$$

तब द्विघात सूत्र से, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$\therefore$ $$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\times 1\times -1800}}{2\times 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 7200}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{7225}}{2} = \frac{-5 \pm 85}{2}$$

$\therefore \quad x = \frac{-5+85}{2}$ या $\frac{-5-85}{2}$

$= \frac{80}{2}$ या $-\frac{90}{2}$

$= 40$ या -45

$\because$ रेलगाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती जिससे x का मान -45 स्वीकार्य नहीं है, तब $x = 40$

अत: **रेलगाड़ी की चाल = 40 किमी प्रति घण्टा।** **उत्तर**

7. सभी खण्ड कीजिए :

(क) किसी शहर में एक वर्ष के 66 दिन की वर्षा का रिकॉर्ड नीचे सारणी में दिया गया है : 6

वर्षा (सेमी में)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
दिनों की संख्या	22	10	8	15	5	6

'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार के' तोरणों का प्रयोग करके माध्यक वर्षा परिकलित कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि, किसी शहर में एक वर्ष की वर्षा का रिकॉर्ड 0 से कम 0 है। इसी प्रकार, किसी शहर में एक वर्ष की वर्षा का रिकॉर्ड 10 से कम अपने अन्तर्गत 0 से लेकर वर्ग 0 – 10 तक को सम्मिलित करता है।

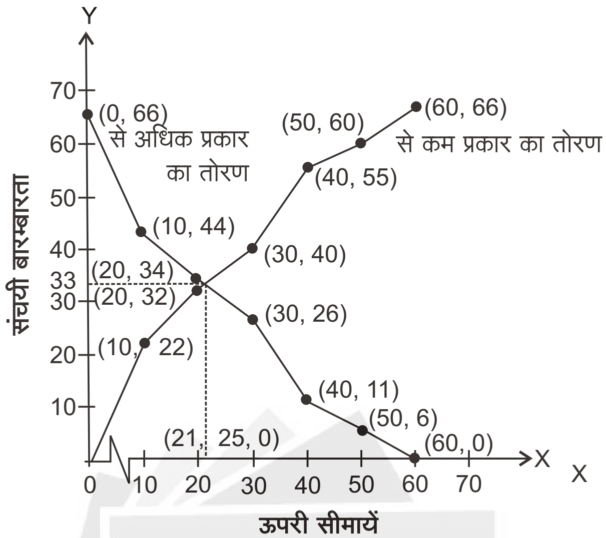
$\therefore$ 10 से कम के लिए किसी शहर में एक वर्ष की कुल वर्षा का रिकॉर्ड $0 + 22 = 22$ दिन है। इसी क्रम में आगे बढ़ने पर हम 20, 30, 40, 50 तथा 60 से कम प्राप्त करेंगे। साथ ही हम यह भी देखते हैं कि 66 दिनों के लिए किसी शहर में एक वर्ष की वर्षा का रिकॉर्ड 0 सेमी के बराबर या उससे अधिक है। चूँकि 22 दिन वर्ग 0 – 10 में विद्यमान है। इसलिए $66 - 22 = 44$ दिनों के लिए एक वर्ष की वर्षा का रिकॉर्ड 10 सेमी के बराबर या उससे अधिक है। इसी क्रम में आगे बढ़ने पर हम 20, 30, 40, 50 तथा 60 के बराबर या उससे अधिक प्राप्त करेंगे।

अब हम 'से कम प्रकार' और 'से अधिक प्रकार' के लिए एक सारणी की रचना करते हैं।

(i) से कम प्रकार		**(ii) से अधिक प्रकार**	
वर्षा (सेमी में)	**दिनों की संख्या**	**वर्षा (सेमी में)**	**दिनों की संख्या**
0 से कम	0	0 के बराबर या उससे अधिक	66
10 से कम	$0 + 22 = 22$	10 के बराबर या उससे अधिक	$66 - 22 = 44$
20 से कम	$22 + 10 = 32$	20 के बराबर या उससे अधिक	$44 - 10 = 34$
30 से कम	$32 + 8 = 40$	30 के बराबर या उससे अधिक	$34 - 8 = 26$
40 से कम	$40 + 15 = 55$	40 के बराबर या उससे अधिक	$26 - 15 = 11$
50 से कम	$55 + 5 = 60$	50 के बराबर या उससे अधिक	$11 - 5 = 6$
60 से कम	$60 + 6 = 66$	60 के बराबर या उससे अधिक	$6 - 6 = 0$

'से कम प्रकार' के तोरण को बनाने के लिए हम पेपर पर (0, 0), (10, 22), (20, 32), (30, 40), (40, 55), (50, 60) और (60, 66) बिन्दुओं को अंकित करते हैं तथा हस्त मुक्त रेखा द्वारा इन्हें मिलाते हैं।

'से अधिक प्रकार' के तोरण को बनाने के लिए हम पेपर पर (0, 66), (10, 44), (20, 34), (30, 26), (40, 11), (50, 6) और (60, 0) बिन्दुओं को अंकित करते हैं तथा हस्तमुक्त रेखा द्वारा इन्हें मिलाते हैं।



∵ दिनों की संख्या $(n) = 66$

अब $\dfrac{n}{2} = \dfrac{66}{2} = 33$

सर्वप्रथम हम दोनों तोरणों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर X-अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते हैं। जो आगे चलकर Y-अक्ष को बिन्दु $(0, 33)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अब, हम दोनों तोरणों के प्रतिच्छेद बिन्दु पर X-अक्ष के लम्बवत् एक रेखा खींचते हैं, जो आगे चलकर X-अक्ष को बिन्दु $(21.25, 0)$ पर प्रतिच्छेद करती है। यही तोरणों के प्रयोग द्वारा ज्ञात अभीष्ट माध्यक है।

अत: **माध्यक वर्षा = 21.25 सेमी** **उत्तर**

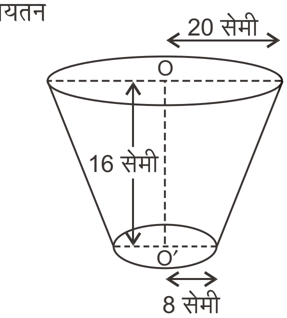
अथवा **एक 16 सेमी ऊँचाई वाला दूध का बर्तन एक धातु की चादर से शंकु के एक छिन्नक के आकार का बना हुआ है। इसके निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 8 सेमी और 20 सेमी हैं। इस बर्तन में जितना दूध आ सकता है, उसकी ₹ 22 प्रति लीटर की दर से लागत ज्ञात कीजिए।** 6

हल : दिया है, दूध के बर्तन की ऊँचाई $(h) = 16$ सेमी

तथा दूध के बर्तन की निचले सिरे की त्रिज्या, $r = 8$ सेमी

तथा दूध के बर्तन की ऊपरी सिरे की त्रिज्या, $R = 20$ सेमी

∴ एक धातु की चादर से शंकु के एक छिन्नक के आकार के बने हुए दूध के बर्तन का आयतन



$$= \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)\,h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7}\{(20)^2 + (8)^2 + 20 \times 8\} \times 16$$

$$= \frac{22}{21}(400 + 64 + 160) \times 16$$

$$= \frac{219648}{21}$$

$= 10459.42$ सेमी^{3} $= 10.45942$ लीटर [∵ 1 लीटर = 1000 सेमी^{3}]

∴ दूध के बर्तन का आयतन 10459.42 सेमी^{3}

∵ 1 लीटर दूध का मूल्य = ₹ 22

∴ 10.45942 लीटर दूध का मूल्य $= 22 \times 10.45942 =$ ₹ 230.12

अत: **दूध का अभीष्ट मूल्य ₹ 230.12 है।** **उत्तर**

(ख) बिन्दुओं $A(-1, -1)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 4)$ और $D(5, -1)$ से एक आयत $ABCD$ बनता है। P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। क्या चतुर्भुज $PQRS$ एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए। 6

हल : दिए हुए बिन्दु $A \equiv (-1, -1)$, $B \equiv (-1, 4)$, $C \equiv (5, 4)$, $D \equiv (5, -1)$ एक आयत $ABCD$ के शीर्ष है।

यहाँ, $(x_1, y_1) = (-1, -1)$, $(x_2, y_2) = (-1, 4)$,

$(x_3, y_3) = (5, 4)$ तथा $(x_4, y_4) = (5, -1)$

रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु $P = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right] = \left(\frac{-1+(-1)}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$

$$= \left(\frac{-2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

रेखाखण्ड BC का मध्य-बिन्दु $Q = \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right] = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2}\right) = (2, 4)$

रेखाखण्ड CD का मध्य-बिन्दु $R = \left[\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}\right] = \left(\frac{5+5}{2}, \frac{4+(-1)}{2}\right)$

$$= \left(\frac{10}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(5, \frac{3}{2}\right)$$

रेखाखण्ड DA का मध्य-बिन्दु $S = \left[\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}\right] = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right)$

$$= \left(\frac{4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (2, -1)$$

तब, $P = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $Q = (2, 4)$, $R = \left(5, \frac{3}{2}\right)$, $S = (2, -1)$

अब दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र से,

भुजा $PQ = \sqrt{[2-(-1)]^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(3)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

भुजा $QR = \sqrt{(5-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{(3)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

भुजा $RS = \sqrt{(2-5)^2 + \left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

भुजा $SP = \sqrt{[(-1)-2]^2 + \left(\frac{3}{2} - (-1)\right)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

विकर्ण $PR = \sqrt{[5-(-1)]^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(6)^2 + 0} = 6$

विकर्ण $QS = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$

$\because$ चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = QR = RS = SP$ और विकर्ण $PR \neq$ विकर्ण QS

अतः **चतुर्भुज $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।** **उत्तर**

अथवा **दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए, $6m + 2$ या $6m + 5$ के रूप का नहीं हो सकता।** 6

हल : यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$$a = bq + r, \qquad 0 \le r < b$$

यहाँ $b = 6$ रखने पर,

$$a = 6q + r, \qquad 0 \le r < 6$$

जब $r = 0$, तब

$$a = 6q + 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6q$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q)^2 = 36q^2 = 6(6q^2) = 6m$ (जहाँ $m = 6q^2$ एक पूर्णांक है।)

जब $r = 1$, तब

$$a = 6q + 1$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q + 1)^2 = 36q^2 + 1 + 12q$

$= 36q^2 + 12q + 1 = 6(6q^2 + 2q) + 1 = 6m + 1$

(जहाँ $m = 6q^2 + 2q$ एक पूर्णांक है।)

जब $r = 2$, तब

$$a = 6q + 2$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q + 2)^2 = 36q^2 + 4 + 24q$

$= 36q^2 + 24q + 4 = 6(6q^2 + 4q) + 4$

$= 6m + 4$ (जहाँ $m = 6q^2 + 4q$ एक पूर्णांक है।)

जब $r = 3$, तब

$$a = 6q + 3$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q + 3)^2 = 36q^2 + 9 + 36q$

$= 36q^2 + 36q + 6 + 3 = 6(6q^2 + 6q + 1) + 3$

$= 6m + 3$ (जहाँ $m = 6q^2 + 6q + 1$ एक पूर्णांक है।)

जब $r = 4$, तब

$$a = 6q + 4$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q + 4)^2 = 36q^2 + 16 + 48q$

$= 36q^2 + 48q + 12 + 4$

$= 6(6q^2 + 8q + 2) + 4 = 6m + 4$

(जहाँ $m = 6q^2 + 8q + 2$ एक पूर्णांक है।)

जब $r = 5$, तब

$$a = 6q + 5$$

$\Rightarrow$ $a^2 = (6q + 5)^2 = 36q^2 + 25 + 60q$

$= 36q^2 + 60q + 24 + 1$

$= 6(6q^2 + 10q + 4) + 1 = 6m + 1$

(जहाँ $m = 6q^2 + 10q + 4$ एक पूर्णांक है।)

●

Sample Paper 3

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] [**पूर्णांक :** 70

निर्देश: पूर्ववत्।

1. सभी खण्ड कीजिए :

प्रत्येक खण्ड में दिए गए प्रश्न के उत्तर के लिए चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) समीकरण $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$: 1

(a) के चार वास्तविक मूल हैं (b) के दो वास्तविक मूल हैं

(c) के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (d) का एक वास्तविक मूल है।

हल : दी गई समीकरण : $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0 \qquad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$\Rightarrow \quad x^2 + x + 1 = 0$ या $x^2 - x + 1 = 0$

समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के लिए :

यहाँ $a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$

$\therefore$ विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

अत: समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के लिए :

यहाँ $a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$

$\therefore$ विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

अत: समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

इस प्रकार समीकरण $(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ख) यदि द्विघात बहुपद $(k - 1)x^2 + kx + 1$ के शून्यकों में से एक शून्यक -3 है, तो k का मान है : 1

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{-4}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{-2}{3}$.

हल : दिया है, बहुपद $f(x)$ का एक शून्यक -3 है।

$\therefore \quad f(-3) = 0$

$\Rightarrow \quad (k-1)(-3)^2 + k(-3) + 1 = 0 \qquad [\because f(x) = (k-1)x^2 + kx + 1]$

$\Rightarrow \quad 9(k-1) - 3k + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 9k - 9 - 3k + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 6k - 8 = 0$

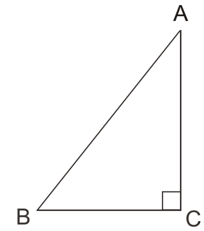
$\Rightarrow \quad k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\therefore \quad k = \frac{4}{3}$

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

(ग) यदि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण C समकोण है, तो $\cos(A+B)$ का मान है : 1

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



हल : हम जानते हैं कि त्रिभुज के अन्त: कोणों का योग 180° होता है।

$\therefore$ $\Delta\, ABC$ में, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

परन्तु दिया है, $\angle C$ समकोण है अर्थात $\angle C = 90°$

$\therefore$ $\angle A + \angle B + 90° = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle A + \angle B = 90°$

$\Rightarrow$ $A + B = 90°$ $[\because \angle A = A]$

$\therefore$ $\cos (A + B) = \cos 90° = 0$

अत: विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

(घ) बिन्दुओं (0, 5) और (–5, 0) के बीच की दूरी है : 1

(a) 5 (b) $5\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 10.

हल : $\because$ बिन्दुओं $(x_1, \ y_1)$ तथा $(x_2, \ y_2)$ के बीच की दूरी,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

यहाँ, $x_1 = 0, y_1 = 5$ तथा $x_2 = -5, y_2 = 0$

$\therefore$ बिन्दुओं (0, 5) तथा (– 5, 0) के बीच की दूरी $= \sqrt{(-5-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}$

$$= \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(ङ) किसी पूर्णांक *m* के लिए, प्रत्येक सम पूर्णांक निम्नलिखित रूप का होता है : 1

(a) m (b) $m+1$ (c) $2m$ (d) $2m+1$.

हल: किसी पूर्णांक m के लिए, प्रत्येक सम पूर्णांक $2m$ रूप का होता है, जहाँ $m = 1, 2, 3, 4, ...$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(च) A.P. : $-5, \frac{-5}{2}, 0, \frac{5}{2}, ...$ का 11वाँ पद है : 1

(a) -20 (b) 20 (c) -30 (d) 30.

हल : दी गई A.P. : $-5, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, ...$

यहाँ, $a = -5,\ d = -\frac{5}{2} - (-5) = -\frac{5}{2} + 5 = \frac{-5+10}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 11वाँ पद $a_{11} = a + (11-1)\, d$ $[\because a_n = a + (n-1)\, d]$

$\Rightarrow$ $a_{11} = -5 + 10 \times \frac{5}{2} = -5 + 25 = 20$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि $\cos A + \cos^2 A = 1$ है तो सिद्ध कीजिए $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$. **1**

हल : $\because$ $\cos A + \cos^2 A = 1$

$\Rightarrow$ $\cos A = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$\Rightarrow$ $\cos^2 A = \sin^4 A$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow$ $1 - \sin^2 A = \sin^4 A$

$\Rightarrow$ $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ $[\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A]$

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

(ख) एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 0 तथा $\sqrt{5}$ हैं। 1

हल : माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= (\alpha + \beta)$ और शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\,\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग 0 तथा गुणनफल $\sqrt{5}$ है।

तब, $\alpha + \beta = 0$ तथा $\alpha\,\beta = \sqrt{5}$ ...(1)

$\because$ शून्यक α व β हैं।

$\therefore$ द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)(\alpha - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\,\beta$

$= x^2 - 0\,.\,x + \sqrt{5}$ [समीकरण (1) से]

$= x^2 + \sqrt{5}$

अत: **अभीष्ट बहुपद $= x^2 + \sqrt{5}$** **उत्तर**

(ग) निम्न बारम्बारता बण्टन का माध्यक वर्ग लिखिए। 1

वर्ग-अन्तराल	**बारम्बारता**
0 – 10	5
10 – 20	8
20 – 30	7
30 – 40	12
40 – 50	28
50 – 60	20
60 – 70	10
70 – 80	10

हल : संचयी बारम्बारता : 5, 13, 20, 32, 60, 80, 90, 100

$\because$ $\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$, जो कि संचयी बारम्बारता 60 के अन्तर्गत आती हैं।

$\therefore$ माध्यक वर्ग $= 40 - 50$

(घ) क्या श्रेढ़ी $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$ एक A. P. है? यदि हाँ, तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए और इसके तीन और पद लिखिए। 1

दिया हुआ अनुक्रम : $\sqrt{3},\ \sqrt{6},\ \sqrt{9},\ \sqrt{12}, ...$

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_2 = \sqrt{6}, \quad a_3 = \sqrt{9}, \quad a_4 = \sqrt{12}$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर : $a_2 - a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\,\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\,(\sqrt{2} - 1)$

$a_3 - a_2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = \sqrt{3}\,\sqrt{3} - \sqrt{3}\,\sqrt{2} = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$a_4 - a_3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} = \sqrt{4}\,\sqrt{3} - \sqrt{3}\,\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(\sqrt{4} - \sqrt{3})$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर नियत नहीं है।

अत: **दिया गया अनुक्रम एक A.P. नहीं है।** **उत्तर**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) समान आधार त्रिज्या r वाले दो सर्वसम ठोस अर्द्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। इस संयोजन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6\pi r^2$ है। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए। 2

हल : एक अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

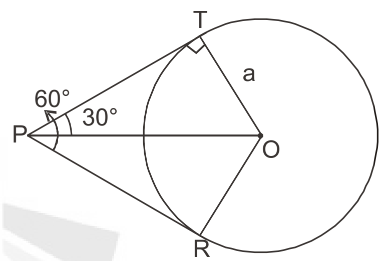
यहाँ, समान आधार त्रिज्या r वाले दो सर्वसम ठोस अर्द्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ा गया है।

इस प्रकार, दोनों अर्द्धगोलों का आधार उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ संयोजन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi r^2 = 4\pi r^2$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(ख) यदि किसी बिन्दु P से दूरी त्रिज्या a और केन्द्र O वाले वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $60°$ है, तो $OP = a\sqrt{3}$ होता है। क्या यह कथन सत्य है? कारण दीजिए। 2



हल : बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ खींचीं।

दिया है, $OT = a$ (वृत्त की त्रिज्या)

तथा रेखा OP, $\angle RPT$ को समद्विभाजित करती है।

$$\therefore \quad \angle TPO = \angle RPO = \frac{1}{2}\angle RPT$$

$$= \frac{1}{2} \times 60° = 30°$$

तथा $OT \perp PT$

[$\because$ वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त की त्रिज्या पर लम्ब होती है।]

समकोण $\Delta\, OTP$ में,

$$\sin 30° = \frac{OT}{OP}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{a}{OP} \quad \Rightarrow \quad OP = 2a$$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(ग) अपूर्व दो पासों को फेंकता है तथा इन पासों पर आने वाली संख्याओं का गुणनफल परिकलित करता है। पीहू एक पासे को फेंकती है तथा उस पर आयी संख्या का वर्ग कर देती है। संख्या 36 प्राप्त करने का किसका अधिक अच्छा संयोग है और क्यों? 2

हल : अपूर्व दो पासों को फेंकता है।

$\therefore$ सम्भव परिणामों की कुल संख्या $= 6 \times 6 = 36$

गुणनफल 36 प्राप्त करने के सम्भावित परिणाम = केवज 6×6

$\therefore$ गुणनफल 36 प्राप्त करने के सम्भावित परिणामों की संख्या = 1

$$\text{अत: अपूर्व के लिए प्रायिकता} = \frac{\text{सम्भावित परिणामों की संख्या}}{\text{सम्भव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{36}$$

अब, पीहू एक पासे को फेंकती है।

$\therefore$ सम्भव परिणामों की कुल सुख्या = 6

वर्ग 36 प्राप्त करने के सम्भावित परिणाम = केवल 6^2

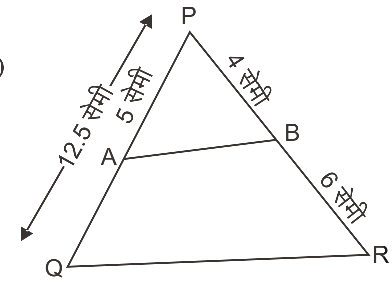
$\therefore$ वर्ग 36 प्राप्त करने के सम्भावित परिणामों की संख्या = 1

$$\text{अत: पीहू के लिए प्रायिकता} = \frac{\text{सम्भावित परिणामों की संख्या}}{\text{सम्भव परिणामों की कुल संख्या}} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$$

अत: **पीहू के लिए 36 प्राप्त करने का अधिक अच्छा संयोग हैं।** **उत्तर**

(घ) किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु A और B इस प्रकार स्थित हैं कि $PQ = 12.5$ सेमी, $PA = 5$ सेमी, $BR = 6$ सेमी और $PB = 4$ सेमी है। क्या $AB \parallel QR$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए। 2

हल : दिया है, $PQ = 12.5$ सेमी, $PA = 5$ सेमी, $BR = 6$ सेमी तथा $PB = 4$ सेमी



तब $QA = QP - PA = 12.5 - 5 = 7.5$

अब, $$\frac{PA}{AQ} = \frac{5}{7.5} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} \quad ...(1)$$

तथा $$\frac{PB}{BR} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,
$$\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BR}$$

आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से,
$$AB \parallel QR$$

अत: दिया गया कथन **सत्य** है। **उत्तर**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिए : 2

2, 7, 12, ...10 पदों तक।

हल : दी गई समान्तर श्रेढ़ी : 2, 7, 12, ... , 10 पदों तक

प्रथम पद $a = 2$, सार्वअन्तर $d = 7 - 2 = 5$ तथा पदों की संख्या $n = 10$

$\because$ A.P. के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore$ 10 पदों तक योग $S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10-1)5]$

$$= 5[4 + (9 \times 5)] = 5[4 + 45] = 5 \times 49 = 245$$

अत: **10 पदों तक का योग = 245** **उत्तर**

(ख) c के सभी वास्तविक मानों के लिए, समीकरण-युग्म $x - 2y = 8, 5x - 10y = c$ का एक अद्वितीय हल है। औचित्य के साथ उत्तर दीजिए कि यह सत्य है या असत्य। 2

हल : दिया गया रैखिक समीकरण युग्म है :

$$x - 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - 8 = 0 \quad ...(1)$$

तथा $$5x - 10y = c \quad \Rightarrow \quad 5x - 10y - c = 0 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) की तुलना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा समीकरण (2) की तुलना $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad c_1 = -8$$

तथा $$a_2 = 5, \quad b_2 = -10, \quad c_2 = -c$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{5}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-c} = \frac{8}{c}$

$\because$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ c के सभी वास्तविक मानों के लिए, दिया गया समीकरण-युग्म कभी भी एक अद्वितीय हल नहीं रखता है।

जब $c = 40$ है, तब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिया गया समीकरण-युग्म अपरिमित रूप से अनेक हल रखता है।

तथा $c = 40$ को छोड़कर, सभी वास्तविक मानों के लिए,
दिया गया समीकरण-युग्म सदैव कोई भी हल नहीं रखता है।

क्योंकि इस स्थिति में, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

(ग) सिद्ध कीजिए : $\cos 38° \cdot \cos 52° - \sin 38° \cdot \sin 52° = 0$ 2

हल : $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52°$

$$= \cos 38° \cos(90° - 38°) - \sin 38° \sin(90° - 38°)$$

$$= \cos A \cos(90° - A) \sin A \sin(90° - A) \quad [\text{ यदि } 38° = A \text{ हो }]$$

$$= \cos A \sin A - \sin A \cos A$$

$$[\because \cos(90° - A) = \sin A \text{ और } \sin(90° - A) = \cos A]$$

$$= \sin A \cos A - \sin A \cos A$$

$$= 0$$

अत: $\mathbf{\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0}$ **Proved.**

(घ) एक ऐसी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिसके वर्ग में से 84 कम करने पर वह दी हुई संख्या से 8 अधिक संख्या के तिगुने के बराबर हो। 2

हल : माना x अभीष्ट प्राकृत संख्या है।

प्रश्नानुसार, $x^2 - 84 = 3(x + 8)$

$\Rightarrow \quad x^2 - 84 = 3x + 24$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 12x + 9x - 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x - 12) + 9(x - 12) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 12)(x + 9) = 0$

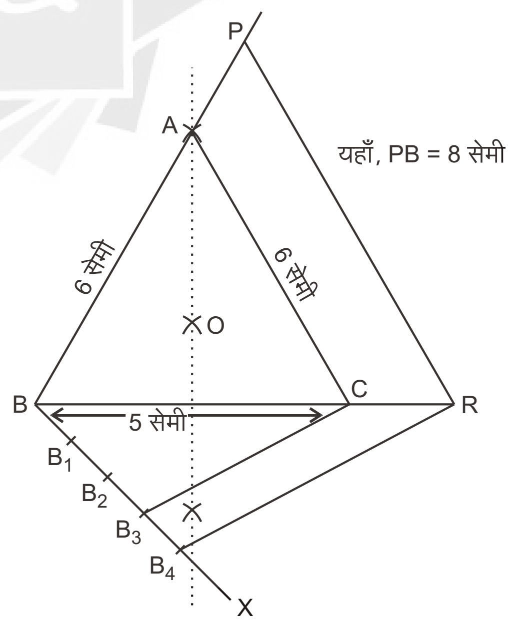
$\Rightarrow \quad x = 12$ [यहाँ $x \neq -9$ क्योंकि x एक प्राकृत संख्या है।]

अत: **अभीष्ट प्राकृत संख्या 12 है।** **उत्तर**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $AB = AC = 6$ सेमी और $BC = 5$ सेमी है। ABC के समरूप, एक त्रिभुज PBR की रचना कीजिए, जिसमें $PB = 8$ सेमी हो। अपनी रचना का औचित्य भी दीजिए। 4

हल : माना $\Delta\, PBR$ तथा $\Delta\, ABC$ समरूप त्रिभुज है। तब इनकी संगत भुजाओं के मध्य स्केल गुणक $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ है।



रचना के पद :

(1) $BC = 5$ सेमी का एक रेखाखण्ड खींचिए।

(2) रेखाखण्ड BC के लम्ब समद्विभाजक OP' की रचना करते हैं जो BC को बिन्दु P' पर मिलता है।

(3) B तथा C को केन्द्र मानकर 6 सेमी त्रिज्या के दो चाप खींचते हैं जो एक-दूसरे को A पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(4) BA तथा CA को मिलाते हैं। इस प्रकार, $\Delta\, ABC$ अभीष्ट समद्विबाहु त्रिभुज है।

(5) B से, न्यूनकोण $\angle CBX$ बनाते हुए एक किरण BX खींचते हैं।

(6) BX पर चार बिन्दु B_1, B_2, B_3 तथा B_4 इस प्रकार अंकित करते हैं कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ हो।

(7) B_3C को मिलाते हैं तथा B_4 से एक रेखा $B_4R \parallel B_3C$ खींचते हैं जो विस्तारित रेखाखण्ड BC को R पर प्रतिच्छेद करती है।

(8) बिन्दु R से, एक रेखा $RP \parallel CA$ खींचते हैं जो विस्तारित रेखाखण्ड BA को P पर प्रतिच्छेद करती है। तब, ΔPBR अभीष्ट त्रिभुज है।

तर्क (Justification) :

$\because \quad B_4R \parallel B_3C$ (रचना से)

$\therefore \quad \dfrac{BC}{CR} = \dfrac{3}{1}$

अब, $\quad \dfrac{BR}{BC} = \dfrac{BC + CR}{BC} = 1 + \dfrac{CR}{BC} = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

तथा $\quad RP \parallel CA$

$\therefore \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, PBR$

$\Rightarrow \quad \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{RP}{CA} = \dfrac{BR}{BC} = \dfrac{4}{3}$

अत: नया त्रिभुज दिए गए त्रिभुज के समरूप है जिसकी भुजाएँ समद्विबाहु $\Delta\, ABC$ की संगत भुजाओं की $\dfrac{4}{3}$ हैं।

(ख) एक पेटी में 12 गेंदें हैं, जिनमें से x गेंद काली हैं। यदि इसमें से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद काली है।

यदि इस पेटी में 6 काली गेंद और डाल दी जाएँ, तो काली गेंद निकालने की प्रायिकता पहली प्रायिकता की दुगुनी हो जाती है। x का मान ज्ञात कीजिए। 4

हल : दिया है, पेटी में गेंदों की कुल संख्या = 12

तथा काली गेंदों की संख्या $= x$

यदि पेटी में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है तो गेंद निकाले जाने के कुल सम्भव परिणाम = 12

निकाली गई गेंद काली होने की घटना के अनुकूल परिणाम $= x$

अत: निकाली गई गेंद काली होने की प्रायिकता $= \dfrac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}} = \dfrac{x}{12}$

यदि पेटी में 6 काली गेंद और मिला दी जाएँ तो काली गेंद निकलने के अनुकूल परिणाम $= x + 6$

तथा कुल सम्भव परिणाम $= 12 + 6 = 18$

अत: अब काली गेंद निकलने की प्रायिकता $= \dfrac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}} = \dfrac{x+6}{18}$

प्रश्नानुसार, वर्तमान प्रायिकता $= 2 \times$ पहले की प्रायिकता

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+6}{18} = 2 \times \dfrac{x}{12}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+6}{18} = \dfrac{x}{6}$

$\Rightarrow \quad 18\,x = 6\,x + 36$

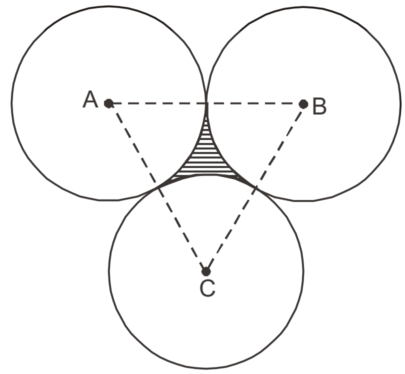
$\Rightarrow \quad 18\,x - 6\,x = 36$

$\Rightarrow \quad 12\,x = 36$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{36}{12} = 3$

अत: **x का मान = 3** **उत्तर**

(ग) बराबर त्रिज्या 3.5 सेमी वाले तीन वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि इनमें से प्रत्येक अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता है। इन वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4



हल : दिया है कि तीन वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि इनमें से प्रत्येक अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता है। अब, एक रेखाखण्ड द्वारा तीनों वृत्तों के केन्द्रों को एक-दूसरे से मिलाते हैं। चूँकि प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या 3.5 सेमी है।

$\therefore$ $AB = 2 \times$ वृत्त की त्रिज्या

$= 2 \times 3.5 = 7.0$ सेमी

$\Rightarrow$ $AB = BC = CA = 7.0$ सेमी

जो यह दर्शाता है कि $\Delta\, ABC$, 7 सेमी भुजा का एक समबाहु त्रिभुज है।

हम जानते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज की दो संलग्न भुजाओं के मध्य कोण 60° होता है।

$\therefore$ केन्द्रीय कोण A के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\angle A}{360°} \times \pi r^2$ $[\because \angle A = \angle B = \angle C = 60°]$

$= \dfrac{60°}{360°} \times \pi \times (3.5)^2$

$\therefore$ प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= 3 \times$ केन्द्रीय कोण A के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= 3 \times \dfrac{60°}{360°} \times \pi \times (3.5)^2$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 = 19.25$ सेमी^{2}

तथा $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (7)^2$ $\left[\because \text{ समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल } = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\text{भुजा})^2\right]$

$= \dfrac{49}{4}\sqrt{3}$ सेमी^{2}

$\therefore$ इन वृत्तों से परिबद्ध छायांकित क्षेत्रफल $= \Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $-$ प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= 49\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 19.25 = 12.25 \times \sqrt{3} - 19.25$

$= 21.2176 - 19.25 = 1.9676$ सेमी^{2}

अतः इन वृत्तों से परिबद्ध अभीष्ट क्षेत्रफल 1.967 सेमी^{2} है। **उत्तर**

(घ) 50 कर्मचारियों के एक प्रतिदर्श की दैनिक आय निम्नलिखित रूप में सारणीबद्ध है : 4

आय (₹ में)	1 – 200	201 – 400	401 – 600	601 – 800
कर्मचारियों की संख्या	14	15	14	7

कर्मचारियों की माध्य दैनिक आय ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि दिए गए आँकड़े सतत नहीं हैं, इसलिए हम प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में से 0.5 घटाते हैं तथा ऊपरी सीमा में 0.5 जोड़ देते हैं।

अब सर्वप्रथम हम प्रत्येक वर्ग का मध्यमान x_i ज्ञात करते हैं। इसके पश्चात् निम्नलिखित सारणी बनाते हैं :

आय (₹ में)	**मध्यमान (x_i)**	**कर्मचारियों की संख्या (f_i)**	$u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 300.5}{200}$	$f_i u_i$
0.5 – 200.5	100.5	14	−1	−14
200.5 – 400.5	300.5 = A	15	0	0
400.5 – 600.5	500.5	14	1	14
600.5 – 800.5	700.5	7	2	14
		$N = \sum f_i = 50$		$\sum f_i u_i = 14$

∴ कल्पित माध्य, $A = 300.5$

वर्ग चौड़ाई, $h = 200$

तथा $N = \sum f_i = 50$

पग-विचलन विधि द्वारा,

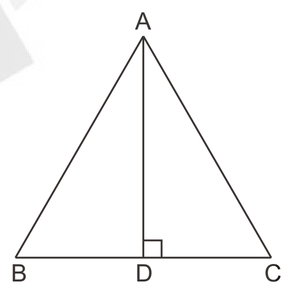
$$\text{माध्य} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 300.5 + \frac{14}{50} \times 200$$

$$= 300.5 + 56 = ₹\ \mathbf{356.51}$$ उत्तर

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है। 4

हल : दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी एक भुजा AB है। शीर्ष A से आधार BC तक शीर्षलम्ब AD खींचा गया है।



सिद्ध करना है : भुजा$^2 \times 3 =$ शीर्ष लम्ब$^2 \times 4$

अर्थात $3AB^2 = 4AD^2$

उपपत्ति : माना $AB = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}AB$

∵ $\Delta\ ABC$ समबाहु है,

∴ $AB = BC = CA \Rightarrow BC = 2a$

∵ शीर्ष A से BC पर AD लम्ब है।

∴ समकोण $\Delta\ ADB$ तथा $\Delta\ ADC$ में,

$AB = AC$ (समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ हैं।)

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक 90°)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

∴ $\Delta\ ABD \sim \Delta\ ACD$ (SAS समरूपता से)

∴ $BD = CD$ परन्तु $BC = BD + CD = 2a \Rightarrow BD = a$

तब, समकोण $\Delta\ ADB$ में, $AB^2 = BD^2 + AD^2$

⇒ $(2a)^2 = (a)^2 + AD^2$

⇒ $AD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

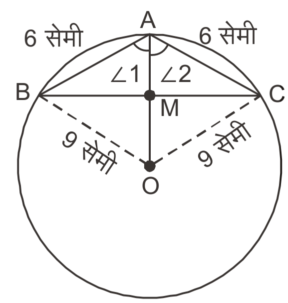
⇒ $AD^2 = 3 \times (a)^2$

$$\Rightarrow \qquad AD^2 = 3\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \qquad \left(\because\ a = \frac{1}{2}AB\right)$$

$$\therefore \qquad AD^2 = \frac{3AB^2}{4}$$

अत: $3\,AB^2 = 4\,AD^2$ अथवा **भुजा**$^2 \times 3 =$ **शीर्षलम्ब**$^2 \times 4$ **Proved.**

(ख) यदि त्रिज्या 9 सेमी वाले एक वृत्त के अन्तर्गत एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचा गया है, जिसमें $AB = AC = 6$ सेमी है, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4



हल : वृत्त के अन्दर $\Delta\ ABC$ बनाया गया है।

OB, OC तथा OA को मिलाया।

$\Delta\ ABO$ तथा $\Delta\ ACO$ में,

$$AB = AC \qquad \text{(दिया है)}$$

$$BO = CO \qquad \text{(त्रिज्या)}$$

$$AO = AO \qquad \text{(उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\therefore \qquad \Delta\ ABO \cong \Delta\ ACO \qquad \text{(SSS सर्वांगसमता से)}$$

$$\Rightarrow \qquad \angle 1 = \angle 2 \qquad \text{(C.P.C.T.)}$$

अब, $\Delta\ ABM$ तथा $\Delta\ ACM$ में,

$$AB = AC \qquad \text{(दिया है)}$$

$$\Rightarrow \qquad \angle 1 = \angle 2 \qquad \text{(ऊपर सिद्ध किया है।)}$$

$$AM = AM \qquad \text{(उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\therefore \qquad \Delta\ AMB \cong \Delta\ AMC \qquad \text{(SAS सर्वांगसमता से)}$$

$$\Rightarrow \qquad \angle\ AMB = \angle AMC \qquad \text{(C.P.C.T.)}$$

$$\text{तथा} \qquad \angle\ AMB + \angle AMC = 180^\circ \qquad \text{(रेखीय युग्म)}$$

हम जानते हैं कि केन्द्र से वृत्त की जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$\therefore$ OA, BC का लम्ब समद्विभाजक है।

माना $AM = x,$ तब $OM = 9 - x$ [$\because OA =$ त्रिज्या $= 9$ सेमी]

समकोण $\Delta\ AMC$ में,

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow \qquad MC^2 = AC^2 - AM^2 = 6^2 - x^2 \qquad \ldots(1)$$

तथा समकोण $\Delta\ OMC$ में,

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow \qquad MC^2 = OC^2 - OM^2$$

$$= 9^2 - (9 - x)^2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$6^2 - x^2 = 9^2 - (9 - x)^2$$

$$\Rightarrow \qquad 36 - x^2 = 81 - (81 + x^2 - 18\,x)$$

$$\Rightarrow \qquad 36 - x^2 = 81 - 81 - x^2 + 18\,x$$

$$\Rightarrow \qquad 36 = 18\,x \qquad \Rightarrow \qquad x = 2$$

समकोण $\Delta\ AMB$ में,

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow \quad 6^2 = BM^2 + 2^2$

$\Rightarrow \quad BM^2 = 36 - 4 = 32$

$\Rightarrow \quad BM = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\therefore \quad BC = 2 . BM = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ सेमी

$\therefore \quad \Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ क्षेत्रफल

$= \dfrac{1}{2} \times BC \times AM$

$= \dfrac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times 2 = 8\sqrt{2}$ वर्ग सेमी

अत: **$\Delta\, ABC$ का अभीष्ट क्षेत्रफल $8\sqrt{2}$ सेमी^{2} है।** **उत्तर**

(ग) निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए : 4

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30},\ x \neq -4, 7$$

दिया गया समीकरण : $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{x-7} = \dfrac{11}{30}, \quad x \neq -4, 7$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1\,(x-7) - 1\,(x+4)}{(x+4)\,(x-7)} = \dfrac{11}{30}$ [सरल करने पर]

$\Rightarrow \quad \dfrac{x - 7 - x - 4}{x^2 - 3x - 28} = \dfrac{11}{30}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-11}{x^2 - 3x - 28} = \dfrac{11}{30}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-1}{x^2 - 3x - 28} = \dfrac{1}{30}$ [दोनों पक्षों को 11 से भाग देने पर]

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 28 = -30$ [वज्रगुणन से]

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$ [पक्षान्तरण से]

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - (2+1)\,x + 2 = 0$ [मध्य-पद के गुणनखण्ड से]

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 1x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x\,(x-2) - 1\,(x-2) = 0$

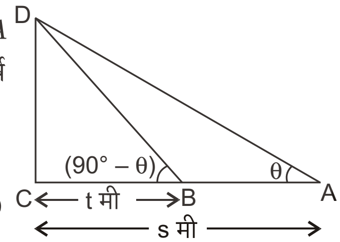
$\Rightarrow \quad (x-2)\,(x-1) = 0$

$\because \quad (x-2)\,(x-1) = 0 \ \Rightarrow \ x - 1 = 0$ या $x - 2 = 0$

यदि $x - 1 = 0$ हो तो $x = 1$ और यदि $x - 2 = 0$ हो तो $x = 2$

अत: **समीकरण के मूल $= 1, 2$** **उत्तर**

(घ) किसी मीनार के आधार से s और t की दूरियों पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार की चोटी के उन्नयन कोण परस्पर पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{st}$ है। 4



हल : माना मीनार की ऊँचाई, $CD = h$ मीटर है। माना भूमि पर स्थित दो बिन्दुओं A और B की मीनार के आधार से दूरियाँ क्रमश: s और t हैं। बिन्दु A तथा B से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण θ तथा $(90° - \theta)$ हैं।

अर्थात $\angle\, DAC = \theta$ तथा $\angle\, DBC = (90° - \theta)$

($\because$ पूरक कोणों का योग 90° होता है)

समकोण $\Delta\, CAD$ में,

$$\tan\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{h}{s} \qquad ...(1)$$

समकोण $\Delta\, CBD$ में,

$$\tan(90° - \theta) = \frac{CD}{BC} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{CD}{BC} = \frac{h}{t} \qquad [\because \tan(90° - \theta) = \cot\theta]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\tan\theta} = \frac{h}{t} \qquad \left[\because \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{t}{h} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

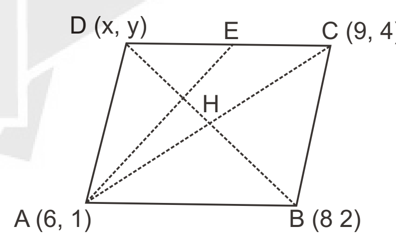
$$\frac{h}{s} = \frac{t}{h} \quad \Rightarrow \quad h^2 = st$$

$$\therefore \quad h = \sqrt{st}$$

अत: **मीनार की ऊँचाई $\sqrt{st}$ है।** **Proved.**

7. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $A(6, 1)$, $B(8, 2)$ और $C(9, 4)$ एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के तीन शीर्ष हैं। यदि E भुजा DC का मध्य-बिन्दु है, तो $\Delta\, ADE$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6



हल : दिया है, $A(6, 1)$, $B(8, 2)$ और $C(9, 4)$ एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के तीन शीर्ष हैं। माना समान्तर चतुर्भुज का चौथा शीर्ष (x, y) है। हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ BD का मध्य-बिन्दु = AC का मध्य-बिन्दु

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{8+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{8+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

[$\because$ बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$]

$$\therefore \quad \frac{8+x}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{तथा} \quad \frac{2+y}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 8 + x = 15 \quad \text{तथा} \quad 2 + y = 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 7 \quad \text{तथा} \quad y = 3$$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज के चौथे शीर्ष के निर्देशांक $D \equiv (7, 3)$

अब, भुजा DC के मध्य बिन्दु E के निर्देशांक $= \left[\frac{7+9}{2}, \ \frac{3+4}{2}\right] = \left(8, \ \frac{7}{2}\right)$

यहाँ, माना $A(6, 1) \equiv (x_1, y_1)$, $D(7, 3) \equiv (x_2, y_2)$ तथा $E(8, 7/2) \equiv (x_3, y_3)$

$\therefore$ ΔADE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}\left[6\left(3 - \frac{7}{2}\right) + 7\left(\frac{7}{2} - 1\right) + 8(1 - 3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 7\left(\frac{5}{2}\right) + 8(-2)\right] = \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{35}{2} - 16\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{35}{2} - 19\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

(परन्तु क्षेत्रफल ऋणात्मक नहीं होता है।)

अत: Δ **ADE का अभीष्ट क्षेत्रफल $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई है।** **उत्तर**

अथवा **एक भवन एक बेलन के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्द्धगोलाकार गुम्बज लगा हुआ है तथा इसमें $41\frac{19}{21}$ मीटर^3 वायु है। यदि इस गुम्बज का आन्तरिक व्यास उसके फर्श से सम्पूर्ण ऊँचाई के बराबर है, तो इस भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।** 6

हल : माना, गुम्बज का आन्तरिक व्यास = फर्श से भवन की सम्पूर्ण ऊँचाई = $2r$ मीटर

$\therefore$ भवन (अथवा गुम्बज) की त्रिज्या $= \frac{2r}{2} = r$ मीटर

तथा बेलन की ऊँचाई $= 2r - r = r$ मीटर

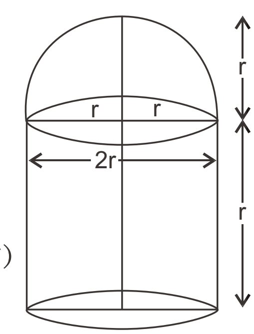
$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2(r) = \pi r^3$ मीटर^3 [$\because$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$]

तथा अर्द्धवृत्ताकार गुम्बज का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$ मीटर^3

$\therefore$ भवन का सम्पूर्ण आयतन = बेलन का आयतन + अर्द्धवृत्ताकार गुम्बज का आयतन

$$= \left(\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3\right) \text{ मीटर}^3$$

$$= \frac{5}{3}\pi r^3 \text{ मीटर}^3$$



प्रश्नानुसार,

भवन का आयतन = वायु का आयतन

$\Rightarrow$ $\frac{5}{3}\pi r^3 = 41\frac{19}{21}$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $\frac{5}{3}\pi r^3 = \frac{880}{21}$

$\Rightarrow$ $\frac{5}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{880}{21}$

$\Rightarrow$ $r^3 = \frac{880 \times 3 \times 7}{5 \times 22 \times 21} = \frac{40 \times 21}{21 \times 5} = 8$

$\Rightarrow$ $r^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

$\therefore$ भवन की अभीष्ट ऊँचाई $= 2r = 2 \times 2 =$ **4 मीटर** **उत्तर**

(ख) एक सर्वे के द्वारा 200 परिवारों के कृषि योग्य भूमि- स्वामित्व साइज नीचे सारणी में दिए हैं : 6

कृषि योग्य भूमि स्वामित्व का साइज (हेक्टेयर में)	परिवारों की संख्या
0 – 5	10
5 – 10	15
10 – 15	30
15 – 20	80
20 – 25	40
25 – 30	20
30 – 35	5

इन भूमि-स्वामित्वों के माध्यक और बहुलक साइज ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम हम संचयी बारम्बारता सारणी की रचना करेंगे।

कृषि योग्य भूमि स्वामित्व का साइज (हेक्टेयर में)	परिवारों की संख्या	संचयी बारम्बारता (cf)
0 – 5	10	10
5 – 10	15	25
10 – 15	$30 = f_0$	$cf = 55$
15 – 20	$f = 80 = f_1$	135
20 – 25	$40 = f_2$	175
25 – 30	20	195
30 – 35	5	200

(i) यहाँ $N = 200$

अब, $\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$, जो वर्ग $(15-20)$ में स्थित है।

निम्न सीमा $(l) = 15$, $f = 80$, $cf = 55$ तथा वर्ग चौड़ाई, $h = 5$

$$\therefore \quad \text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h = 15 + \frac{(100-55)}{80} \times 5 = 15 + \frac{45}{16}$$

$$= 15 + 2.81 = \mathbf{17.81} \text{ **हेक्टेयर**}$$

(ii) दी गई सारणी में, अधिकतम बारम्बारता 80 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग $(15-20)$ है।

यहाँ, निम्न सीमा $(l) = 15$, $f_1 = 80$, $f_0 = 30$, $f_2 = 40$ तथा वर्ग चौड़ाई, $h = 5$

$$\therefore \quad \text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 15 + \left(\frac{80-30}{2 \times 80 - 30 - 40}\right) \times 5$$

$$= 15 + \frac{50 \times 5}{160 - 70} = 15 + \frac{50 \times 5}{90} = 15 + \frac{25}{9} = 15 + 2.77 = \mathbf{17.77} \text{ **हेक्टेयर**}$$

अथवा **सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक अपरिमेय संख्या है, जहाँ p और q अभाज्य संख्याएँ हैं।** 6

हल : माना $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ एक परिमेय संख्या है। तो इस प्रकार के दो सह-अभाज्य पूर्णांक a और b विद्यमान हैं, कि

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}=\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}-\sqrt{q}=\sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}-\sqrt{q}\right)^2=(\sqrt{p})^2$$ [दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2}+q-\frac{2a}{b}\sqrt{q}=p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2}+(q-p)=\frac{2a}{b}\sqrt{q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+(q-p)b^2}{b^2}=\frac{2a}{b}\sqrt{q}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{q}=\frac{a^2+(q-p)b^2}{2ab}$$

$\Rightarrow$ $\sqrt{q}$ एक परिमेय संख्या है। [$\because a, b$ पूर्णांक है। $\therefore \frac{a^2+(q-p)b^2}{2ab}$ एक परिमेय संख्या है।]

यह इस तथ्य का विरोध करता है कि $\sqrt{q}$ अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ हमारी परिकल्पना असत्य हैं।

अतः $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ **एक अपरिमेय संख्या है, जहाँ p और q अभाज्य संख्याएँ हैं।** **Proved.**

Sample Paper | 4

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] [**पूर्णांक :** 70

निर्देश : पूर्ववत्।

1. (क) किसी पूर्णांक m के लिए प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक का रूप होगा : 1

(a) m (b) $m+1$ (c) $2m$ (d) $2m+1$.

हल : किसी पूर्णांक m के लिए, प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2m$ रूप का होता है, जहाँ $m = 1, 2, 3, 4, ...$

अतः विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ख) X-अक्ष पर एक बिन्दु, जो बिन्दुओं A (2, − 5) और B (−2, 9) से समदूरस्थ है, का निर्देशांक होगा : 1

(a) (−7, 0) (b) (0, 7) (c) (0, − 7) (d) (7, 0).

हल : हम जानते हैं कि X-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(h, 0)$ रूप के होते है।

तब माना $P \equiv (h, 0)$

प्रश्नानुसार, $PA = PB$ [जहाँ $A \equiv (2, -5)$ तथा $B \equiv (-2, 9)$]

$\Rightarrow$ $PA^2 = PB^2$

$\Rightarrow$ $(2-h)^2+(-5-0)^2=(-2-h)^2+(9-0)^2$

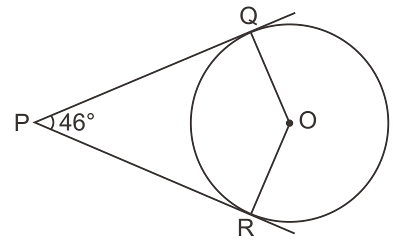
$\Rightarrow$ $4+h^2-4h+25=4+h^2+4h+81$

$\Rightarrow$ $8h=-56 \Rightarrow h=-7$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक = (−7, 0)

अतः विकल्प **(a)** सही है। **उत्तर**

(ग) चित्र में, यदि O केन्द्र के वृत्त की PQ और PR दो स्पर्श रेखाएँ हैं और $\angle QPR = 46°$, तो $\angle QOR$ का मान होगा : 1



(a) 44° (b) 46° (c) 134° (d) 314°.

हल : $\because$ दिए हुए वृत्त में OR तथा OQ त्रिज्याएँ हैं और PQ तथा PR स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore$ $\angle Q = 90°$ तथा $\angle R = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $PQOR$ में,

$\angle QPR + \angle QOR = 180°$ [$\because$ सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।]

$\therefore$ $46° + \angle QOR = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle QOR = 134°$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(घ) $\dfrac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$ का मान होगा : 1

(a) cos 60° (b) sin 60° (c) tan 60° (d) cot 60°.

हल : $$\frac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2/\sqrt{3}}{1 - 1/3} = \frac{2/\sqrt{3}}{2/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$$= \tan 60°.$$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ङ) एक घड़ी की मिनट की सुई r सेमी लम्बी है। 5 मिनट में मिनट की सुई द्वारा बनाए गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल होगा : 1

(a) $\dfrac{\pi r^2}{60}$ (b) $\dfrac{\pi r^2}{12}$ (c) $\dfrac{2\pi r}{12}$ (d) $\dfrac{2\pi r}{60}$.

हल : दिया है, वृत्त की त्रिज्या = घड़ी की मिनट की सुई की लम्बाई = r सेमी

$\because$ 60 मिनट में मिनट वाली सुई द्वारा बना कोण = 360°

$\therefore$ 5 मिनट में मिनट वाली सुई द्वारा बना कोण $= \dfrac{360°}{60°} \times 5 = 30°$

$\therefore$ बने त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{30°}{360°} \times \pi r^2 = \dfrac{\pi r^2}{12}$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(च) एक थैले में 3 लाल और 2 नीली गेंदें हैं। थैले से यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है। एक नीली गेंद के निकाले जाने की प्रायिकता होगी : 1

(a) $\dfrac{1}{3}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{2}{5}$ (d) $\dfrac{3}{5}$.

हल : थैले में गेदों की कुल संख्या = 3 लाल + 2 नीली = 5

थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकालने पर

कुल सम्भावित परिणाम = 5

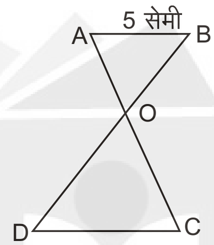
गेंद नीली (B) होने की घटना के अनुकूल परिणाम = 2

$\therefore$ गेंद नीली होने की प्रायिकता $P(B) = \dfrac{\text{घटना } (B) \text{ के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भावित परिणाम}}$

$$= \frac{2}{5}.$$

अत: विकल्प **(c)** सही हैं।

2. (क) चित्र में, यदि $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{1}{2}$ और $AB = 5$ सेमी हो, तो DC का मान ज्ञात कीजिए। 1



हल : दिया है, $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{1}{2}$ तथा $AB = 5$ सेमी

चित्र से स्पष्ट है,

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{5}{DC} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $DC = 2 \times 5 = 10$ **उत्तर**

अत: DC का मान 10 सेमी हैं।

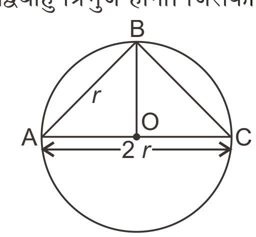
(ख) $\dfrac{\sin 27°}{\cos 63°}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

हल : $\dfrac{\sin 27°}{\cos 63°} = \dfrac{\sin(90° - 63°)}{\cos 63°}$ $[\because \sin(90° - \theta) = \cos\theta]$

$= \dfrac{\cos 63°}{\cos 63°} = 1$ **उत्तर**

(ग) त्रिज्या r के एक अर्द्धवृत्त के अन्दर खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

हल : त्रिज्या r के एक अर्द्धवृत्त के अन्दर खींचे जा सकने वाला सबसे बड़ा त्रिभुज का समद्विबाहु त्रिभुज होगा। जिसका आधार अर्द्धवृत्त के व्यास के बराबर तथा ऊँचाई इसकी त्रिज्या के बराबर होगी।



$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times AC \times OB$

$= \dfrac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

$= \dfrac{1}{2} \times 2r \times r = r^2$

(घ) प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि संख्याओं 1, 2, 3, 4, ..., 35 से चुनी गयी एक संख्या 7 का गुणज है। 1

हल : दिया है, संख्याओं की कुल संख्या = 35

यदि एक संख्या यादृच्छया चुनी जाती है तो

कुल सम्भव परिणाम = (1, 2, 3, ... , 35) = 35

अब, 7 के गुणज वाली संख्याएँ = (7, 14, 21, 28, 35) = 5

7 का गुणज होने की संख्या का घटना के अनुकूल परिणाम = 5

अतः चुनी गयी संख्या 7 का गुणज होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भावित परिणाम}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$ **उत्तर**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए दिखाइए कि परिमेय संख्या $\frac{17}{8}$ सांत दशमलव है या असांत आवर्ती दशमलव है। बिना वास्तविक विभाजन किए इसका दशमलव प्रसार भी ज्ञात कीजिए। 2

हल : $\frac{17}{8} = \frac{17}{2 \times 2 \times 2} = \frac{17}{2^3 \times 5^0}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 = \text{अभाज्य} \end{array}$$

∵ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 2 है जो $2^3 \times 5^0$

अर्थात् $2^n \times 5^m$ रूप का है, जहाँ n तथा m ऋणेत्तर पूर्णांक है।

∴ $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है। **उत्तर**

अब, $$\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} \times \frac{5^3}{5^3} = \frac{17 \times 125}{10^3} = \frac{2125}{1000} = 2.125$$

अतः $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार 2.125 है। **उत्तर**

(ख) बहुपद $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को बहुपद $g(x) = x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म को सत्यापित कीजिए। 2

हल : दिया है, भाज्य $= 3x^2 - x^3 - 3x + 5$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

तथा भाजक $= x - 1 - x^2 = -x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & +2x^2 - 2x + 2 \\ & - \quad + \quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

यहाँ भागफल $= x - 2$ और शेषफल $= 3$ **उत्तर**

अब, भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$= (-x^2 + x - 1) \times (x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

= भाज्य

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित होता हैं। **उत्तर**

(ग) वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दु $P\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right)$, बिन्दुओं $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ और B (2, − 5) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को विभाजित करता है। 2

हल : माना $P\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right)$ रेखाखण्ड AB को अनुपात $m : n$ में अन्त:विभाजित करता है।

विभाजन सूत्र के प्रयोग से,

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right) = \left[\frac{2\,m - \frac{n}{2}}{m+n}, \frac{-5\,m + \frac{3}{2}n}{m+n}\right]$$

[∵ यदि बिन्दु $P(x, y)$, बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्त:विभाजित करता है, तब $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1+m_2}, y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1+m_2}$]

तुलना करने पर, $\frac{3}{4} = \frac{2\,m - \frac{n}{2}}{m+n}$ तथा $\frac{5}{12} = \frac{-5\,m + \frac{3}{2}n}{m+n}$

⇒ $\frac{3}{4} = \frac{4\,m - n}{2\,(m+n)}$ तथा $\frac{5}{12} = \frac{-10\,m + 3\,n}{2\,(m+n)}$

⇒ $\frac{3}{2} = \frac{4\,m - n}{m+n}$ तथा $\frac{5}{6} = \frac{-10\,m + 3\,n}{m+n}$

⇒ $3\,m + 3\,n = 8\,m - 2\,n$ तथा $5\,m + 5\,n = -60\,m + 18\,n$

⇒ $5\,m = 5\,n$ तथा $65\,m = 13\,n$

⇒ $m = n$ तथा $5\,m = n$

∵ $m = n$ सन्तुष्ट नहीं करता है।

∴ $5\,m = n$ ⇒ $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$

अत: **अभीष्ट अनुपात 1 : 5 है।** **उत्तर**

(घ) एक शंक्वाकार बर्तन, जिसका आन्तरिक व्यास 10 सेमी है और ऊँचाई 24 सेमी है, पानी से भरा है। पानी को एक बेलनाकार पात्र, जिसका आन्तरिक व्यास 20 सेमी है, में डाला जाता है। बेलनाकार पात्र में डाले पए पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। 2

हल : दिया है, शंकु का आन्तरिक व्यास = 10 सेमी

∴ शंकु की त्रिज्या $(r) = \frac{10}{2} = 5$ सेमी

तथा शंकु की ऊँचाई $(h) = 24$ सेमी

अब बेलनाकार पात्र का आन्तरिक व्यास = 20 सेमी

∴ बेलनाकार पात्र की त्रिज्या $(R) = \frac{20}{2} = 10$ सेमी

माना बेलनाकार पात्र में पानी H ऊँचाई तक आता है।

प्रश्नानुसार,

शंक्वाकार बर्तन का आयतन = बेलनाकार पात्र का आयतन

⇒ $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi R^2 H$

⇒ $\frac{1}{3} \times (5)^2 \times 24 = (10)^2 \times H$

⇒ $H = \frac{25 \times 24}{3 \times 100} = 2$

अत: बेलनाकार पात्र में डाले गए पानी की अभीष्ट ऊँचाई 2 सेमी हैं। **उत्तर**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। 2

हल : कल्पना कीजिए कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है।

तब, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ तथा p व q धन पूर्णांक हैं।

माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

अब $\because$ $\qquad \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$

$\therefore$ $\qquad p = \sqrt{2}\, q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\qquad p^2 = 2q^2$

$\therefore$ p^2, संख्या 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ p भी संख्या 2 से विभाज्य है।

अब $\because$ p, 2 से विभाज्य है, तब माना कि $\qquad p = 2r$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\qquad p^2 = 4r^2$

परन्तु हमें यह भी ज्ञात है कि $\qquad p^2 = 2q^2$

$\therefore$ $\qquad 2q^2 = 4r^2$ या $q^2 = 2r^2$

तब, q^2, 2 से विभाज्य होगा।

तब, q भी 2 से विभाज्य होगा।

$\because$ p भी 2 से विभाज्य है और q भी 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ 2, p और q का सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड है (जो 1 के अतिरिक्त है)।

यह एक विरोधाभास है क्योंकि हमारी मान्यता के अनुसार p और q में (1 के अतिरिक्त) कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

$\therefore$ यह संकेत करता है कि हमारी कल्पना "**$\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है**" **असंगत एवं त्रुटिपूर्ण है।**

अत: $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। **Proved.**

(ख) 2 और 100 के बीच सभी विषम पूर्णांकों, जो 3 से विभाज्य हैं, का योग ज्ञात कीजिए। 2

हल : 2 और 100 के बीच 3 से विभाजित होने वाली संख्याओं की सूची निम्न हैं—

$$3, 9, 15, 21, \ldots\ldots, 99$$

यहाँ, प्रथम पद $(a) = 3$, सार्वअन्तर $(d) = 9 - 3 = 6$

तथा $\qquad n$वाँ पद $(a_n) = 99$

$\because$ $\qquad a_n = 99$

$\therefore$ $\qquad a + (n-1)\,d = 99$

$\Rightarrow$ $\qquad 3 + (n-1)\,6 = 99$

$\Rightarrow$ $\qquad 6n - 6 = 96 \quad \Rightarrow \quad 6n = 102 \quad \Rightarrow \quad n = 17.$

$\therefore$ A.P. : 3, 9, 15, 21, ... का 17 पदों तक योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d] \text{ से,}$$

$\Rightarrow$
$$S_{17} = \frac{17}{2}[2 \times 3 + (17-1) \times 6]$$
$$= \frac{17}{2}(6 + 16 \times 6) = \frac{17}{2} \times (6 + 96)$$
$$= \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$

अत: 2 और 100 के बीच सभी विषम पूर्णांकों, जो 3 से विभाज्य हैं, का योग = 867. **उत्तर**

4. (ग) सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं A (6, 9), B (0, 1) और C (−6, − 7) संरेख हैं। 2

हल : दिए गए बिन्दु हैं : $A(6, 9), B(0, 1)$ और $C(-6, -7)$.

जहाँ, $x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = -6$

तथा $y_1 = 9, y_2 = 1, y_3 = -7$

अब त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}[6(1+7) + 0(-7-9) - 6(9-1)]$$

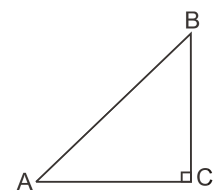
$$= \frac{1}{2}[6 \times 8 + 0 - 6 \times 8] = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

इसका अर्थ है कि यदि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल O वर्ग इकाई है, तो शीर्ष संरेखी होंगे।

अर्थात् बिन्दु $A(6, 9), B(0, 1)$ और $C(-6, -7)$ संरेखी हैं। **Proved.**

(घ) बिन्दु C पर समकोण, एक समकोण ΔABC में यदि $\tan A = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि : 2

$2 \sin A \cos A = 1.$



हल : दिया है, समकोण त्रिभुज ACB में,

$$\angle C = 90°$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = 1$$

$\Rightarrow$ $BC = AC$

माना $AC = BC = k$, जहाँ k एक घन संख्या है।

अब समकोण ΔACB में,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$$= k^2 + k^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow$ $AB = k\sqrt{2}$

अब, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $2 \sin A . \cos A = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$ **Proved.**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि रैखिक समीकरण युग्म $\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y = 7$ और $9x - 10y = 14$ संगत है। वज्र गुणन विधि से इसका हल ज्ञात कीजिए। 4

हल : दिया हुआ समीकरण युग्म : $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7 \Rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y - 7 = 0$ ...(1)

तथा $9x - 10y = 14 \Rightarrow 9x - 10y - 14 = 0$ ...(2)

उक्त समीकरण युग्म की तुलना व्यापक रैखिक युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से करने पर,

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad b_1 = \frac{5}{3}, \quad c_1 = -7$$

$$a_2 = 9, \quad b_2 = -10, \quad c_2 = -14$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3/2}{9} = \frac{1}{6}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{5/3}{-10} = \frac{-1}{6}$; $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2}$

$\because$ $$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।

अत: दिया गया रैखिक समीकरणों का युग्म संगत है। **Proved.**

अब वज्रगुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

$\therefore$ $$\frac{x}{\begin{matrix} 5/3 & -7 \\ -10 & -14 \end{matrix}} = \frac{-y}{\begin{matrix} 3/2 & -7 \\ 9 & -14 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 3/2 & 5/3 \\ 9 & -10 \end{matrix}}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{\frac{-70}{3} - 70} = \frac{-y}{-21+63} = \frac{1}{-15-15}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x}{\left(-\frac{280}{3}\right)} = \frac{-y}{42} = \frac{1}{-30}$$

प्रथम–तृतीय तथा अन्तिम दो भाग लेने पर,

$$\frac{x}{\left(-\frac{280}{3}\right)} = \frac{1}{-30} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{280}{3 \times 30} = \frac{28}{9}$$

और $$\frac{-y}{42} = \frac{1}{-30} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}$$

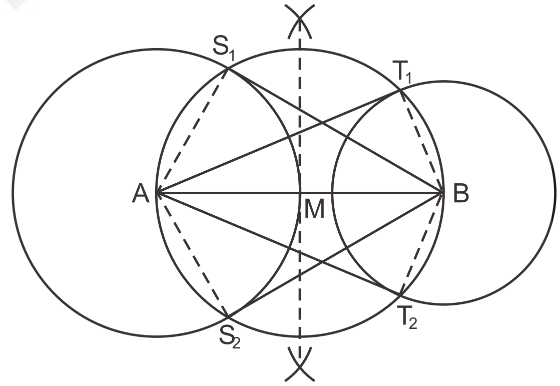
अत: समीकरणों के युग्म का हल : $x = \frac{28}{9}$ तथा $y = \frac{7}{5}$ **उत्तर**

(ख) 8 सेमी का एक रेखाखण्ड AB खींचिए। A को केन्द्र लेकर 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए और B को केन्द्र लेकर 3 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। रचना पद भी लिखिए। 4

हल : दिया है : रेखाखण्ड $AB = 8 \cdot 0$ सेमी। केन्द्र A से 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा गया है तथा केन्द्र B से 3 सेमी त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचा गया है।

रचना करनी है : केन्द्र बिन्दु A से केन्द्र B वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाओं तथा बिन्दु B से केन्द्र A वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाओं की।

रचना के पद :



(1) रेखाखण्ड $AB = 8$ सेमी खींचा।

(2) केन्द्र A से 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा और केन्द्र B से 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।

(3) AB का मध्य बिन्दु M ज्ञात किया।

(4) केन्द्र M लेकर AB व्यास का एक वृत्त खींचा जो A केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दुओं S_1 व S_2 पर तथा B केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दुओं T_1 व T_2 पर काटता है।

(5) रेखाखण्ड S_1B व S_2B तथा AT_1 व AT_2 खींचे।

S_1B व S_2B केन्द्र A वाले वृत्त की तथा AT_1 व AT_2 केन्द्र B वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

औचित्य (Justification) :

$\because$ केन्द्र M वाले वृत्त का AB व्यास है।

$\therefore$ $\angle AS_1B$, $\angle AS_2B$, $\angle AT_1B$ व $\angle AT_2B$ अर्द्धवृत्त के कोण हैं। अत: प्रत्येक समकोण है। रेखाखण्ड AS_1 व AS_2 केन्द्र A वाले वृत्त और BT_1 व BT_2 केन्द्र B वाले वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ **S_1B व S_2B केन्द्र A वाले वृत्त और AT_1 व AT_2 केन्द्र B वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।**

(ग) (i) सिद्ध कीजिए :

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = 2\sin^2\theta = 1.$$ 2

(ii) समीकरण $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ $(\theta < 90°)$ के हल कीजिए। 2

हल : (i) L.H.S. $= \sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$= 1 \times (\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$= \sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta)$

$= 2\sin^2\theta - 1 =$ **R.H.S.** **Proved.**

(ii) दिया हुआ समीकरण : $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\cos\theta\,(1+\sin\theta+1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = 4$

$\Rightarrow$ $\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = 4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = 4$

$\Rightarrow$ $2\cos\theta = 4\cos^2\theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = 2\cos^2\theta$ $\Rightarrow$ $\cos\theta\,(1 - 2\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$ या $1 - 2\cos\theta = 0$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$ या $1 = 2\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$ या $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \cos 90°$ या $\cos\theta = \cos 60°$

$\Rightarrow$ $\theta = 90°$ या $\theta = 60°$

परन्तु $\theta = 90°$ दिए हुए समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है।

अत: $\theta = 60°$ **उत्तर**

(घ) निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 25 है। p का मान ज्ञात कीजिए : 4

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	5	18	15	p	6

हल : **समान्तर माध्य ज्ञात करने हेतु सारणी**

वर्ग अन्तराल	मध्य-बिन्दु (x_i)	बारम्बारता (f_i)	विचलन ($di = x_i - A$)	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i u_i$
0-10	5	5	− 20	− 2	− 10
10-20	15	18	− 10	− 1	− 18
20-30	25	15	0	0	0
30-40	35	p	10	1	p
40-50	45	6	20	2	12
		$\Sigma f_i = 44 + p$			$\Sigma f_i u_i = p - 16$

यहाँ, माना कल्पित माध्य $(A) = 25$

तथा सभी विचलनों (d_i) का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $(h) = 10$

$\therefore$ $$\text{समान्तर माध्य } (\bar{x}) = A + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

$\Rightarrow$ $$25 = 25 + 10\left(\frac{p-16}{44+p}\right)$$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $p - 16 = 0$ $(\because p \neq -44)$

$\Rightarrow$ $p = 16$ **उत्तर**

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) एक नाव की शान्त जल में चाल 15 किमी/घण्टा है। नाव धारा की दिशा में 30 किमी जाने में तथा धारा के विपरीत दिशा में 30 किमी वापस लौटने में कुल 4 घण्टा 30 मिनट में पूर्ण करता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए। 4

हल : माना धारा की चाल x किमी/घण्टा है।

$\because$ शान्त जल में नाव की चाल = 15 किमी/घण्टा

$\therefore$ धारा की दिशा में नाव की चाल = $(15 + x)$ किमी/घण्टा

तथा धारा के विपरीत नाव की चाल = $(15 - x)$ किमी/घण्टा

$\Rightarrow$ धारा के विपरीत 30 किमी जाने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{30}{15 - x}$ घण्टा

तथा धारा की दिशा में 30 किमी जाने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{30}{15 + x}$ घण्टा

$\therefore$ कुल दूरी तय करने में लगा समय $= \left[\frac{30}{15+x} + \frac{30}{15-x}\right]$ घण्टा

प्रश्नानुसार : कुल दूरी तय करने में लगा समय = 4 घण्टा 30 मिनट

$= \left(4 + \frac{30}{60}\right)$ घण्टा

$\Rightarrow$ $$\frac{30}{15+x} + \frac{30}{15-x} = 4 + \frac{30}{60}$$

$\Rightarrow$ $$30\left[\frac{15 - x + 15 + x}{(15+x)(15-x)}\right] = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{30 \times 30}{225 - x^2} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad 225 - x^2 = \frac{30 \times 30 \times 2}{9}$$

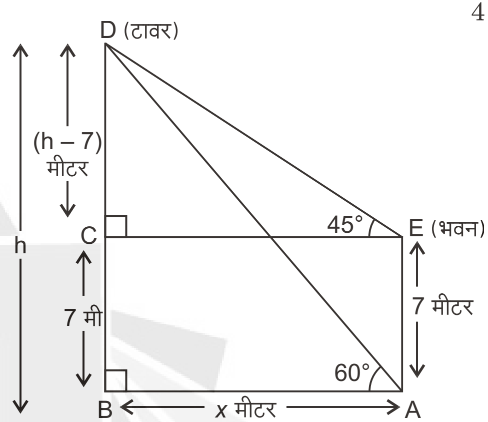
$$\Rightarrow \quad x^2 = 225 - 200 = 25$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 5 \qquad (\text{परन्तु } x \neq -5)$$

$$\therefore \quad x = 5$$

अत: धारा की चाल = 5 किमी/घण्टा **उत्तर**

(ख) 7 मीटर ऊँचे भवन के शिखर से एक टावर के शिखर का उन्नयन कोण 45° है जबकि उसके पाद से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। 4



हल : माना $BD = h$ मीटर टावर की ऊँचाई तथा क्षैतिज समतल पर टॉवर के पाद से $AB = x$ मीटर दूरी पर एक भवन स्थित है जिसकी ऊँचाई $AE = 7$ मीटर है। अब भवन के शिखर से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण $\angle CED = 45°$ है जबकि उसके पाद से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण $\angle BAD = 60°$ है।

समकोण $\Delta\, ABD$ में,

$$\tan 60° = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad ...(1)$$

अब समकोण $\Delta\, DCE$ में,

$$\tan 45° = \frac{CD}{CE} = \frac{CD}{AB} \quad [\because AB = CE = x \text{ मीटर}]$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{h-7}{x} \quad \Rightarrow \quad h - 7 = x$$

$$\Rightarrow \quad h - 7 = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad [\text{समीकरण (1) से}]$$

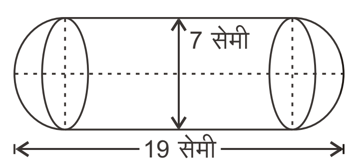
$$\Rightarrow \quad h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 7 \quad \Rightarrow \quad h\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) = 7$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{7(3+\sqrt{3})}{3-1} = \frac{7}{2}(3+\sqrt{3})$$

अत: टॉवर की ऊँचाई $\frac{7}{2}(3+\sqrt{3})$ मीटर हैं। **उत्तर**

(ग) एक ठोस एक बेलन के रूप में है जिसके दोनों सिरों पर अर्द्धगोले लगे हुए हैं। ठोस की कुल ऊँचाई 19 सेमी है और बेलन का व्यास 7 सेमी है। ठोस का आयतन और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4



हल : दिया है, ठोस की कुल ऊँचाई = 19 सेमी

$\because$ बेलन का व्यास = 7 सेमी

$\therefore$ बेलन की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी

तथा अर्द्धगोले की त्रिज्या (R) = बेलन की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी

$\therefore$ बेलन की ऊँचाई (h) = ठोस की कुल ऊँचाई − 2 × अर्द्धगोले की त्रिज्या

$$= 19 - 2 \times \frac{7}{2} = 19 - 7 = 12 \text{ सेमी}$$

अब, बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12 = \pi \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12$$

$$= 147\pi \text{ सेमी}^3$$

तथा अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{7}{2}\right)^3$

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{343}{12}\pi \text{ सेमी}^3$$

$\therefore$ ठोस का आयतन = बेलन का आयतन + 2 × अर्द्धगोले का आयतन

$$= 147\pi + \frac{343}{12}\pi$$

$$= 147 \times \frac{22}{7} + \frac{343}{12} \times \frac{22}{7}$$

$$= 21 \times 22 + \frac{49 \times 11}{6} = 462 + 89.83$$

$$= 551.83 \text{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

तथा ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठ = बेलन का वक्रपृष्ठ + 2 × अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ

$$= 2\pi r h + 2 \times 2\pi R^2$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times 12 + 2 \times 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= 264 + 154 = 418 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

(घ) निम्नलिखित बारंबारता बंटन से दैनिक आय को माध्यिका ज्ञात कीजिए : 4

दैनिक आय (₹ में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
श्रमिकों की संख्या	6	3	5	20	10

हल : **माध्यिका हेतु संचयी बारम्बारता सारणी**

दैनिक आय (₹ में)	श्रमिकों की संख्या (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
100-150	6	6
150-200	3	9
200-250	5	$14 = f$
250-300	$20 = f$	34
300-350	10	44
	$N = 44$	

माध्यिका वर्ग = वह वर्ग जिसमें $\frac{N}{2}$वाँ पद स्थित हों

= वह वर्ग जिसमें $\frac{44}{2}$वाँ पद = 22 वाँ पद स्थित हों

= (250 – 300)

तब, माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 250$

$\therefore$ माध्यिका वर्ग का वर्ग अन्तराल $(h) = 300 - 250 = 50$

माध्यिका वर्ग की बारम्बारता $(f) = 20$

माध्यिका वर्ग के ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता $(cf) = 14$

तब, $$\text{माध्यिका} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$= 250 + \frac{(22-14)}{20} \times 50$$

$$= 250 + \frac{8 \times 50}{20} = 250 + 20 = 270$$

अत: दैनिक आय की माध्यिका 270 हैं। **उत्तर**

7. सभी खण्ड कीजिए :

(क) द्विघात समीकरण $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$, $a + b \neq 0$ को गुणनखण्ड विधि द्वारा हल कीजिए। 6

हल : $$\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$ [Note]

$$\Rightarrow \quad \frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(a+b)}{(a+b)x + x^2} = \frac{(a+b)}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{x^2 + (a+b)x} = \frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (a+b)x = -ab$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + ax + bx + ab = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+a) + b(x+a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+a)(x+b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + a = 0 \text{ या } x + b = 0 \Rightarrow x = -a \text{ या } x = -b$$

अत: $x = -a$ और $-b$ समीकरण के मूल हैं। **उत्तर**

अथवा **यदि समीकरण $x^2 + kx + 64 = 0$ और $x^2 - 8x + k = 0$ वास्तविक मूल रखते हैं, तो k का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए।** 6

हल : दिए गए समीकरण निम्न है :

$$x^2 + kx + 64 = 0 \quad \text{...(1)}$$

तथा $$x^2 - 8x + k = 0 \quad \text{...(2)}$$

माना समीकरण (1) व (2) के विविक्तकर क्रमशः D_1 और D_2 हैं।

$\therefore \qquad D_1 = k^2 - 256$

तथा $\qquad D_2 = 64 - 4k$

समीकरण (1) और (2) के मूल वास्तविक होंगे, यदि

$D_1 \geq 0$ तथा $D_2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 256 \geq 0$ तथा $64 - 4k \geq 0$

$\Rightarrow \quad k^2 \geq 256$ तथा $64 \geq 4k$

$\Rightarrow \quad k \geq 16$ तथा $k \leq 16$ [$\because k$ धनात्मक है।]

$\Rightarrow \quad k = 16$

अतः दोनों समीकरणों के मूल वास्तविक होंगे,

यदि $k = 16$ हैं। **उत्तर**

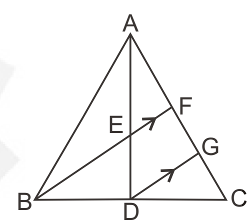
(ख) किसी त्रिभुज ABC में BC की माध्यिका AD है और AD का मध्य बिन्दु E है। यदि BE बढ़ाने पर AC से F बिन्दु पर मिलती है तो सिद्ध कीजिए कि $AF = \frac{1}{3} AC$ 6

हल : ज्ञात है : $AE = ED$ [$\because AD$ का मध्य बिन्दु E है।]

$BD = DC$ [$\because BC$ का मध्य बिन्दु D है।]

रचना :

सिद्ध करना है : $AF = \frac{1}{3} AC$



उपपत्ति : मध्य बिन्दु प्रमेय से,

$AF = FG$ [$\because EF \parallel DG$]

$FG = CG$ [$\because BF \parallel DG$]

$\Rightarrow \quad AF = FG = GC$ ...(1)

$\because \quad AC = AF + FG + GC$

$\Rightarrow \quad AC = 3AF$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow \quad AF = \frac{1}{3} AC$ **Proved.**

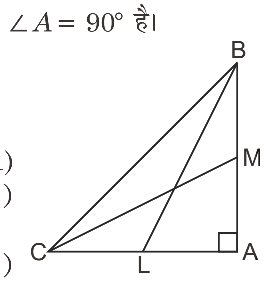
अथवा **समकोण त्रिभुज ABC में कोण A, समकोण है और BL तथा CM उसकी माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि**

$$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$$ 6

हल : दिया है : BL और CM एक समकोण त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ हैं, जिनमें $\angle A = 90°$ है।

सिद्ध करना है :

$4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$



उपपत्ति : समकोण ΔBAC में,

$BC^2 = AC^2 + AB^2$ ...(1)

(पाइथागोरस प्रमेय से)

समकोण ΔBAL में,

$BL^2 = AL^2 + AB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow \quad BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because AC$ का मध्य-बिन्दु L है)

$\Rightarrow \quad BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

$\Rightarrow \quad 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

समकोण ΔCAM में,

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow$ $$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad (\because AB \text{ का मध्य-बिन्दु } M \text{ है})$$

$\Rightarrow$ $$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$\Rightarrow$ $$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad ...(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) को जोड़ने पर,

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$\Rightarrow$ $$\mathbf{4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2} \quad \text{[समीकरण (1) से]}$$

Proved.

Sample Paper 5

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] [**पूर्णांक :** 70

निर्देश : पूर्ववत्।

1. सभी खण्ड कीजिए :

(क) बिन्दुओं (5, 0) और (– 12, 0) के बीच की दूरी है : 1

(a) 5 (b) 7 (c) 13 (d) 17.

हल : $\because$ बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

यहाँ, $x_1 = 5,\ y_1 = 0$ तथा $x_2 = -12,\ y_2 = 0$

$\therefore$ बिन्दुओं (5, 0) तथा (– 12, 0) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(-12-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-17)^2 + 0} = 17$$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

(ख) यदि एक समान्तर श्रेणी का सार्वअन्तर – 4 तथा 10वाँ पद – 8, तो श्रेणी का प्रथम पद होगा : 1

(a) – 40 (b) 20 (c) 28 (d) 36.

हल : माना एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद व सार्वअन्तर क्रमश: a तथा d है।

दिया है, $d = -4$

तथा 10वाँ पद $= a_{10} = -8$ $[\because a_n = a + (n-1)d]$

$\Rightarrow$ $a + (10-1)d = -8$

$\Rightarrow$ $a + 9 \times (-4) = -8$

$\Rightarrow$ $a - 36 = -8 \Rightarrow a = 36 - 8 = 28$

$\therefore$ श्रेणी का प्रथम पद 28 है।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ग) निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती : 1

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 15%.

हल : चूँकि, किसी घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है, इसलिए $\frac{3}{2}$ किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है।

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(घ) $\frac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$ बराबर है : 1

(a) cos 60° (b) tan 60° (c) sin 60° (d) sin 30°.

हल : $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\left[\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

$= \tan 60°$ $(\because \sqrt{3} = \tan 60°)$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(ङ) Δ *ABC* में, यदि $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 12$ सेमी तथा $BC = 6$ सेमी, तो $\angle B$ का मान है : 1

(a) 45° (b) 90° (c) 120° (d) 135°.

हल : ΔABC में, $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी, $AC = 12$ सेमी और $BC = 6$ सेमी

$\because$ $AB = 6\sqrt{3}$ सेमी, $\therefore$ $AB^2 = (6\sqrt{3})^2 = 36 \times 3 = 108$

और $BC = 6$ सेमी $\therefore$ $BC^2 = (6)^2 = 36$

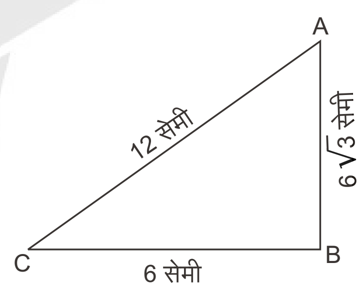
तथा $AC = 12$ सेमी $\therefore$ $AC^2 = (12)^2 = 144$

तब, $\because$ $AB^2 + BC^2 = 108 + 36 = 144$ और $AC^2 = 144$

$\therefore$ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore$ त्रिभुज *ABC* समकोणीय है जिसमें कर्ण *AC* है

$\therefore$ $\angle B$ समकोण है $\Rightarrow$ $\angle B = 90°$



अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(च) यदि द्विघात समीकरण $3x^2 - 6x + k = 0$ के मूल समान हैं, तो k का मान है : 1

(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12.

हल : द्विघात समीकरण $3x^2 - 6x + k = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, \quad b = -6 \quad \text{तथा} \quad c = k$$

$\because$ मूल समान है,

$\therefore$ विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow$ $(-6)^2 - 4(3)(k) = 0$

$\Rightarrow$ $36 - 12k = 0$

$\Rightarrow \qquad k = 3$

अत: विकल्प **(a)** सही हैं। **उत्तर**

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) संख्याओं 130 और 280 का म० स० यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म द्वारा ज्ञात कीजिए। 1

हल : दी गई संख्याएँ = 130 और 280

$\because \qquad 280 > 130$

$\therefore$ दी गई संख्याओं 280 और 130 के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेय के प्रयोग से,

$$280 = 130 \times 2 + 20 \qquad (\because \text{ शेषफल} \neq 0)$$

पुन: 130 और 20 संख्याओं के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेय के प्रयोग से,

$$130 = 20 \times 6 + 10 \qquad (\because \text{ शेषफल} \neq 0)$$

पुन: 20 और 10 संख्याओं के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेय के प्रयोग से,

$$20 = 10 \times 2 + 0 \qquad (\because \text{ शेषफल} = 0)$$

$\because$ शेषफल शून्य है और भाजक = 10

अत: महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 10 **उत्तर**

(ख) निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए : 1

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
10-20	14
20-30	13
30-40	12
40-50	20
50-60	11
60-70	15

हल : दिए गए आँकड़ों के लिए बहुलक वर्ग

= अधिकतम बारम्बारता वाला वर्ग = 40 − 50

$\therefore$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 40$

बहुलक वर्ग का विस्तार $(h) = 50 - 40 = 10$

बहुलक वर्ग की बारम्बारता $(f_1) = 20$

बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की बारम्बारता $(f_0) = 12$

बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता $(f_2) = 11$

तब, आँकड़ों के लिए बहुलक $= l + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$

$$= 40 + \frac{20 - 12}{2 \times 20 - 12 - 11} \times 10$$

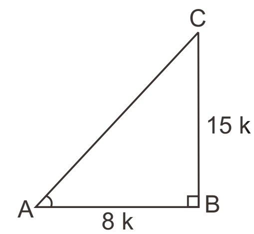
$$= 40 + \frac{8 \times 10}{40 - 23}$$

$$= 40 + \frac{80}{17} = 40 + 4.7$$

$$= 44.7$$

अत: अभीष्ट बहुलक का मान 44.7 हैं। **उत्तर**

(ग) यदि $8 \tan A = 15$, तो $\sin A$ का मान ज्ञात कीजिए। 1



हल : माना त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$

दिया है, $8 \tan A = 15 \quad \Rightarrow \quad \tan A = \frac{15}{8} = \frac{BC}{AB}$

माना $BC = 15k$ तथा $AB = 8\,k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

अब समकोण $\Delta\, ABC$ में,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$
$$= (8\,k)^2 + (15\,k)^2$$
$$= 64\,k^2 + 225\,k^2 = 289\,k^2$$

$\therefore \qquad AC = 17\,k$

पुन: ΔABC में,

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$ **उत्तर**

(घ) दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए। 1

हल : दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के गुण से,

$$\frac{\text{पहले त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{दूसरे त्रिभुज का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{\text{पहले त्रिभुज की भुजा}}{\text{दूसरे त्रिभुज की भुजा}}\right)^2$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

अत: अभीष्ट अनुपात $16 : 81$ हैं। **उत्तर**

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि $5\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। 2

हल : कल्पना कीजिए कि $5\sqrt{2}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है।

तब $5\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ होना चाहिए, जबकि $q \neq 0$ तथा p व q धन पूर्णांक है।

$\therefore \qquad 5\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow \qquad \sqrt{2} = \frac{p}{5q}$

चूँकि 5, p और q पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{p}{5q}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

यह इस तथ्य का विरोध करता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $5\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। **Proved.**

(ख) यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5) क्रम में लेने पर एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए। 2

हल : माना $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिनमें $A \equiv (1,\ 2)$, $B \equiv (4,\ y)$, $C \equiv (x,\ 6)$ तथा $D \equiv (3,\ 5)$

इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करेंगे।

$\therefore \quad AC$ का मध्य-बिन्दु = बिन्दुओं (1, 2) तथा (x, 6) का

$$\text{मध्य-बिन्दु} = \left[\frac{\text{दोनों बिन्दुओं के भुज का योग}}{2}, \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटि का योग}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{1+x}{2}, \quad \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}, \quad 4\right)$$

BD का मध्य-बिन्दु = बिन्दुओं $(4, y)$ तथा $(3, 5)$ का

$$\text{मध्य-बिन्दु} = \left[\frac{\text{दोनों बिन्दुओं के भुज का योग}}{2}, \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटि का योग}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{4+3}{2}, \quad \frac{y+5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \quad \frac{y+5}{2}\right)$$

$\because$ AC और BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं

$\therefore$ AC का मध्य-बिन्दु वही होगा जो BD का है।

अर्थात $\left(\frac{1+x}{2}, \; 4\right) = \left(\frac{7}{2}, \; \frac{y+5}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{1+x}{2} = \frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ $1 + x = 7$ $\Rightarrow$ $x = 6$

और $\frac{y+5}{2} = 4$ $\Rightarrow$ $y + 5 = 8$ $\Rightarrow$ $y = 3$

अत: $\boldsymbol{x = 6,}$ $\boldsymbol{y = 3}$ **उत्तर**

(ग) एक पेटी में 90 डिस्क हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है, तो डिस्क पर अंकित अंकों की प्रायिकता होगी; 2

(i) दो अंकों की एक संख्या

(ii) 5 से विभाज्य एक संख्या

हल : (i) डिस्क पर दो अंकों की संख्या अंकित की घटना के अनुकूल परिणाम = 81

और कुल सम्भव परिणाम = 90

अत: डिस्क पर दो अंकों की संख्या अंकित होने की प्रायिकता $= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}} = \frac{81}{90} = \boldsymbol{\frac{9}{10}}$ **उत्तर**

(ii) 5 से विभाज्य संख्याएँ = (5, 10, 15, 20, ..., 90) = 18

डिस्क पर 5 से विभाज्य संख्या अंकित होने की घटना के अनुकूल परिणाम = 18

और कुल सम्भव परिणाम = 90

अत: डिस्क पर 5 से विभाज्य संख्या अंकित होने की प्रायिकता $= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल सम्भव परिणाम}} = \frac{18}{90} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$ **उत्तर**

(घ) $\Delta\, ABC$ में सिद्ध कीजिए कि : 2

$$\mathbf{sec}\left(\frac{\boldsymbol{B+C}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{cosec}\,\frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{2}}$$

हल : दिया है, A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्त: कोण है।

$\therefore$ $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow$ $B + C = 180° - A$

$\Rightarrow$ $\frac{B+C}{2} = \frac{180° - A}{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{B+C}{2} = 90° - \dfrac{A}{2}$ ...(1)

$$\text{L.H.S.} = \sec\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sec\left(90° - \frac{A}{2}\right)$$ [समीकरण (1) से]

$$= \text{cosec}\,\frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं में से किसके दशमलव प्रसार सांत होंगे और किसके दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होंगे? 2

(i) $\dfrac{13}{3125}$, (ii) $\dfrac{15}{7}$, (iii) $\dfrac{29}{2^3 \times 5^2}$, (iv) $\dfrac{77}{210}$

हल : (i) $\dfrac{13}{3125} = \dfrac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \dfrac{13}{2^0 \times 5^5}$

5	3125
5	625
5	125
5	5
	1

$\because$ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 5 है जो $2^0 \times 5^5$ अर्थात् $2^n \times 5^m$ रूप का है, जहाँ n तथा m ऋणेत्तर पूर्णांक हैं।

अत: $\dfrac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है। **उत्तर**

(ii) $\dfrac{15}{7}$

$\because$ हर में केवल अभाज्य गुणनखण्ड 7 है जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\dfrac{15}{7}$ का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है। **उत्तर**

(iii) $\dfrac{29}{2^3 \times 5^2}$

$\because$ हर में 2 व 5 अभाज्य गुणनखण्ड हैं जो $2^3 \times 5^2$ अर्थात् $2^n \times 2^m$ रूप में है, जहाँ n तथा m ऋणेतर पूर्णांक हैं।

अत: $\dfrac{29}{2^3 \times 5^2}$ का दशमलव प्रसार सांत है। **उत्तर**

(iv) $\dfrac{77}{210} = \dfrac{7\times11}{7\times2\times3\times5} = \dfrac{11}{2\times3\times5}$

$\because$ हर में 2 व 5 के अतिरिक्त एक अन्य अभाज्य गुणनखण्ड 3 भी है जो कि $2^n \times 5^m$ रूप का नहीं है।

अत: $\dfrac{77}{210}$ का दशमलव प्रसार असांत एवं आवर्ती है। **उत्तर**

(ख) k का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु (8, 1), (k, − 4) और (2, − 5) संरेखी हैं। 2

हल : माना बिन्दु $A \equiv (8, 1)$, $B \equiv (k, -4)$ तथा $C \equiv (2, -5)$

यहाँ $x_1 = 8, \quad y_1 = 1$

$x_2 = k, \quad y_2 = -4$

$x_3 = 2, \quad y_3 = -5$

तब, $\Delta\, ABC$ का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$$= \frac{1}{2}[8\{-4-(-5)\} + k(-5-1) + 2\{1-(-4)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[8(-4+5)+k(-6)+2(1+4)]$$
$$= \frac{1}{2}[8\times 1-6k+2\times 5] = \frac{1}{2}(8-6k+10)$$
$$= \frac{1}{2}(18-6k) = \frac{2}{2}(9-3k) = 9-3k$$

परन्तु यदि उक्त बिन्दु A, B, C संरेख हैं तो ΔABC का क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए।

$\therefore \quad -3k+9=0 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad k=3$

अत: ***k* का मान = 3** **उत्तर**

(ग) ज्ञात कीजिए कि रैखिक समीकरणों का युग्म $2x-3y=8$, $4x-6y=9$ संगत है या असंगत। 2

हल : दिया हुआ समीकरण युग्म : $2x-3y=8 \Rightarrow 2x-3y-8=0$ ...(1)

तथा $4x-6y=9 \Rightarrow 4x-6y-9=0$ ...(2)

उक्त समीकरण युग्म की तुलना व्यापक रैखिक समीकरण युग्म $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ से करने पर,

$a_1=2, \quad b_1=-3, \quad c_1=-8$

$a_2=4, \quad b_2=-6, \quad c_2=-9$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}; \quad \frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}; \quad \frac{c_1}{c_2}=\frac{-8}{-9}=\frac{8}{9}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

अत: **दिया गया रैखिक समीकरणों का युग्म असंगत है।** **उत्तर**

(घ) नीचे दिए गए बंटन का माध्यक (Median) ज्ञात कीजिए : 2

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
0-10	5
10-20	8
20-30	20
30-40	15
40-50	7
50-60	5

हल : **संचयी बारम्बारता सारणी**

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0-10	5	5
10-20	8	$13 = cf$
20-30	$20 = f$	33
30-40	15	48
40-50	7	55
50-60	5	60
	$N = 60$	

माध्यक वर्ग = वह वर्ग जिसमें $\frac{N}{2}$वाँ पद स्थित हो

= वह वर्ग जिसमें $\frac{60}{2}$वाँ पद अर्थात 30वाँ पद स्थित हो

= (20 – 30)

$\therefore$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 20$

$\therefore$ माध्यक वर्ग का वर्ग-अन्तराल $(h) = 30 - 20 = 10$

माध्यक वर्ग की बारम्बारता $(f) = 20$

माध्यक वर्ग के ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता $(cf) = 13$

तब,
$$\text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h$$
$$= 20 + \frac{(30-13)}{20} \times 10$$
$$= 20 + \frac{17 \times 10}{20} = 20 + 8.5$$
$$= 28.5$$

अत: अभीष्ट माध्यक मान 28.5 है। **उत्तर**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) निम्नांकित रैखिक समीकरणों के युग्म को हल कीजिए : 4

$$\frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

हल : दिया गया समीकरण युग्म :

$$\frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \quad \text{...(1)}$$

तथा
$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2 \quad \text{...(2)}$$

माना $\frac{1}{x+y} = A$ तथा $\frac{1}{x-y} = B$

तब समीकरण (1) बन जाएगा $5A + B = 2$ ...(3)

और समीकरण (2) बन जाएगा $15A - 5B = -2$ ...(4)

समीकरण (3) में 5 की गुणा करके समीकरण (4) में जोड़ने पर,

$$(25A + 5B) + (15A - 5B) = 10 - 2$$

$$\Rightarrow \quad 40A = 8 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}$$

A का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$5 \times \frac{1}{5} + B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

परन्तु $A = \frac{1}{x+y}$ और $B = \frac{1}{x-y}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{x+y}$ और $1 = \frac{1}{x-y}$

अत: पुन: हमें निम्न रैखिक युग्म प्राप्त होते हैं।

$$x + y = 5 \quad \text{...(5)}$$

तथा $x - y = 1$ ...(6)

समीकरण (5) व (6) को जोड़ने पर,

$$(x + y) + (x - y) = 5 + 1$$

$\Rightarrow$ $2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

x का मान समीकरण (5) में रखने पर,

$$3 + y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

अत: समीकरण युग्म का हल : $x = 3$ तथा $y = 2$ **उत्तर**

(ख) 0 और 100 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए। 1

हल : 0 और 100 के बीच की विषम संख्याओं की सूची :

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 99$$

यहाँ प्रथम पद $(a) = 1$, सार्वअन्तर $(d) = 3 - 1 = 2$

तथा nवाँ पद $(a_n) = 99$

$\because$ $a_n = 99$

$\therefore$ $a + (n-1)d = 99 \Rightarrow 1 + (n-1)(2) = 99$

$\Rightarrow$ $2n - 2 = 98 \Rightarrow 2n = 100 \Rightarrow n = 50$

$\therefore$ A.P. : 1, 3, 5, 7, ... का 50 पदों तक का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}[2 \times 1 + (50 - 1)(2)]$$

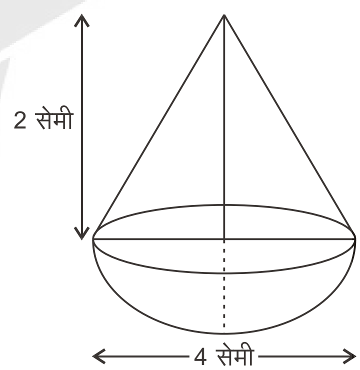
$$= 25(2 + 49 \times 2) = 25(2 + 98)$$

$$= 25(100) = 2500$$

अत: शून्य और 100 के बीच की विषम संख्याओं का योगफल 2500 हैं। **उत्तर**

(ग) एक ठोस खिलौना एक अर्द्ध गोले के आकार का है जिस पर एक लम्बवृत्तीय शंकु अध्यारोपित है। एक शंकु की ऊँचाई 2 सेमी है और आधार का व्यास 4 सेमी है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। 4

हल : चित्र की भाँति अर्द्धगोले पर समान परिच्छेद क्षेत्रफल के आधार वाला शंकु अध्यारोपित कर एक ठोस खिलौना बनाया गया है।



दिया है, शंकु की ऊँचाई $(h) = 2$ सेमी,

तथा शंकु के आधार का व्यास $= 4$ सेमी

$\therefore$ शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{4}{2} = 2$ सेमी

$\because$ शंकु का आधार अर्द्धगोले पर अध्यारोपित है

$\therefore$ अर्द्धगोले की त्रिज्या $(r) =$ शंकु के आधार की त्रिज्या $= 2$ सेमी

अब, ठोस खिलौने का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{\pi}{3} r^2 (h + 2r)$$

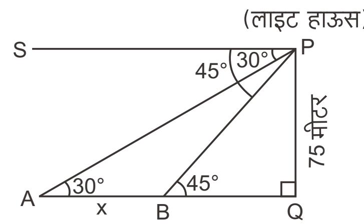
$$= \frac{22}{7 \times 3} \times 2 \times 2 \times (2 + 2 \times 2)$$

$$= \frac{88}{21} \times (2 + 4) = \frac{88}{21} \times 6 = \frac{528}{21} = 25.14 \text{ सेमी}^3$$

अत: खिलौने का आयतन = 25.14 सेमी^{3} **उत्तर**

(घ) समुद्र-तल से 75 मीटर ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 4

हल : माना 75 मीटर ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ PQ के शिखर P से, A और B जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं।



$\therefore$ $\angle SPA = 30° = \angle PAQ$

तथा $\angle SPB = 45° = \angle PBQ$ (एकान्तर कोण)

माना जहाजों के बीच की दूरी $AB = x$ मीटर

समकोण $\Delta\ PQB$ में,

$$\tan 45° = \frac{PQ}{BQ} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{75}{BQ} \quad \Rightarrow \quad BQ = 75$$

पुनः समकोण $\Delta\ PQA$ में,

$$\tan 30° = \frac{PQ}{AQ} = \frac{PQ}{AB + BQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{x + 75} \quad [\because AQ = AB + BQ]$$

$$\Rightarrow \quad x + 75 = 75\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 75\sqrt{3} - 75 = 75(\sqrt{3} - 1)$$

अतः **जहाजों के बीच की दूरी = 75 ($\sqrt{3}$ − 1) मीटर।** **उत्तर**

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों का दैनिक जेब-भत्ता दर्शाता है। माध्य जेब-भत्ता ₹ 18 है। बारम्बारता f का मान ज्ञात कीजिए : 4

दैनिक जेब-भत्ता	बच्चों की संख्या
11-13	7
13-15	6
15-17	9
17-19	13
19-21	f
21-23	5
23-25	4

हल : पहले दिए गए बण्टन से औसत जेब खर्च निकाला जाएगा, तब गणना किए गए जेब खर्च और प्रश्न में दिए गए जेब खर्च में समानता स्थापित कर f का मान ज्ञात किया जा सकता है।

प्रत्यक्ष विधि द्वारा माध्य (दैनिक) जेब खर्च के लिए गणना सारणी

दैनिक जेब खर्च (रुपयों में) वर्ग	बच्चों की संख्या बारम्बारता f_i	मध्य-बिन्दु x_i	$f_i \times x_i$
11 – 13	7	12	$7 \times 12 = 84$
13 – 15	6	14	$6 \times 14 = 84$
15 – 17	9	16	$9 \times 16 = 144$
17 – 19	13	18	$13 \times 18 = 234$
19 – 21	f	20	$f \times 20 = 20f$
21 – 23	5	22	$5 \times 22 = 110$
23 – 25	4	24	$4 \times 24 = 96$
	$\sum f_i = 44 + f$		$\sum f_i x_i = 752 + 20f$

तब, औसत जेब खर्च $(\bar{x}) = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{752 + 20f}{44 + f}$

परन्तु प्रश्नानुसार माध्य जेब खर्च ₹ 18 है।

$\therefore \quad \dfrac{752 + 20f}{44 + f} = 18 \quad \Rightarrow \quad 18(44 + f) = 752 + 20f$

$\Rightarrow \quad 792 + 18f = 752 + 20f$

$\Rightarrow \quad 2f = (792 - 752)$

$\Rightarrow \quad 2f = 40$

$\Rightarrow \quad f = 20$

अत: **लुप्त बारम्बारता $f = 20$** उत्तर

(ख) (i) विमाओं 5.5 सेमी × 10 सेमी × 3.5 सेमी वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 सेमी व्यास और 2 मिमी मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

हल : माना चाँदी के n सिक्के पिघलाने पड़ेंगे।

प्रत्येक सिक्के की त्रिज्या $r = \dfrac{1.75}{2}$ सेमी $= \dfrac{175}{200}$ सेमी $= \dfrac{7}{8}$ सेमी

और प्रत्येक सिक्के की ऊँचाई $h = 2$ मिमी $= \dfrac{2}{10}$ सेमी $= \dfrac{1}{5}$ सेमी

$\therefore$ प्रत्येक सिक्के (बेलन) का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \dfrac{22}{7} \times \dfrac{7}{8} \times \dfrac{7}{8} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{77}{160}$ घन सेमी

$\therefore$ n सिक्कों का आयतन $= \dfrac{77}{160} n$ घन सेमी

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 5.5 \times 10 \times 3.5$ घन सेमी $= 192.5$ घन सेमी

$\because$ चाँदी का घनाभ चाँदी से सिक्कों को पिघलाकर बनाया गया है।

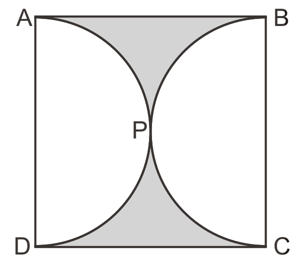
$\therefore$ n सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$\therefore \quad \frac{77}{160} n = 192.5$

$\therefore \quad n = \frac{192.5 \times 160}{77} = 400$

अत: **चाँदी के सिक्कों की संख्या = 400** **उत्तर**

(ii) **आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $ABCD$ भुजा 14 सेमी का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्द्धवृत्त हैं।** $2 + 2 = 4$



हल : दिया है, वर्ग $ABCD$ की भुजा = 14 सेमी

$\therefore$ वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल = भुजा^{2} = 14×14 वर्ग सेमी

= 196 वर्ग सेमी

$\because$ अर्द्धवृत्तों का व्यास = वर्ग $ABCD$ की भुजा

$\therefore$ $2 \times$ त्रिज्या = 14 $\Rightarrow$ त्रिज्या (r) = 7 सेमी

$\therefore$ दोनों अर्द्धवृत्तों का कुल क्षेत्रफल = $2 \times \frac{1}{2} \pi r^2$

$= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154$ वर्ग सेमी

चित्र से स्पष्ट है कि छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल − दोनों अर्द्धवृत्तों का क्षेत्रफल

= 196 वर्ग सेमी − 154 वर्ग सेमी = 42 वर्ग सेमी

अत: **छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 42 वर्ग सेमी।** **उत्तर**

(ग) सिद्ध कीजिए कि :

$$\mathbf{(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta + \cot\theta}}$$

हल : L.H.S. $= (\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)$

$$= \left(\operatorname{cosec}\theta - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\right)\left(\sec\theta - \frac{1}{\sec\theta}\right) \quad \left[\because \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta},\ \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta} \times \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}$$

$$= \frac{\cot^2\theta}{\operatorname{cosec}\theta} \times \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} \quad [\because \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta \text{ तथा } \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$$

$$= \frac{(\cot A . \tan A)^2}{\frac{1}{\sin A} \times \frac{1}{\cos A}} = \frac{\left(\frac{1}{\tan A} \times \tan A\right)^2}{\frac{1}{\sin A \cos A}} \quad \left[\because \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$$

$$= \frac{(1)^2}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} \quad [\because 1 = \sin^2 A + \cos^2 A]$$

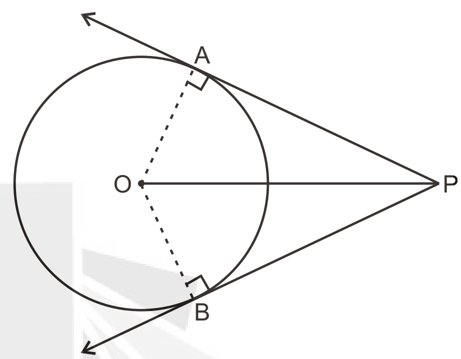
$$= \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}} \qquad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ तथा } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{1}{\tan A + \cot A} = \textbf{L.H.S.}$$

अत: $\mathbf{(cosec\, A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}}$ **Proved.**

(घ) सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिन्दु से एक वृत्त पर खींची गई स्पर्श-रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं। 4



हल : दिया है : एक वृत्त का केन्द्र O है तथा केन्द्र से OP दूरी पर एक बिन्दु P है। बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं।

सिद्ध करना है : $PA = PB$

रचना : रेखाखण्ड OA तथा OB खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ OA तथा OB दिए गए वृत्त की त्रिज्याएँ तथा PA तथा PB स्पर्श रेखाएँ हैं,

$\therefore$ $OA \perp PA$ तथा $OB \perp PB$

$\because$ $\Delta\, OAP$ तथा $\Delta\, OBP$ समकोणीय हैं,

$\therefore$ समकोण $\Delta\, OAP$ तथा $\Delta\, OBP$ में,

$OA = OB$ ($\because$ एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$OP = OP$ (दोनों त्रिभुजों की उभयनिष्ठ भुजा हैं)

$\therefore$ R.H.S. नियम से,

$$\Delta\, OAP \cong \Delta OBP$$

$\therefore$ $\mathbf{PA = PB}$ (C.P.C.T.) **Proved.**

वैकल्पिक विधि :

समकोण $\Delta\, OAP$ में,

$OP^2 = OA^2 + AP^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow$ $AP^2 = OP^2 - OA^2$

$\Rightarrow$ $AP^2 = OP^2 - OB^2$ [$\because OA = OB$ (त्रिज्याएँ)]

$\Rightarrow$ $AP^2 = (OB^2 + BP^2) - OB^2$

[$\because$ समकोण $\Delta\, OBP$ में, पाइथागोरस प्रमेय से, $OP^2 = OB^2 + BP^2$]

$\Rightarrow$ $AP^2 = OB^2 + BP^2 - OB^2$

$\Rightarrow$ $AP^2 = BP^2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{AP = BP}$ **Proved.**

7. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के सभी अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं। 6

हल : $\because$ बहुपद $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ व $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं और माना शेष दो शून्यक α व β हैं।

तब, $(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left[x-\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right] = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta)\left[x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right]\left[x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right] = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta)\left(x^2-\frac{5}{3}\right) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = \dfrac{3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5}{x^2 - \frac{5}{3}}$

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 3x^2 + 6x + 3$

$= 3[x^2 + 2x + 1] = 3(x+1)^2$

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 3(x+1)(x+1) = 3[x-(-1)][x-(-1)]$

$\therefore \quad \alpha = -1$ तथा $\beta = -1$

अत: **शेष शून्यक = − 1, − 1** **उत्तर**

अथवा **दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 117 मी^{2} है। यदि उनके परिमापों का अन्तर 12 मीटर हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।** 6

हल : माना एक वर्ग की भुजा x मीटर है।

तब, उस वर्ग की परिमाप = $4x$ मीटर

$\because$ दूसरे वर्ग की परिमाप में 12 मीटर का अन्तर है।

$\therefore$ दूसरे वर्ग की परिमाप = $(4x + 12)$ मीटर

तब, दूसरे वर्ग की भुजा = $\left(\dfrac{4x+12}{4}\right)$ मीटर = $(x+3)$ मीटर

पहले वर्ग का क्षेत्रफल = x^2 मीटर^2

तथा दूसरे वर्ग का क्षेत्रफल = $(x+3)^2$ मीटर^2

= $(x^2 + 9 + 6x)$ मीटर^2

प्रश्नानुसार, दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग = 117 मीटर^2

$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 9 + 6x = 117$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 6x - 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 3x - 54 = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 9x - 6x - 54 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x+9) - 6(x+9) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-6) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x + 9 = 0 \quad \text{या} \quad x - 6 = 0$$

यदि $x + 9 = 0$ हो तो $x = -9$ या $x - 6 = 0$ हो तो $x = 6$

$\because$ वर्ग की भुजा x ऋणात्मक नहीं हो सकती;

अत: x का मान -9 स्वीकार्य नहीं है।

तब, $x = 6$

$\therefore$ छोटे वर्ग की भुजा $= 6$ मीटर

तब बड़े वर्ग की भुजा $= x + 3 = 6 + 3 = 9$ मीटर

अत: वर्गों की भुजाएँ क्रमश: 6 मीटर व 9 मीटर हैं। **उत्तर**

(ख) एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 6$ सेमी, $AB = 5$ सेमी और $\angle ABC = 60°$ हों। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

हल : दिया है : एक त्रिभुज ABC जिसकी भुजा $AB = 5$ सेमी, $BC = 6$ सेमी और $\angle ABC = 60°$ है।

रचना करनी है : एक अन्य त्रिभुज की जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

रचना के पद :

(1) रेखाखण्ड $BC = 6$ सेमी खींचा।

(2) BC के बिन्दु B पर BC से $60°$ का कोण बनाती हुई रेखा BY खींची।

(3) BY में से $AB = 5$ सेमी काटी और रेखाखण्ड AC को खींचकर त्रिभुज ABC प्राप्त किया।

(4) BC के दूसरी ओर बिन्दु B से BC पर न्यूनकोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

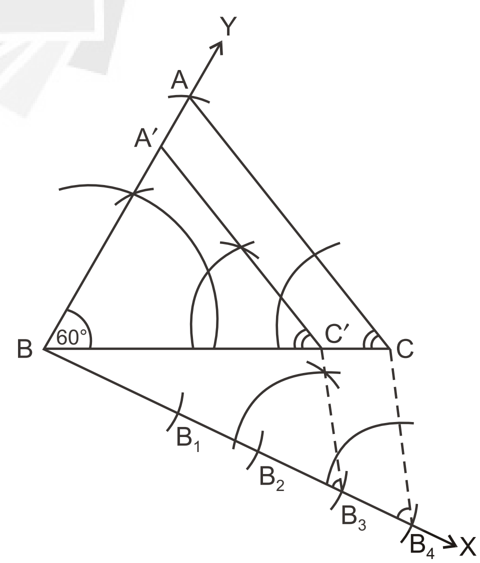
(5) किरण BX पर $(4 > 3)$ बिन्दुओं B_1, B_2, B_3 तथा B_4 को इस प्रकार से अंकित करते हैं कि

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 \text{ हों।}$$

(6) B_4C खींची और B_3 से B_4C के समान्तर एक रेखा खींची जो BC से C' पर मिलती है।

(7) C' से AC के समान्तर रेखा $C'A'$ खींची जो AB से A' पर मिलती है।

$\Delta A'BC'$ अभीष्ट त्रिभुज है।



$\because \quad B_3C' \parallel B_4C$ (रचना से)

$$\therefore \quad \frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$$

अब,
$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'}$$
$$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$$

तथा $A'C' \parallel AC$

$\therefore$ $\Delta BC'A' \sim \Delta BCA$

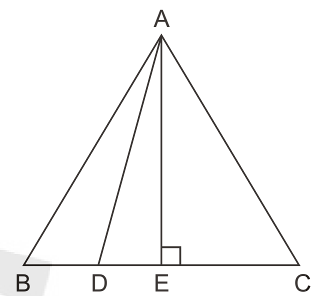
$\therefore$ $\dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{BA'}{BA} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{3}{4}$

अत: **नए त्रिभुज की भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हैं।**

Proved.

अथवा **किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$।** 6

हल : दिया है : ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसके आधार BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3}BC$



सिद्ध करना है : $9\,AD^2 = 7\,AB^2$

रचना : A से BC पर AE लम्ब खींचिए।

उपपत्ति : $\because$ समबाहु ΔABC में,

$$AE \perp BC$$

$\therefore$ $$BE = CE = \frac{1}{2}BC$$

($\because$ समबाहु त्रिभुज में शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब उस भुजा को समद्विभाजित करता है।)

$\therefore$ $$BE = \frac{1}{2}AB \quad (\because BC = AB) \quad \ldots(1)$$

समकोण त्रिभुज AEB में,

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$\Rightarrow$ $$AB^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + AE^2 \quad [\text{ समीकरण}(1) \text{ से}]$$

$\Rightarrow$ $$AB^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AE^2$$

$\Rightarrow$ $$AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = AE^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{3}{4}AB^2 = AE^2 \quad \ldots(2)$$

समकोण त्रिभुज AED में,

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$\Rightarrow$ $$AE^2 = AD^2 - DE^2 \quad \ldots(3)$$

$\because$ बिन्दु D पर BC समत्रिभाजित होता है।

$$BD = \frac{1}{3}BC \quad (\text{दिया है})$$

$\therefore$ $$BD = \frac{1}{3}AB \quad (\because BC = AB) \ldots(4)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$$BE - BD = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB$$

$$\Rightarrow \quad DE = \frac{1}{6}AB \qquad \text{...(5)}$$

समीकरण (2) व समीकरण (3) से,

$$\frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - DE^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{6}AB\right)^2$$ [समीकरण (5) से]

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{36}AB^2 = AD^2$$

दोनों पक्षों में लघुत्तम समापवर्त्य 36 से गुणा करने पर,

$$36 \times \left(\frac{3}{4}AB^2\right) + 36 \times \left(\frac{1}{36}AB^2\right) = 36\,AD^2$$

$$\Rightarrow \quad 27\,AB^2 + AB^2 = 36\,AD^2$$

$$\Rightarrow \quad 28\,AB^2 = 36\,AD^2$$

$$\Rightarrow \quad 7\,AB^2 = 9\,AD^2$$ (4 सार्वनिष्ठ है)

अत: $\mathbf{9\,AD^2 = 7\,AB^2}$ **Proved.**

●