10 शंकु परिच्छेद (Conic Sections)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली 10.1

- **निम्नलिखित प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. केन्द्र (0, 2) और त्रिज्या 2 इकाई।

हल : माना वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु (x, y) स्थित है।

तब, **बिन्दु (x, y) और केन्द्र (0, 2) के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या**

$\therefore \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = 2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4y + 4 = (2)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$

अत: वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 2. केन्द्र (– 2, 3) और त्रिज्या 4 इकाई।

हल : माना वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु (x, y) स्थित है।

तब, **बिन्दु (x, y) और केन्द्र (–2, 3) के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या**

$\therefore \quad \sqrt{[(x-(-2)]^2 + (y-3)^2} = 4$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 4$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = (4)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 16$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

अत: वृत्त का समीकरण :

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 3. केन्द्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ इकाई।

हल : माना वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु (x, y) स्थित है।

तब, **बिन्दु (x, y) और केन्द्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या**

$\therefore \quad \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4y-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \quad \frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{(4y-1)^2}{16} = \frac{1}{144}$

$\Rightarrow \quad \frac{4x^2 - 4x + 1}{4} + \frac{16y^2 - 8y + 1}{16} = \frac{1}{144}$

दोनों पक्षों को हरों के L.C.M. 144 से गुणा करने पर,

$144\left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{4}\right) + 144\left(\frac{16y^2 - 8y + 1}{16}\right) = 144\left(\frac{1}{144}\right)$

$\Rightarrow \quad 36(4x^2 - 4x + 1) + 9(16y^2 - 8y + 1) = 1$

$\Rightarrow \quad 144x^2 - 144x + 36 + 144y^2 - 72y + 9 = 1$

$\Rightarrow \quad 144^{\ 2} + 144y^2 - 144x - 72y + 44 = 0$

$\Rightarrow \quad 36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$

(दोनों पक्षों को 4 से भाग देने पर)

अत: वृत्त का समीकरण :

$36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 4. केन्द्र (1, 1) और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई।

हल : माना वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु (x, y) स्थित है।

तब, **बिन्दु (x, y) और केन्द्र (1, 1) के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या**

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

अत: वृत्त का समीकरण : $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 5. केन्द्र (– a, – b) और त्रिज्या $\sqrt{a^2 - b^2}$ है।

हल : माना वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु (x, y) स्थित है।

तब, **बिन्दु (x, y) और केन्द्र (– a, – b) के बीच दूरी = वृत्त की त्रिज्या**

$\therefore \quad \sqrt{\{x-(-a)^2\} + \{(y-(-b)\}^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\Rightarrow \quad (x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$

अत: वृत्त का समीकरण :

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ **उत्तर**

- **निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक में प्रत्येक वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 6. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

हल : माना वृत्त का केन्द्र (h, k) और त्रिज्या r है।

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ...(1)

दिया गया समीकरण $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = (6)^2$ ...(2)

तब समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$h = -5, \quad k = 3, \quad r = 6$

अत: **वृत्त का केन्द्र (h, k) = (– 5, 3) तथा त्रिज्या r = 6** **उत्तर**

प्रश्न 7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

हल : दिए गए समीकरण की तुलना वृत्त के मानक समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से करने पर,

$2g = -4, 2f = -8$ तथा $c = -45$

$\Rightarrow \quad g = -2, \quad f = -4$

$\therefore$ केन्द्र $(-g, -f) \equiv (2, 4)$ **उत्तर**

तथा त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 45}$

$= \sqrt{4 + 16 + 45}$

$= \sqrt{65}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

हल : दिए गए समीकरण की तुलना वृत्त के मानक समीकरण से करने पर,

$2g = -8, 2f = 10, c = -12$

$\Rightarrow \quad g = -4, \quad f = 5$

$\therefore$ केन्द्र $(-g, -f) \equiv (4, -5)$ **उत्तर**

तथा त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{16 + 25 - (-12)} = \sqrt{53}$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

हल : वृत्त का समीकरण $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x = 0$

$\therefore$ वृत्त के मानक समीकरण से तुलना करने पर,

$2g = -\frac{1}{2}$

$2f = 0$ तथा $c = 0$

$\Rightarrow \quad g = -\frac{1}{4}, f = 0$

$\therefore$ केन्द्र $(-g, -f) \equiv \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ **उत्तर**

तथा त्रिज्या $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{1}{16} + 0 - 0} = \frac{1}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 10. बिन्दुओं (4, 1) और (6, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा 4 x + y = 16 पर स्थित है।

हल : माना वृत्त का केन्द्र (h, k) और त्रिज्या r है

तब वृत्त का समीकरण :

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ...(1)

$\because$ वृत्त बिन्दु (4, 1) से जाता है।

$\therefore \quad (4 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$ ...(2)

और वृत्त बिन्दु (6, 5) से भी जाता है।

$\therefore \quad (6 - h)^2 + (5 - k)^2 = r^2$ ...(3)

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र (h, k) रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।

$\therefore \quad 4h + k = 16$ ...(4)

समीकरण (3) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$(6 - h)^2 - (4 - h)^2 + (5 - k)^2 - (1 - k)^2 = 0$

$\Rightarrow (6 - h + 4 - h)(6 - h - 4 + h) + (5 - k + 1 - k)(5 - k - 1 + k) = 0$

$\Rightarrow \quad 2(10 - 2h) + 4(6 - 2k) = 0$

$\Rightarrow \quad 20 - 4h + 24 - 8k = 0$

$\Rightarrow \quad 4h - 8k = -44$

$\Rightarrow \quad 4h + 8k = 44$ ...(5)

समीकरण (5) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$7k = 28 \quad \Rightarrow \quad k = 4$

अब समीकरण (4) में $k = 4$ रखने पर,

$4h + 4 = 16 \quad \Rightarrow \quad 4h = 12$

$\Rightarrow \quad h = 3$

समीकरण (2) में h तथा k का मान रखने पर,

$(4 - 3)^2 + (1 - 4)^2 = r^2$

$(1)^2 + (-3)^2 = r^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = 1 + 9 = 10$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{10}$

समीकरण (1) में h, k व r के मान रखने पर,

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{10})^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 10$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 10$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

अत: अभीष्ट वृत्त का समीकरण :

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 11. बिन्दुओं (2, 3) और (– 1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र रेखा x – 3 y – 11 = 0 पर स्थित है।

हल : माना वृत्त का केन्द्र (h, k) और त्रिज्या r है।

$\therefore$ वृत्त का समीकरण : $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ...(1)

$\because$ वृत्त बिन्दु (2, 3) से जाता है।

$\therefore$ $(2-h)^2+(3-k)^2=r^2$ ...(2)

और वृत्त बिन्दु (– 1,1) से भी जाता है।

$\therefore$ $(-1-h)^2+(1-k)^2=r^2$ ...(3)

समीकरण (2) में से समीकरण (3) को घटाने पर,

$$(2-h)^2-(-1-h)^2+(3-k)^2-(1-k)^2=0$$

$\therefore$ $(2-h-1-h)(2-h+1+h)+(3-k+1-k)(3-k-1+k)=0$

$[a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ से$]$

$\therefore$ $3(1-2h)+2(4-2k)=0$

$\therefore$ $3-6h+8-4k=0$

$\therefore$ $6h+4k=11$ ...(4)

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र (h, k) रेखा $x-3y-11=0$ पर स्थित है।

$\therefore$ $h-3k=11$ ...(5)

समीकरण (5) को 6 से गुणा करके समीकरण (4) में से घटाने पर,

$$6h+4k-6(h-3k)=11-66$$

$\Rightarrow$ $6h+4k-6h+18k=-55$

$\Rightarrow$ $22k=-55 \Rightarrow k=-\frac{5}{2}$

समीकरण (5) में $k=-\frac{5}{2}$ रखने पर,

$$h-3\times-\frac{5}{2}=11$$

$$h+\frac{15}{2}=11$$

$$h=11-\frac{15}{2}=\frac{7}{2}$$

तब h और k का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3+\frac{5}{2}\right)^2=r^2$$

$\therefore$ $\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2=r^2$

$\therefore$ $\frac{9}{4}+\frac{121}{4}=r^2$

$\Rightarrow$ $r^2=\frac{130}{4}$

अब समीकरण (1) में h, k व r^2 के मान रखने पर,

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{130}{4}$$

$\therefore$ $x^2-7x+\frac{49}{4}+y^2+5y+\frac{25}{4}=\frac{130}{4}$

$\therefore$ $x^2+y^2-7x+5y+\frac{74}{4}-\frac{130}{4}=0$

$\therefore$ $x^2+y^2-7x+5y-14=0$

अत: अभीष्ट वृत्त का समीकरण :

$x^2+y^2-7x+5y-14=0$ **उत्तर**

प्रश्न 12. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र X-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

हल : चूँकि वृत्त का केन्द्र X-अक्ष पर स्थित है,

इसलिए माना केन्द्र के निर्देशांक = $(h, 0)$

$\because$ वृत्त बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है,

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या = केन्द्र $(h, 0)$ तथा बिन्दु (2, 3) के बीच की दूरी

$\Rightarrow$ $5=\sqrt{(h-2)^2+(0-3)^2}$

$\Rightarrow$ $(h-2)^2+9=25$

$\Rightarrow$ $(h-2)^2=25-9=16$

$\Rightarrow$ $h-2=\pm 4$

$\Rightarrow$ $h=6$

अथवा $h=-2$

$\therefore$ वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक (6, 0) अथवा (– 2, 0) हैं।

अत: **दो वृत्त** सम्भव हैं जिनके समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$(x-6)^2+(y-0)^2=5^2$$

तथा $(x+2)^2+(y-0)^2=5^2$

या $x^2+y^2-12x+11=0$

तथा $x^2+y^2+4x-21=0$ **उत्तर**

प्रश्न 13. (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो निर्देशाक्षों पर a और b अन्त:खण्ड काटता है।

हल : माना केन्द्र C वाला वृत्त मूलबिन्दु से होकर जाता है तथा X-अक्ष पर OA एवं Y-अक्ष पर OB अत: खण्ड काटता है।

तब, $OA=a$ तथा $OB=b$

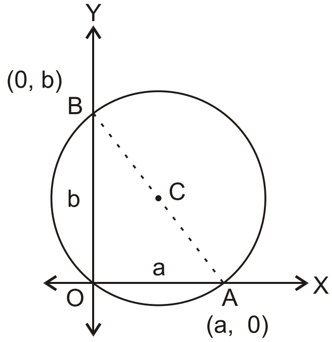
$\therefore$ बिन्दु A के निर्देशांक = $(a, 0)$

तथा बिन्दु B के निर्देशांक = $(0, b)$

AB को मिलाया।

स्पष्ट है कि $\angle AOB=90°$

इसलिए AB, वृत्त का व्यास होगा।



अत: सूत्र

$(\mathbf{x}-\mathbf{x_1})(\mathbf{x}-\mathbf{x_2})+(\mathbf{y}-\mathbf{y_1})(\mathbf{y}-\mathbf{y_2})=\mathbf{0}$ से,

वृत्त का समीकरण :

$$(x-a)(x-0)+(y-0)(y-b)=0$$

परन्तु वृत्त अक्षों पर किन्हीं भी दिशाओं में अन्त: खण्ड काट सकता है।

इसलिए **चार वृत्त** सम्भव हैं जिनके समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$(x\pm a)(x-0)+(y\pm b)(y-0)=0$$

$\Rightarrow\quad x^2\pm ax+y^2\pm by=0$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2\pm ax\pm by=0$ **उत्तर**

प्रश्न 14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र (2, 2) हो तथा जो बिन्दु (4, 5) से जाता है।

हल : $\because$ वृत्त का केन्द्र = (2, 2)

और वृत्त की परिधि का एक बिन्दु = (4, 5)

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $r=\sqrt{(4-2)^2+(5-2)^2}$

$$=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$$

तब, वृत्त का समीकरण :

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{13})^2$$

$\Rightarrow\quad x^2-4x+4+y^2-4y+4=13$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2-4x-4y-5=0$

अत: अभीष्ट वृत्त का समीकरण :

$$x^2+y^2-4x-4y=5$$ **उत्तर**

प्रश्न 15. क्या बिन्दु (− 2.5, 3.5) वृत्त $\mathbf{x^2+y^2=25}$ के अन्दर, बाहर या वृत्त पर स्थित है?

हल : माना $S(x,y)\equiv x^2+y^2-25=0$

$\therefore$ $x=-2.5$ तथा $y=3.5$ रखने पर,

$S(-2.5,3.5)=(-2.5)^2+(3.5)^2-25$

$=6.25+12.25-25$

$=18.50-25=-6.5<0$

$\because$ $S(-2.5,3.5)<0$

अत: दिया गया बिन्दु वृत्त के अन्दर होगा। **उत्तर**

प्रश्नावली | 10.2

- **निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. $\mathbf{y^2=12x}$

हल : दिए गए परवलय का समीकरण : $y^2=12x$ ...(1)

उक्त परवलय की तुलना परवलय के समीकरण : $y^2=4ax$ से करने पर,

$$4a=12\quad\Rightarrow\quad a=3$$

$\therefore$ परवलय की नाभि $(a,0)=(3,0)$

परवलय का अक्ष : $y=0$

परवलय की नियता का समीकरण :

$$x+a=0\quad\text{या}\quad x+3=0\quad\text{या}\quad x=-3$$

परवलय की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई

$$(4a)=4\times3=12$$

अत: नाभि = (3, 0), परवलय का अक्ष

X-अक्ष या $y=0$, नियता $x=-3$ और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 12 **उत्तर**

प्रश्न 2. $\mathbf{x^2=6y}$

हल : दिए गए परवलय का समीकरण : $x^2=6y$

दिए गए परवलय $x^2=6y$ की तुलना $x^2=4ay$ से करने पर,

$$4a=6\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ परवलय की नाभि $(0,a)=\left(0,\frac{3}{2}\right)$

$\because$ परवलय का अक्ष, Y-अक्ष अर्थात $x=0$

$\therefore$ परवलय की नियता का समीकरण : $y+a=0$

$\Rightarrow\quad y+\frac{3}{2}=0\quad\Rightarrow\quad 2y+3=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{-3}{2}$

और परवलय की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $=4\times a$

$$=4\times\frac{3}{2}=6$$

अत: नाभि $=\left(0,\frac{3}{2}\right)$, परवलय का अक्ष

Y-अक्ष, अर्थात $x=0$ नियता $y=\frac{-3}{2}$ और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 6 **उत्तर**

प्रश्न 3. $\mathbf{y^2=-8x}$

हल : दिए गए परवलय का समीकरण : $y^2=-8x$

दिए गए परवलय की तुलना $y^2=-4ax$ से करने पर,

$$4a=8\quad\Rightarrow\quad a=2$$

$\therefore$ परवलय की नाभि $(-a, 0) = (-2, 0)$

परवलय की नियता का समीकरण :

$$x - a = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 4a = 4 \times 2 = 8$

अत: नाभि $= (-2, 0)$, परवलय का अक्ष

X-अक्ष अर्थात $y = 0$ नियता का समीकरण $x = 2$ और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 8$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $x^2 = -16y$

हल : दिए गए परवलय का समीकरण : $x^2 = -16y$

दिए गए परवलय $x^2 = -16y$ की तुलना समीकरण $x^2 = -4ay$ से करने पर,

$$4a = 16 \Rightarrow a = 4$$

$\therefore$ परवलय की नाभि $(0, -a) = (0, -4)$

परवलय की नियता का समीकरण : $y - a = 0$

$\Rightarrow$ $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 4a = 4 \times 4 = 16$

अत: परवलय की नाभि $= (0, -4)$,

अक्ष Y-अक्ष अर्थात $x = 0$

नियता $y = 4$ तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 16$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $y^2 = 10x$

हल : दिए गए परवलय का समीकरण : $y^2 = 10x$

दिए गए परवलय की तुलना परवलय के मानक समीकरण $y^2 = 4ax$ से करने पर,

$$4a = 10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ परवलय की नाभि $(a, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

और नियता का समीकरण : $x + a = 0$

या $x + \frac{5}{2} = 0$ या $2x + 5 = 0$ या $x = \frac{-5}{2}$

नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 4a = 4 \times \frac{5}{2} = 10$

अत: परवलय का अक्ष X-अक्ष अर्थात् $y = 0$

नाभि $= \left(\frac{5}{2}, 0\right)$, नियता $x = \frac{-5}{2}$

और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 10$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $x^2 = -9y$

हल : परवलय का समीकरण : $x^2 = -9y$

यह समीकरण $x^2 = -4ay$ के रूप का है।

तुलना करने पर, $4a = 9$

$\Rightarrow$ $a = \frac{9}{4}$

अत: नाभि के निर्देशांक $= (0, -a) = \left[0, -\frac{9}{4}\right]$ **उत्तर**

अक्ष का समीकरण : Y-अक्ष अर्थात् $x = 0$

नियता का समीकरण : $y - a = 0$

$\Rightarrow$ $y - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow 4y - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

तथा नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a = 9$ **उत्तर**

- **निम्नलिखित प्रश्न 7 से 12 तक प्रत्येक में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो दिए प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है :**

प्रश्न 7. नाभि (6, 0); नियता $x = -6$

हल : दिया है, परवलय की नाभि $S \equiv (6, 0)$

तथा नियता $x = -6$ या $x + 6 = 0$

माना परवलय पर एक चल बिन्दु (x, y) है।

तब, बिन्दु (x, y) से नाभि $(6, 0)$ की दूरी

= बिन्दु (x, y) से नियता $(x = -6)$ की दूरी

$\therefore$ $\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \frac{x+6}{\sqrt{1}}$

$\therefore$ $(x-6)^2 + y^2 = (x+6)^2$

$\therefore$ $y^2 = (x+6)^2 - (x-6)^2$

$= (x^2 + 12x + 36) - (x^2 - 12x + 36)$

$= 24x$

अत: परवलय का समीकरण : $y^2 = 24x$ **उत्तर**

प्रश्न 8. नाभि (0, − 3); नियता $y = 3$

हल : माना परवलय पर एक चल बिन्दु (x, y) है।

तब, बिन्दु (x, y) से नाभि $(0, -3)$ की दूरी

= बिन्दु (x, y) से नियता $y - 3 = 0$ की दूरी

$\therefore$ $\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \frac{y-3}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow$ $x^2 + (y+3)^2 = (y-3)^2$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9$

$\Rightarrow$ $x^2 = -6y - 6y$

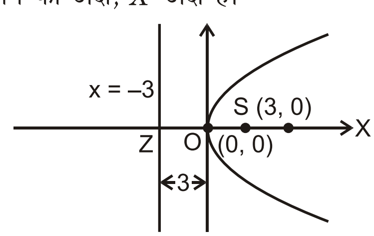
$\Rightarrow$ $x^2 = -12y$

अत: परवलय का समीकरण : $x^2 = -12y$ **उत्तर**

प्रश्न 9. शीर्ष (0, 0); नाभि (3, 0)

हल : $\because$ नाभि तथा शीर्ष दोनों के y-निर्देशांक $= 0$

$\therefore$ परवलय का अक्ष, X-अक्ष है।



$\because$ शीर्ष $O(0,0)$ और नाभि $S(3, 0)$ के बीच की दूरी

$= OS = 3$

$\therefore$ शीर्ष से नियता की दूरी $OZ = 3$

$\therefore$ नियता का समीकरण : $x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0$

माना परवलय पर एक चल बिन्दु (x, y) है।

$\therefore$ बिन्दु (x, y) से नाभि $(3, 0)$ की दूरी

$= (x, y)$ की नियता $(x + 3 = 0)$ से दूरी

$\therefore \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \dfrac{x+3}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9$

$\Rightarrow \quad y^2 = 6x + 6x$

$\Rightarrow \quad y^2 = 12x$

अत: परवलय का समीकरण : $y^2 = 12x$ **उत्तर**

प्रश्न 10. शीर्ष (0, 0); नाभि (– 2, 0)

हल : $\because$ शीर्ष $(0, 0)$ और नाभि $(-2, 0)$ के बीच की दूरी $= \sqrt{(0+2)^2 + 0^2} = 2$

$\therefore$ शीर्ष से नियता की दूरी $= 2$

$\therefore$ नियता का समीकरण :

$x + a = 0 \equiv x - 2 = 0$ या $x = 2$

$\therefore$ माना परवलय पर कोई चल बिन्दु (x, y) है।

तब, बिन्दु (x, y) से नाभि $(-2, 0)$ की दूरी

= बिन्दु (x, y) से नियता $x - 2 = 0$ की दूरी

$\therefore \quad \sqrt{[x-(-2)^2] + (y-0)^2} = \dfrac{x-2}{\sqrt{1}}$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + y^2 = (x-2)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow \quad y^2 = -4x - 4x$

$\Rightarrow \quad y^2 = -8x$

अत: परवलय का समीकरण : $y^2 = -8x$ **उत्तर**

प्रश्न 11. शीर्ष (0, 0); (2, 3) से जाता है और अक्ष, *X*-अक्ष के अनुदिश है।

हल : $\because$ परवलय का शीर्ष $(0,0)$ तथा अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है। अत:

परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ होगा।

$\because$ परवलय $y^2 = 4ax$ से बिन्दु $(2, 3)$ जाता है। अत:

$\therefore \quad (3)^2 = 4a \times 2 \Rightarrow 8a = 9$ या $a = \dfrac{9}{8}$

$\therefore$ परवलय का समीकरण होगा : $y^2 = 4 \times \dfrac{9}{8} x$

$\Rightarrow \quad y^2 = \dfrac{9}{2} x \quad \Rightarrow \quad 2y^2 = 9x$

अत: परवलय का समीकरण : $2y^2 = 9x$ **उत्तर**

प्रश्न 12. शीर्ष (0, 0) ; (5, 2) से जाता है और Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

हल : $\because$ शीर्ष $(0,0)$ तथा परवलय Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

$\therefore$ परवलय का समीकरण $x^2 = 4ay$ होगा।

$\because$ परवलय $x^2 = 4ay$ बिन्दु $(5, 2)$ से जाता है।

$\therefore \quad (5)^2 = 4a \times 2 \Rightarrow 8a = 25$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{25}{8}$

$\therefore$ परवलय का समीकरण होगा :

$x^2 = 4.\left(\dfrac{25}{8}\right) y$

$\Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{25}{2} y \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 25y$

अत: परवलय का समीकरण : $2x^2 = 25y$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 10.3

- **निम्नलिखित प्रश्न 1 से 9 तक प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. $\mathbf{\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

या
$$\frac{x^2}{(6)^2} + \frac{y^2}{(4)^2} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$a = 6$ तथा $b = 4$

$\because \quad a^2 > b^2$, अत: दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्ष** $(\pm a, 0)$ अर्थात $(\pm 6, 0)$

$\therefore$ उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{4^2}{6^2}}$

$= \sqrt{1 - \dfrac{16}{36}} = \sqrt{\dfrac{20}{36}} = \dfrac{\sqrt{20}}{6}$

$\Rightarrow$ **उत्केन्द्रता** $e = \dfrac{\sqrt{20}}{6}$

नाभियों के निर्देशांक : $(\pm ae, 0)$

$\equiv \left(\pm 6 \times \dfrac{1}{3}\sqrt{5}, 0\right) \equiv (\pm 2\sqrt{5}, 0)$

$\equiv (\pm \sqrt{20}, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 6 = 12$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 4 = 8$

नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)^2}{6} = \dfrac{16}{3}$

उत्तर

प्रश्न 2. $\mathbf{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1 \qquad ...(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2=4 \quad \text{तथा} \quad b^2=25$$

$\Rightarrow \quad a=2 \quad$ तथा $\quad b=5$

$\because \ a^2<b^2$, अत: दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $=(0,\pm b)\equiv(0,\pm 5)$

दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

$$=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{21}{25}} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$\because \quad be=5\times\frac{\sqrt{21}}{5}=\sqrt{21}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक**

$$=(0,\pm be)=(0,\pm\sqrt{21})$$

दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष $=2b=2\times5=10$

दीर्घवृत्त का लघु अक्ष $=2a=2\times2=4$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$=\frac{2a^2}{b}=\frac{2(2)^2}{5}=\frac{8}{5} \quad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 3. $\mathbf{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad ...(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2=16, \qquad b^2=9$$

$\Rightarrow \quad a=4 \quad$ तथा $\quad b=3$

$\because \ a^2>b^2$, अत: दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घ वृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $=(\pm a,0)=(\pm 4,0)$

उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt7}{4}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e=\frac{\sqrt7}{4}$

तथा $\quad ae=4\times\frac{\sqrt7}{4}=\sqrt7$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक**

$$=(\pm ae,0)=(\pm\sqrt7,0)$$

$$2a=2\times4=8 \quad \text{और} \quad 2b=2\times3=6$$

दीर्घवृत्त का दीर्घ-अक्ष $=8$ तथा **लघु अक्ष** $=6$

दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई

$$=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times9}{4}=\frac{9}{2} \quad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 4. $\mathbf{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1 \qquad ...(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2=25, \qquad b^2=100$$

$\therefore \quad a=5 \quad$ तथा $\quad b=10$

$\because \ a^2<b^2$, अत: दीर्घवृत्त की दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगी।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $=(0,\pm b)=(0,\pm 10)$

उत्केन्द्रता $e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

$$=\sqrt{1-\frac{25}{100}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt3}{2}$$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e=\frac{\sqrt3}{2}$

$\because \quad be=(10)\times\frac{\sqrt3}{2}=5\sqrt3$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक** $=(0,\pm be)$

$$=(0,\pm 5\sqrt3)$$

$$=(0,\pm\sqrt{75})$$

$\because \ 2a=2\times5=10 \quad$ तथा $\quad 2b=2\times10=20$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $=20$ तथा **लघु अक्ष** $=10$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$=\frac{2a^2}{b}$$

$$=\frac{2\times25}{10}=5 \quad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 5. $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{49}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{36}} = \mathbf{1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 49 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 36$$

$\Rightarrow \quad a = 7 \quad$ तथा $\quad b = 6$

$\because \quad a^2 > b^2$, अतः दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $= (\pm a, 0) = (\pm 7, 0)$

उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{13}{49}} = \frac{\sqrt{13}}{7}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$

$\because \quad ae = 7 \times \frac{\sqrt{13}}{7} = \sqrt{13}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक**

$$= (\pm ae, 0) = (\pm \sqrt{13}, 0)$$

$\because \quad 2a = 2 \times 7 = 14 \quad$ तथा $\quad 2b = 2 \times 6 = 12$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $= 14$ तथा **लघु अक्ष** $= 12$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 36}{7} = \frac{72}{7}$$

उत्तर

प्रश्न 6. $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{100}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{400}} = \mathbf{1}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 100 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 400$$

$\Rightarrow \quad a = 10 \quad$ तथा $\quad b = 20$

$\because \quad a^2 < b^2$, अतः दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm b) = (0, \pm 20)$

उत्केन्द्रता $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{100}{400}}$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \quad be = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक**

$$= (0, \pm be) = (0, \pm 10\sqrt{3})$$

$\because \quad 2a = 2 \times 10 = 20 \quad$ तथा $\quad 2b = 2 \times 20 = 40$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $= 40$ तथा **लघु अक्ष** $= 20$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 100}{20} = 10$$

उत्तर

प्रश्न 7. $\mathbf{36\,x^2 + 4\,y^2 = 144}$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$36x^2 + 4y^2 = 144$$

$$\Rightarrow \quad \frac{36x^2}{144} + \frac{4y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 4 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 36$$

$\Rightarrow \quad a = 2 \quad$ तथा $\quad b = 6$

$\because \quad a^2 < b^2$, अतः दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm b) = (0, \pm 6)$

$\because$ **उत्केन्द्रता** $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{36}}$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\because \quad be = 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक**

$$= (0, \pm be) = (0, \pm 4\sqrt{2})$$

$\because \quad 2a = 2 \times 2 = 4 \quad$ तथा $\quad 2b = 2 \times 6 = 12$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $= 12$ तथा **लघु अक्ष** $= 4$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$$

उत्तर

प्रश्न 8. $16x^2 + y^2 = 16$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$16x^2 + y^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 1 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad a = 1 \quad \text{तथा} \quad b = 4$$

$\because$ $a^2 < b^2$, अतः दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm b) = (0, \pm 4)$

$\because$ **उत्केन्द्रता** $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\because$ $be = 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \pm\sqrt{15}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक** $= (0, + be)$
$= (0, \pm\sqrt{15})$

$\because$ $2a = 2 \times 1 = 2$ तथा $2b = 2 \times 4 = 8$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $= 8$ तथा **लघु अक्ष** $= 2$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

हल : दिए गए दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \ldots(1)$$

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 9 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad a = 3 \quad \text{तथा} \quad b = 2$$

$\because$ $a^2 > b^2$, अतः दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ **दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक** $= (\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$

$\because$ **उत्केन्द्रता** $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\because$ $ae = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक** $= (\pm ae, 0)$
$= (\pm\sqrt{5}, 0)$

$\because$ $2a = 2 \times 3 = 6$ तथा $2b = 2 \times 2 = 4$

$\therefore$ **दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष** $= 6$ तथा **लघु अक्ष** $= 4$

और **दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{उत्तर}$$

- **निम्नलिखित प्रश्न 10 से 20 तक प्रत्येक में, दिए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 10. शीर्ष $(\pm 5, 0)$; नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

हल : शीर्षों के निर्देशांक $= (\pm 5, 0)$

और नाभियों के निर्देशांक $= (\pm 4, 0)$

$\because$ शीर्षों या नाभियों में प्रत्येक के y-निर्देशांक $= 0$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

तब शीर्ष $(\pm a, 0) \equiv (\pm 5, 0)$

तथा नाभि $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 4, 0)$

$\therefore$ $a = 5$ और $ae = 4$

$\therefore$ दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e = \frac{ae}{a} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \quad e^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \quad b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2 - (ae)^2$$
$$= 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

अतः अभीष्ट दीर्घ वृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

उत्तर

प्रश्न 11. शीर्ष $(0, \pm 13)$; नाभियाँ $(0, \pm 5)$

हल : शीर्षों के निर्देशांक $= (0, \pm 13)$

और नाभियों के निर्देशांक $= (0, \pm 5)$

$\because$ शीर्षों या नाभियों में प्रत्येक के x निर्देशांक $= 0$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

तब शीर्ष $(0, \pm b) \equiv (0, \pm 13)$

और नाभि $(0, \pm be) \equiv (0, \pm 5)$

$\therefore \quad b = 13$ तथा $be = 5$

$\therefore$ दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $e = \dfrac{be}{b} = \dfrac{5}{13}$

$\Rightarrow \quad e^2 = \dfrac{25}{169}$

$\therefore \quad a^2 = b^2(1 - e^2) = b^2 - (be)^2$
$= (13)^2 - (5)^2 = 169 - 25$
$= 144$

तब, दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$

उत्तर

प्रश्न 12. शीर्ष $(\pm 6, 0)$; नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

हल : शीर्षों के निर्देशांक $= (\pm 6, 0)$ और नाभियों के निर्देशांक $= (\pm 4, 0)$

$\because$ शीर्षों या नाभियों में प्रत्येक के y-निर्देशांक $= 0$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

तब शीर्ष $(\pm a, 0) \equiv (\pm 6, 0)$

तथा नाभि $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 4, 0)$

$\therefore \quad a = 6$ तथा $ae = 4$

$\therefore \quad b^2 = a^2 - (ae)^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16$

$\Rightarrow \quad b^2 = 20$

तब दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{(6)^2} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$

उत्तर

प्रश्न 13. दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिन्दु $(\pm 3, 0)$, तथा लघु अक्ष के अन्त्य बिन्दु $(0, \pm 2)$

हल : $\because$ दीर्घाक्ष के दोनों सिरे X-अक्ष पर लघु अक्ष के दोनों सिरे Y-अक्ष पर हैं, अत: दीर्घवृत्त का समीकरण निम्नलिखित होगा :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\because$ लघु अक्ष और दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिन्दु दीर्घवृत्त पर स्थित होते हैं।

$\therefore$ बिन्दु $(\pm 3, 0)$ और $(0, \pm 2)$ दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ पर होंगे।

$\therefore \quad \dfrac{(\pm 3)^2}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9$

तथा $\quad \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{(\pm 2)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

उत्तर

प्रश्न 14. दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिन्दु $(0, \pm\sqrt{5})$; लघु अक्ष के अन्त्य बिन्दु $(\pm 1, 0)$

हल : माना दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ लघु अक्ष और दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिन्दु दीर्घवृत्त पर स्थित होते हैं।

$\therefore$ बिन्दु $(0, \pm\sqrt{5})$ और बिन्दु $(\pm 1, 0)$ दीर्घवृत्त पर होंगे।

$\therefore \quad \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{(\pm\sqrt{5})^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 5$

और $\quad \dfrac{(\pm 1)^2}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1$

a^2 तथा b^2 का मान दीर्घवृत्त के समीकरण में रखने पर,

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

उत्तर

प्रश्न 15. दीर्घ अक्ष की लम्बाई 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$

हल : $\because$ नाभियों $(\pm 5, 0)$ का y-निर्देशांक $= 0$

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

तब दीर्घ अक्ष की लम्बाई $2a = 26 \Rightarrow a = 13$

या $\quad a^2 = 13^2 = 169$

$\because$ नाभि $(\pm ae, 0) = (\pm 5, 0) \Rightarrow ae = 5$

$\therefore \quad b^2 = a^2 - (ae)^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25$

$\Rightarrow \quad b^2 = 144$

तब दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में, $a^2 = 169$ और $b^2 = 144$ रखने पर,

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

उत्तर

प्रश्न 16. लघु अक्ष की लम्बाई 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$

हल : हम देखते हैं कि दीर्घवृत्त की नाभियाँ $(0, \pm 6)$, Y-अक्ष पर स्थित हैं।

$\therefore$ माना दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

जहाँ $a < b$

उक्त दीर्घवृत्त के लघु अक्ष की लम्बाई $2a$ तथा नाभियाँ $(0, \pm be)$ हैं।

इसलिए $2b = 16$ तथा $be = 6$

$\Rightarrow$ $a = 8$ तथा $be = 6$

अब, $a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow$ $(8)^2 = b^2 - (be)^2$

$\Rightarrow$ $64 = b^2 - (6)^2$

$\Rightarrow$ $64 = b^2 - 36 \Rightarrow b^2 = 64 + 36 = 100$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण :

$$\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$ **उत्तर**

प्रश्न 17. नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

हल : $\because$ नाभि $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 3, 0)$

$\therefore$ $ae = 3$ और दिया है कि $a = 4$

$\therefore$ $b^2 = a^2 - (ae)^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

तब दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

अतः अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 18. $b = 3$, $c = 4$, केन्द्र मूलबिन्दु पर, नाभियाँ X-अक्ष पर (जहाँ $c^2 = a^2 - b^2$)

हल : $\because$ दीर्घवृत्त का केन्द्र मूलबिन्दु और नाभियाँ X-अक्ष पर हैं।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

तब माना दीर्घवृत्त का मानक समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

$\because$ $c = 4$

और $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4^2 = a^2 - 3^2$

$\Rightarrow$ $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ और $b^2 = 9$

तब दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

अतः अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 19. केन्द्र (0, 0) पर दीर्घ अक्ष Y-अक्ष पर और बिन्दुओं (3, 2) और (1, 6) से जाता है।

हल : $\because$ केन्द्र (0, 0) तथा दीर्घ अक्ष Y-अक्ष पर है,

$\therefore$ दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ दीर्घवृत्त बिन्दु (3, 2) से जाता है।

अतः $$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \ldots(1)$$

और दीर्घवृत्त बिन्दु (1, 6) से भी जाता है।

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

तब, समीकरण (1) व समीकरण (2) से,

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{36}{b^2}$$

$$\therefore \frac{9}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{36}{b^2} - \frac{4}{b^2} \Rightarrow \frac{8}{a^2} = \frac{32}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} \Rightarrow b^2 = 4a^2$$

समीकरण (2) में $b^2 = 4a^2$ रखने पर,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{36}{4a^2} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 10$$

$$\Rightarrow b^2 = 4 \times 10 = 40$$

तब दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में a^2 व b^2 के मान रखने पर, $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$

अतः अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 20. दीर्घ अक्ष, X-अक्ष पर और बिन्दुओं (4, 3) और (6, 2) से जाता है।

हल : माना दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

$\because$ दीर्घवृत्त बिन्दु (4, 3) से जाता है।

$$\therefore \frac{(4)^2}{a^2} + \frac{(3)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \ldots(1)$$

$\because$ दीर्घवृत्त बिन्दु (6, 2) से जाता है।

$$\therefore \frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

अब समीकरण (1) व समीकरण (2) से,

$$\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2}$$

$\therefore \quad \dfrac{9}{b^2} - \dfrac{4}{b^2} = \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{16}{a^2}$

$\therefore \quad \dfrac{5}{b^2} = \dfrac{20}{a^2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{4}{a^2}$

$\therefore \quad a^2 = 4b^2 \qquad \ldots(3)$

समीकरण (1) और समीकरण (3) से,

$$\frac{16}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

$\therefore \quad \dfrac{4}{b^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1$

$\therefore \quad \dfrac{13}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 13$

समीकरण (3) में $b^2 = 13$ रखने पर,

$$a^2 = 4 \times 13 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 52$$

तब दीर्घवृत्त के मानक समीकरण में a^2 व b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1 \quad \text{या} \quad x^2 + 4y^2 = 52$$

अत: अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण :

$x^2 + 4y^2 = 52$ या $\dfrac{x^2}{52} + \dfrac{y^2}{13} = 1$ **उत्तर**

? प्रश्नावली | 10.4

- **निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में, अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

हल : $\because$ अतिपरवलय का दिया गया समीकरण :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

अत: अतिपरवलय का मानक समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 16 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 9$$

$\therefore \quad a = 4$ तथा $b = 3$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक**

$$(\pm a, 0) \equiv (\pm 4, 0)$$

अब $e^2 = 1 + \dfrac{b^2}{a^2} = 1 + \dfrac{3^2}{4^2} = 1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16}$

$\Rightarrow$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = \dfrac{5}{4}$

अब $\quad ae = 4 \times \dfrac{5}{4} = 5$

अब **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$(\pm ae, 0) \equiv (\pm 5, 0)$$

और **अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई**

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

उत्तर

प्रश्न 2. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{27} = 1$

हल : $\because$ दिया गया अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1 \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

अत: अतिपरवलय का मानक समीकरण :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$b^2 = 9 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 27$$

$\therefore \quad b = 3$ तथा $a = \sqrt{27}$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक** $(0, \pm b) \equiv (0, \pm 3)$

$\because \quad e^2 = 1 + \dfrac{a^2}{b^2} = 1 + \dfrac{27}{9} = \dfrac{36}{9} = 4 \quad \Rightarrow \quad e = 2$

$\therefore$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = 2$

$\because \quad be = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$(0, \pm be) \equiv (0, \pm 6)$$

अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई

$= \dfrac{2a^2}{b} = \dfrac{2 \times 27}{3} \qquad (a^2 = 27 \text{ और } b = 3)$

$= 18$

अत: अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= 18$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $9y^2 - 4x^2 = 36$

हल : अतिपरवलय का दिया गया समीकरण :

$$9y^2 - 4x^2 = 36$$

दोनों पक्षों को 36 से भाग देने पर,

$$\frac{9y^2}{36} - \frac{4x^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \qquad \ldots(1)$

यहाँ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ...(2)

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$b^2 = 4 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 9$$

$\therefore$ $b = 2$ तथा $a = 3$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm 2)$

$\because$ $e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

$\therefore$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\because$ $be = 2 \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$

$\therefore$ **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$(0, \pm be) \equiv (0, \pm\sqrt{13})$$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 9}{2} = 9$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $16x^2 - 9y^2 = 576$

हल : अतिपरवलय का दिया गया समीकरण :

$$16x^2 - 9y^2 = 576$$

दोनों पक्षों को 576 से भाग देने पर,

$$\frac{16x^2}{576} - \frac{9y^2}{576} = \frac{576}{576}$$

या $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ...(1)

$\therefore$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...(2)

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$a^2 = 36 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 64$$

$\therefore$ $a = 6$ तथा $b = 8$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक** $(\pm a, 0) \equiv (\pm 6, 0)$

$\because$ $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow$ $e^2 = 1 + \frac{64}{36} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$

$\therefore$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = \frac{5}{3}$

$\because$ $ae = 6 \times \frac{5}{3} = 10$

$\therefore$ **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$(\pm ae, 0) \equiv (\pm 10, 0)$$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 64}{6} = \frac{64}{3}$

अत: अतिपरवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{64}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $5y^2 - 9x^2 = 36$

हल : अतिपरवलय का दिया गया समीकरण :

$$5y^2 - 9x^2 = 36$$

दोनों पक्षों को 36 से भाग देने पर,

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{36}{36}$$

या $\frac{y^2}{(36/5)} - \frac{x^2}{4} = 1$ ...(1)

$\because$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ...(2)

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$b^2 = \frac{36}{5} \quad \text{तथा} \quad a^2 = 4$$

$\therefore$ $b = \frac{6}{\sqrt{5}}$ तथा $a = 2$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm b)$

$$\equiv \left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

$\because$ $e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow$ $e^2 = 1 + \frac{4}{\frac{36}{5}} = 1 + \frac{20}{36} = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$

$\therefore$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$\because$ $be = \frac{6}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{\frac{14}{5}}$$

$\therefore$ **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$= (0, \pm be) = \left(0, \pm 2\sqrt{\frac{14}{5}}\right)$$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{8 \times \sqrt{5}}{6}$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

अत: अतिपरवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{4\sqrt{5}}{3}$

उत्तर

प्रश्न 6. $49y^2 - 16x^2 = 784$

हल : अतिपरवलय का दिया गया समीकरण :

$$49y^2 - 16x^2 = 784$$

दोनों पक्षों को 784 से भाग देने पर,

$$\frac{49y^2}{784} - \frac{16x^2}{784} = \frac{784}{784}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1 \quad \ldots(1)$$

$\because$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) की तुलना करने पर,

$$b^2 = 16 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 49$$

$$\therefore \quad b = 4 \quad \text{तथा} \quad a = 7$$

$\therefore$ **अतिपरवलय के शीर्षों के निर्देशांक** $= (0, \pm b)$

$$= (0, \pm 4)$$

$$\because \quad e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{49}{16} = \frac{65}{16}$$

$\therefore$ **अतिपरवलय की उत्केन्द्रता** $e = \frac{\sqrt{65}}{4}$

$$\because \quad be = 4 \times \frac{\sqrt{65}}{4} = \sqrt{65}$$

$\therefore$ **अतिपरवलय की नाभियों के निर्देशांक**

$$(0, \pm be) \equiv (0, \pm\sqrt{65})$$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 49}{4} = \frac{49}{2}$

अत: अतिपरवलय के नाभिलम्ब की लम्बाई $= \frac{49}{2}$ **उत्तर**

- **निम्नलिखित प्रश्न 7 से 15 तक प्रत्येक में दिए गए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 7. शीर्ष ($\pm$ 2, 0); नाभियाँ ($\pm$ 3, 0)

हल : $\because$ अतिपरवलय के शीर्ष $= (\pm 2, 0)$

और नाभियाँ $= (\pm 3, 0)$

परन्तु अतिपरवलय के शीर्ष $(\pm a, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm ae, 0)$ होती हैं।

$$\therefore \quad a = 2 \quad \text{तथा} \quad ae = 3 \quad \Rightarrow \quad e = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$= (ae)^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

उक्त समीकरण में a तथा b के मान रखने पर,

$$\frac{x^2}{(2)^2} - \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

उत्तर

प्रश्न 8. शीर्ष (0, $\pm$ 5) ; नाभियाँ (0, $\pm$ 8)

हल : $\because$ अतिपरवलय के शीर्ष $= (0, \pm 5)$

और नाभियाँ $= (0, \pm 8)$

शीर्ष और नाभियों के निर्देशांकों से स्पष्ट है कि ये Y-अक्ष पर स्थित हैं।

$\therefore$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

तब अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$\therefore$ शीर्ष $= (0, \pm b) = (0, \pm 5)$

और नाभियाँ $= (0, \pm be) = (0, \pm 8)$

$$b = 5 \quad \text{तथा} \quad be = 8$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad a^2 = (be)^2 - b^2 = 8^2 - 5^2$$

$$= 64 - 25 = 39$$

तब अतिपरवलय के समीकरण में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$$

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का व्यापक समीकरण :

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$$

उत्तर

प्रश्न 9. शीर्ष (0, $\pm$ 3) ; नाभियाँ (0, $\pm$ 5)

हल : $\because$ अतिपरवलय के शीर्ष $= (0, \pm 3)$

और नाभियाँ $= (0, \pm 5)$

शीर्ष और नाभियों के निर्देशांकों से स्पष्ट है कि ये Y-अक्ष पर स्थित हैं।

$\therefore$ अतिपरवलय का अनुप्रस्थ-अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

तब माना अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$\therefore$ शीर्ष $= (0, \pm b) = (0, \pm 3)$

और नाभियाँ $= (0, \pm be) = (0, \pm 5)$

$$\Rightarrow \quad b = 3 \quad \text{तथा} \quad be = 5$$

$$\therefore \quad a^2 = (be)^2 - b^2 = (5)^2 - (3)^2 = 16$$

तब अतिपरवलय के समीकरण में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{y^2}{(3)^2} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$\therefore$ $$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का व्यापक समीकरण :

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. नाभियाँ (± 5, 0), अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 8 है।

हल : $\because$ अतिपरवलय की नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं क्योंकि इनके y-निर्देशांक शून्य हैं।

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...(1)

$\because$ नाभियाँ $(\pm ae, 0) \equiv (\pm 5, 0) \Rightarrow ae = 5$

चूँकि अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

तब, $$e = \frac{5}{4}$$

परन्तु अतिपरवलय में, $1 + \frac{b^2}{a^2} = e^2$

$\therefore$ $$b^2 = a^2e^2 - a^2$$

$\therefore$ $$b^2 = (5)^2 - (4)^2 = 9$$

अब अतिपरवलय के मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{x^2}{(4)^2} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

उत्तर

प्रश्न 11. नाभियाँ (0, ± 13); संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 24 है।

हल : $\because$ नाभियों के x-निर्देशांक = 0

$\therefore$ अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore$ नाभियाँ $(0, \pm be) \equiv (0, \pm 13)$

$\Rightarrow$ $$be = 13$$

$\because$ संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 24 है।

$\therefore$ $$2a = 24 \Rightarrow a = 12$$

$\therefore$ $$a^2 = (be)^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = (be)^2 - a^2$$

$\therefore$ $$b^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

$\therefore$ $$b^2 = 25$$

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

उक्त समीकरण में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

अत: अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$; नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 8 है।

हल : स्पष्ट है कि अतिपरवलय की नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, X-अक्ष पर हैं।

इसलिए माना अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

उक्त अतिपरवलय की नाभियाँ $\equiv (\pm a\,e, 0)$

तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \frac{2\,b^2}{a}$

इसलिए $$a\,e = 3\sqrt{5}$$

तथा $$\frac{2\,b^2}{a} = 8 \Rightarrow a\,e = 3\sqrt{5}$$

तथा $$b^2 = 4\,a$$

अब $$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = a^2\,e^2 - a^2$$

$\Rightarrow$ $$4\,a = 45 - a^2$$

$\Rightarrow$ $$a^2 + 4\,a - 45 = 0$$

$\Rightarrow$ $$(a + 9)(a - 5) = 0$$

$\Rightarrow$ $$a = -9 \quad \text{अथवा} \quad a = 5$$

परन्तु a का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है। इसलिए

$$a = 5$$

$\because$ $$b^2 = 4a \quad \text{तथा} \quad a = 5,$$

$\therefore$ $$b^2 = 4 \times 5 = 20$$

अत: अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$

उत्तर

प्रश्न 13. नाभियाँ (± 4, 0); नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 12 है।

हल : $\because$ नाभियों का y-निर्देशांक = 0

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

यदि अतिपरवलय की उत्केन्द्रता e हो तो नाभियाँ

$$= (\pm ae, 0) \equiv (\pm 4, 0)$$

$\therefore$ $$ae = 4 \Rightarrow a^2e^2 = 16$$

$\Rightarrow \quad a^2\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)=16 \qquad \left(\because e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

$\Rightarrow \quad a^2\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2}\right)=16$

$\Rightarrow \quad a^2+b^2=16 \qquad \ldots(1)$

$\because$ नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 12

$\therefore \quad \dfrac{2b^2}{a}=12$

$\Rightarrow \quad b^2=6a \qquad \ldots(2)$

अब समीकरण (1) व समीकरण (2) से,

$$a^2+6a-16=0$$

गुणनखण्ड करने पर,

$$(a+8)(a-2)=0$$

$\therefore \quad a=-8, 2$

परन्तु a का ऋणात्मक मान मान्य नहीं है। अतः

$$a=2$$

$\Rightarrow \quad a^2=4$

अब a का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$b^2=12$$

अब a^2 तथा b^2 के मान अतिपरवलय के मानक समीकरण में रखने पर,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

अतः अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1 \qquad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 14. शीर्ष (± 7, 0), $\mathbf{e=\dfrac{4}{3}}$

हल : $\because$ नाभियों का y-निर्देशांक = 0

$\therefore$ अतिपरवलय का मानक समीकरण : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

तब इसके शीर्ष के निर्देशांक = $(\pm a, 0)\equiv(\pm 7, 0)$

$\therefore \quad a=7 \quad \Rightarrow \quad a^2=49$

और $\because \quad e=\dfrac{4}{3}$ या $e^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore \quad 1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{16}{9} \qquad \left(\because e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

$\therefore \quad \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{16}{9}-1=\dfrac{7}{9}$

$\therefore \quad b^2=\dfrac{7}{9}\times a^2=\dfrac{7}{9}\times 49=\dfrac{343}{9}$

अब अतिपरवलय के मानक समीकरण में $a^2=49$ तथा $b^2=\dfrac{343}{9}$ रखने पर,

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{\frac{343}{9}}=1 \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1$$

अतः अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1 \qquad \textbf{उत्तर}$$

प्रश्न 15. नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ हैं तथा अतिपरवलय (2, 3) से होकर जाता है।

हल : स्पष्ट है कि अतिपरवलय की नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$, Y-अक्ष पर हैं।

इसलिए माना अतिपरवलय का समीकरण :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad \ldots(1)$$

उक्त अतिपरवलय की नाभियाँ $\equiv(0, \pm be)$

इसलिए $\quad be=\sqrt{10}$

$\because$ अतिपरवलय (1), बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है,

$\therefore \quad \dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{3^2}{b^2}=-1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{b^2(e^2-1)}-\dfrac{9}{b^2}=-1 \qquad [\because \mathbf{a^2=b^2(e^2-1)}]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{b^2e^2-b^2}-\dfrac{9}{b^2}=-1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{10-b^2}-\dfrac{9}{b^2}=-1 \quad [\because be=\sqrt{10}]$

$\Rightarrow \quad 4b^2-9(10-b^2)=-b^2(10-b^2)$

$\Rightarrow \quad 4b^2-90+9b^2=-10b^2+b^4$

$\Rightarrow \quad b^4-23b^2+90=0$

$\Rightarrow \quad (b^2-5)(b^2-18)=0$

$\Rightarrow \quad b^2=5$ अथवा $b^2=18$

अब, $\quad a^2=b^2(e^2-1)=b^2e^2-b^2$

$\Rightarrow \quad a^2=10-b^2 \qquad [\because be=\sqrt{10}]$

यदि $b^2=5$ है तो $a^2=10-5=5$

यदि $b^2=18$ है तो $a^2=10-18=-8$

परन्तु $a^2=-8$ अमान्य है। इसलिए $a^2=5$

समीकरण (1) में a^2 तथा b^2 के मान रखने पर,

अतिपरवलय का समीकरण : $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{5}=-1$

$\Rightarrow \quad x^2-y^2=-5 \qquad$ **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है तो परावर्तक की नाभि ज्ञात कीजिए।

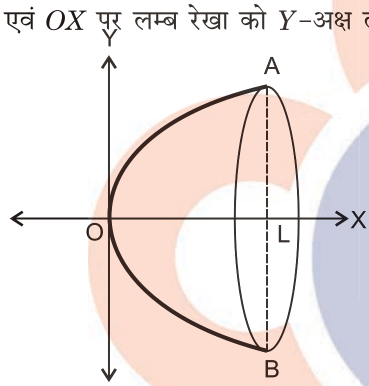
हल : माना परवलयाकार परावर्तक AOB का व्यास AB तथा गहराई OL है।

दिया है कि $AB = 20$ सेमी

तथा $OL = 5$ सेमी

इसलिए $AL = 10$ सेमी

बिन्दु O को मूलबिन्दु, OL को X-अक्ष तथा O से होकर जाने वाली एवं OX पर लम्ब रेखा को Y-अक्ष लेने पर,



माना परवलय का समीकरण :

$$y^2 = 4ax \quad ...(1)$$

बिन्दु A के निर्देशांक $= (5, 10)$

$\because$ बिन्दु A, परवलय (1) पर स्थित है,

$\therefore$ $10^2 = 4a \times 5$

$\Rightarrow$ $100 = 20a$

$\Rightarrow$ $a = 5$

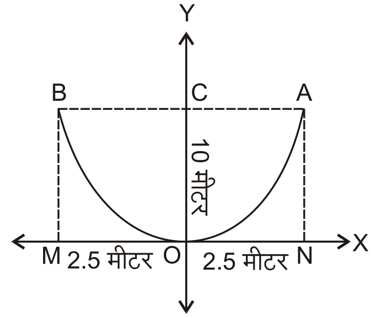
अत: नाभि के निर्देशांक $= (a, 0) = (5, 0)$

अर्थात नाभि दिए हुए व्यास के मध्य-बिन्दु पर है। **उत्तर**

प्रश्न 2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराब 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है। यह परवलय के शीर्ष से 2 मीटर की दूरी पर कितना चौड़ा होगा?

हल : माना परवलयाकार मेहराब का शीर्ष, मूलबिन्दु तथा अक्ष, OY के अनुदिश है।

$\therefore$ परवलय का समीकरण : $x^2 = 4ay \quad ...(1)$



बिन्दु A के निर्देशांक $= (2.5,\ 10)$

$\because$ बिन्दु A, परवलय (1) पर स्थित है,

$\therefore$ $(2.5)^2 = 4a \times 10$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{6.25}{4 \times 10} = \dfrac{625}{4000} = \dfrac{5}{32}$

समीकरण (1) में a का मान रखने पर,

परवलय का समीकरण : $x^2 = \dfrac{5}{8}y$

जब $y = 2$ है तो $x^2 = \dfrac{5}{8} \times 2 = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

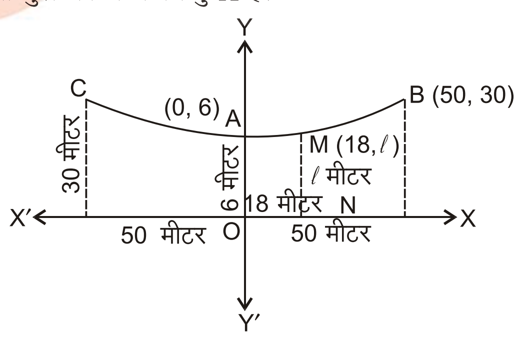
अत: परवलय के शीर्ष से 2 मीटर दूरी पर

मेहराब की चौड़ाई $= 2 \times \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ मीटर

$= \sqrt{5}$ मीटर $= 2.23$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable) परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लम्बा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लम्बा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना पुल CAB तथा $X'OX$ क्षैतिज सड़क पथ है। माना पुल का मध्य-बिन्दु A है।



$X'OX$ को X-अक्ष तथा Y-अक्ष को OA के अनुदिश लेने पर,

बिन्दु A के निर्देशांक $= (0,\ 6)$

स्पष्ट है कि परवलय का शीर्ष $A(0,\ 6)$ है।

माना परवलय का समीकरण :

$$x^2 = 4a(y-6) \qquad ...(1)$$

$\because$ उक्त परवलय, बिन्दु $B(50,\ 30)$ से होकर जाता है,

$\therefore \quad 50^2 = 4a(30-6)$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{50\times 50}{4\times 24} = \dfrac{625}{24}$

समीकरण (1) में a का मान रखने पर,

परवलय का समीकरण : $x^2 = \dfrac{625}{6}(y-6)$

माना मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक तार MN की लम्बाई l मीटर है, तब

बिन्दु M के निर्देशांक $= (18,\ l)$

$\because$ बिन्दु M, परवलय $x^2 = \dfrac{625}{6}(y-6)$ पर स्थित है,

$\therefore \quad 18^2 = \dfrac{625}{6}(l-6)$

$\Rightarrow \quad l - 6 = \dfrac{18\times 18\times 6}{625} = \dfrac{1944}{625}$

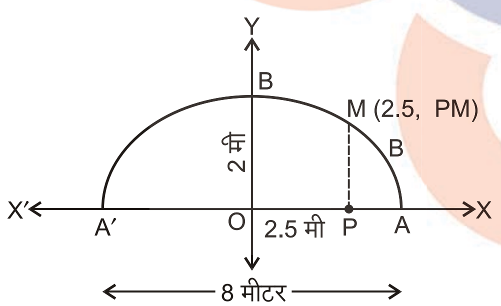
$\Rightarrow \quad l = \dfrac{1944}{625} + 6 = \dfrac{1944+3750}{625} = \dfrac{5694}{625} = 9.11$

अत: समर्थक तार की लम्बाई = 9.11 मीटर **उत्तर**

प्रश्न 4. एक मेहराब अर्द्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा है और केन्द्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिन्दु पर मेहराब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना ABA' अर्द्ध-दीर्घवृत्त के रूप का एक मेहराब इस प्रकार है कि

$AA' = 8$ मीटर तथा $OB = 2$ मीटर



माना दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

तब, $AA' = 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

तथा $OB = 2 \Rightarrow b = 2$

$\therefore$ दीर्घवृत्त का समीकरण : $\dfrac{x^2}{14} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \qquad ...(1)$

माना सिरे A से 1.5 मीटर दूर स्थित एक बिन्दु P है।

तब, $OP = OA - AP = (4-1.5)$ मीटर = 2.5 मीटर

बिन्दु P से जाने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा मेहराब को बिन्दु M पर काटती है।

$\therefore$ बिन्दु M के निर्देशांक $= (2.5,\ PM)$

$\because$ बिन्दु M, दीर्घवृत्त (1) पर स्थित है,

$$\therefore \quad \frac{(2.5)^2}{16} + \frac{PM^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6.25}{16} + \frac{PM^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{PM^2}{4} = 1 - \frac{6.25}{16} = 1 - \frac{625}{1600} = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$

$$\Rightarrow \quad PM^2 = 4\times\frac{39}{64} = \frac{39}{16} \quad \Rightarrow \quad PM = \frac{\sqrt{39}}{4}$$

अत: एक सिरे से 1.5 मीटर दूर स्थित बिन्दु पर मेहराब की ऊँचाई $= \dfrac{\sqrt{39}}{4}$ मीटर = 1.56 मीटर **उत्तर**

प्रश्न 5. एक 12 सेमी लम्बी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशाक्षों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष के सम्पर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

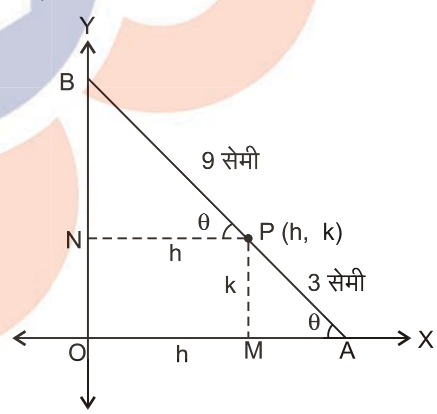
हल : माना 12 सेमी लम्बी छड़ AB इस प्रकार चलती है कि उसके सिरे A तथा B क्रमश: X-अक्ष तथा Y-अक्ष को स्पर्श करते हैं।

माना AB पर बिन्दु P इस प्रकार है कि

$AP = 3$ सेमी

तब, $BP = 9$ सेमी

माना P से OA तथा OB पर डाले गए लम्ब क्रमश: PM तथा PN हैं।



माना $P \equiv (h,\ k)$, $\angle BAO = \angle BPN = \theta$

समकोण ΔPMA में, $\sin\theta = \dfrac{PM}{AP} = \dfrac{k}{3}$

तथा समकोण ΔBPN में, $\cos\theta = \dfrac{PN}{BP} = \dfrac{h}{9}$

इसलिए $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{k}{3}\right]^2 + \left[\frac{h}{9}\right]^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k^2}{9} + \frac{h^2}{81} = 1$$

$\Rightarrow \quad \frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{9} = 1$

अत: बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ : $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$

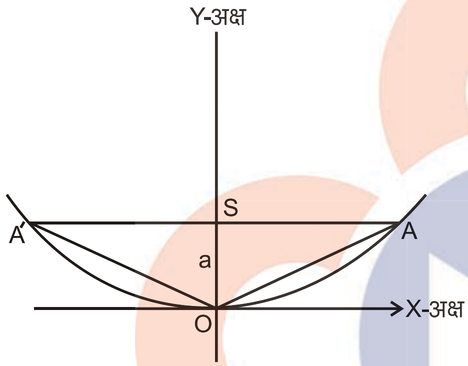
उत्तर

प्रश्न 6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलम्ब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है। [NCERT EXEMPLAR]

हल : चित्र में परवलय $x^2 = 12y$ को प्रदर्शित किया गया है। यह Y-अक्ष के अनुदिश सममित है।

$\because \quad x^2 = 12y \quad ...(1)$

और Y-अक्ष के अनुदिश परवलय का मानक समीकरण :



$x^2 = 4ay \quad ...(2)$

तब समीकरण (1) व समीकरण (2) से,

$4ay = 12y \quad \Rightarrow \quad a = 3$

$\therefore \quad a = OS = 3$

$\therefore$ बिन्दु नाभि S के निर्देशांक $(0, 3)$ ASA' परवलय की नाभिलम्ब जीवा है जिसका समीकरण $y = a$ अर्थात $y = 3$ है।

समीकरण (1) में $y = 3$ रखने पर,

$x^2 = 12 \times 3 = 36 = 6^2$

$\Rightarrow \quad x = \pm 6$

$\therefore$ बिन्दु A के x–निर्देशांक $= 6$

$\Rightarrow \quad AS = 6$

इसी प्रकार $A'S = 6$ जिससे नाभिलम्ब जीवा

$AA' = AS + A'S = 6 + 6 = 12$

तब $\Delta AOA'$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OS \times AA'$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 12$

$= 18$ वर्ग इकाई

अत: अभीष्ट त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 18$ वर्ग इकाई **उत्तर**

प्रश्न 7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए अंकित करता है कि उससे दो झण्डा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है और झण्डा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्ट है कि व्यक्ति द्वारा बनाया गया पथ एक **दीर्घवृत्त** है जिसकी नाभियाँ दोनों झण्डा चौकियों पर स्थित हैं।

माना दीर्घवृत्त का समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

जहाँ $\quad b^2 = a^2(1 - e^2)$

दिया है कि व्यक्ति की दोनों झण्डा

चौकियों से दूरियों का योगफल $= 10$ मीटर

तथा झण्डा चौकियों के बीच की दूरी $= 8$ मीटर

$\therefore$ दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु की

नाभीय दूरियों का योगफल $= 10$ मीटर

तथा नाभियों के बीच की दूरी $= 8$ मीटर

परन्तु हम जानते हैं कि

दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु की

नाभीय दूरियों का योगफल $= 2a$

तथा नाभियों के बीच की दूरी $= 2ae$

इसलिए $\quad 2a = 10 \quad$ तथा $\quad 2ae = 8$

$\Rightarrow \quad a = 5 \quad$ तथा $\quad ae = 4$

अब, $\quad b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 - a^2 e^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow \quad b = 3$

अत: व्यक्ति द्वारा बनाए गए पथ का समीकरण

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

या $\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 8. परवलय $y^2 = 4ax$ के अन्तर्गत एक समबाहु त्रिभुज है, जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण : $y^2 = 4ax \quad ...(1)$

इसलिए शीर्ष O के निर्देशांक $= (0, 0)$

माना OAB एक समबाहु त्रिभुज है जिसके शीर्ष परवलय (1) पर स्थित हैं।

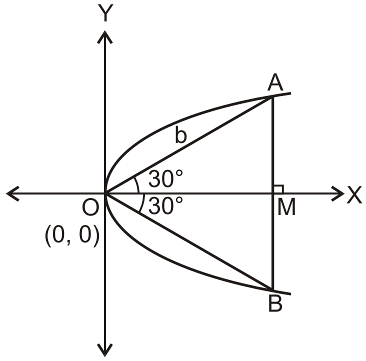
माना समबाहु ΔOAB की भुजा की लम्बाई b है।

तब, $\quad OA = b$

समकोण ΔOMA में,

$\cos 30° = \frac{OM}{OA} = \frac{OM}{b}$

तथा $\quad \sin 30° = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{b}$



$$\Rightarrow \qquad OM = b\cos 30° = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

तथा $$AM = b\sin 30° = \frac{b}{2}$$

इसलिए बिन्दु A के निर्देशांक $= \left[\frac{b\sqrt{3}}{2}, \ \frac{b}{2}\right]$

$\because$ बिन्दु A, परवलय (1) पर स्थित है,

$$\therefore \qquad \left[\frac{b}{2}\right]^2 = 4a \times \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{b^2}{4} = 2\,ab\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad b = 8a\sqrt{3}$$

अतः समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई $8a\sqrt{3}$ है।

उत्तर

❒