11 त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय
(Introduction To Three Dimensional Geometry)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 11.1

प्रश्न 1. एक बिन्दु X-अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या हैं?

हल : $\because$ X-अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $= (x, 0, 0)$

$\therefore$ X-अक्ष पर स्थित बिन्दु के लिए **y-निर्देशांक = 0**

तथा **z-निर्देशांक = 0** **उत्तर**

प्रश्न 2. एक बिन्दु XZ-तल में है। इसके y-निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

हल : $\because$ XZ-तल में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $= (x, 0, z)$

$\therefore$ XZ-तल में स्थित किसी बिन्दु के **y-निर्देशांक = 0** **उत्तर**

प्रश्न 3. उन अष्टांशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिन्दु स्थित हैं :

(1, 2, 3), (4, − 2, 3), (4, − 2, − 5), (4, 2, − 5), (− 4, 2, − 5), (− 4, 2, 5), (− 3, − 1, 6), (2, − 4, − 7)

हल :

बिन्दु के निर्देशांक	बिन्दु के निर्देशांकों के चिह्न	अष्टांश जिसमें बिन्दु स्थित है।
(1, 2, 3)	(+, +, +)	I
(4, − 2, 3)	(+, −, +)	III
(4, − 2, − 5)	(+, −, −)	VII
(4, 2, − 5)	(+, +, −)	V
(− 4, 2, − 5)	(−, +, −)	VI
(− 4, 2, 5)	(−, +, +)	II
(− 3, − 1, 6)	(−, −, +)	IV
(2, − 4, − 7)	(+, −, −)	VII

प्रश्न 4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) X-अक्ष और Y-अक्ष दोनों एक साथ मिलकर एक तल बनाते हैं, उस तल को .....कहते हैं।

(ii) XY-तल में एक बिन्दु के निर्देशांक.....रूप के होते हैं।

(iii) निर्देशांक तल अन्तरिक्ष को.....अष्टांश में विभाजित करते हैं।

हल : (i) X-अक्ष और Y-अक्ष दोनों एक साथ मिलकर एक तल बनाते हैं, उस तल को **XY-समतल** कहते हैं।

(ii) XY-तल में एक बिन्दु के निर्देशांक **(x, y, 0)** रूप के होते हैं।

(iii) निर्देशांक तल अन्तरिक्ष को 8 अष्टांश में विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली | 11.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

(i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1)

(ii) (− 3, 7, 2) और (2, 4, − 1)

(iii) (− 1, 3, − 4) और (1, − 3, 4)

(iv) (2, − 1, 3) और (− 2, 1, 3)

हल : (i) दिए हुए बिन्दु : $(2, 3, 5)$ और $(4, 3, 1)$

$x_1 = 2;\quad y_1 = 3;\quad z_1 = 5$

$x_2 = 4;\quad y_2 = 3;\quad z_2 = 1$

$\therefore$ बिन्दुओं $(2, 3, 5)$ और $(4, 3, 1)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + 0 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ **उत्तर**

अत: बिन्दुओं $(2, 3, 5)$ और $(4, 3, 1)$ के बीच की दूरी $= 2\sqrt{5}$ **उत्तर**

- **(ii)** अभीष्ट दूरी

$$= \sqrt{[2-(-3)]^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43}$$ **उत्तर**

- **(iii)** दिए हुए बिन्दु : $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$

$x_1 = -1;\quad y_1 = 3;\quad z_1 = -4$

$x_2 = 1;\quad y_2 = -3;\quad z_2 = 4$

∴ बिन्दुओं $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{\{1-(-1)\}^2 + \{-3-(3)\}^2 + \{4-(-4)\}^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (-6)^2 + (8)^2} = \sqrt{4 + 36 + 64}$

$= \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

अत: बिन्दुओं $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$ के बीच की दूरी $= 2\sqrt{26}$ **उत्तर**

● **(iv)** दिए हुए बिन्दु : $(2, -1, 3)$ और $(-2, 1, 3)$

$x_1 = 2;$ $y_1 = -1;$ $z_1 = 3$

$x_2 = -2;$ $y_2 = 1;$ $z_2 = 3$

∴ बिन्दुओं $(2, -1, 3)$ और $(-2, 1, 3)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{\{-2-(2)\}^2 + \{1-(-1)^2\} + (3-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + 0} = \sqrt{16 + 4 + 0}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

अत: बिन्दुओं $(2, -1, 3)$ और $(-2, 1, 3)$ के बीच की दूरी $= 2\sqrt{5}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिन्दु (– 2, 3, 5), (1, 2, 3) और (7, 0, – 1) संरेख हैं।

हल : माना $P \equiv (-2, 3, 5)$,

$Q \equiv (1, 2, 3)$,

$R \equiv (7, 0, -1)$

तब, $PQ = \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2}$

$= \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

तथा $PR = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{81 + 9 + 36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

हम देखते हैं कि $PR = PQ + QR$

अत: दिए हुए बिन्दु संरेख हैं। **Proved.**

प्रश्न 3. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

(i) (0, 7, – 10), (1, 6, – 6) और (4, 9, – 6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) (0, 7, 10), (– 1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(iii) (–1, 2, 1), (1, – 2, 5), (4, – 7, 8) और (2, – 3, 4) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल : (i) माना बिन्दु :

$(0, 7, -10) \equiv A,$ $(1, 6, -6) \equiv B$

और $(4, 9, -6) \equiv C$

$x_1 = 0;$ $y_1 = 7;$ $z_1 = -10$

$x_2 = 1;$ $y_2 = 6;$ $z_2 = -6$

$x_3 = 4;$ $y_3 = 9;$ $z_3 = -6$

रेखाखण्ड AB की लम्बाई

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{(1-0)^2 + (6-7)^2 + \{-6-(-10)\}^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + \{-6+10\}^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

रेखाखण्ड BC की लम्बाई

$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$

$= \sqrt{(4-1)^2 + (9-6)^2 + \{-6-(-6)\}^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + 0} = \sqrt{9 + 9 + 0}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

∵ ΔABC में भुजा $AB =$ भुजा BC

⇒ ΔABC समद्विबाहु है।

अत: दिए हुए बिन्दु $(0, 7, -10)$, $(1, 6, -6)$ और $(4, 9, -6)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। **Proved.**

● **(ii)** माना बिन्दु :

$(0, 7, 10) \equiv A;$ $(-1, 6, 6) \equiv B$

तथा $(-4, 9, 6) \equiv C$

$x_1 = 0;$ $y_1 = 7;$ $z_1 = 10$

$x_2 = -1;$ $y_2 = 6;$ $z_2 = 6$

$x_3 = -4;$ $y_3 = 9;$ $z_3 = 6$

रेखाखण्ड AB की लम्बाई

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$= \sqrt{(-1-0)^2 + (6-7)^2 + (6-10)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$

रेखाखण्ड BC की लम्बाई

$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$

$= \sqrt{\{-4-(-1)\}^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2}$

$= \sqrt{(-4+1)^2 + (3)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + 0} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18}$

रेखाखण्ड CA की लम्बाई

$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$

$= \sqrt{(-4-0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36}$

तब, $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2$

$= 18 + 18 = 36 = CA^2$

$\because$ समकोण ΔABC में, $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से, ΔABC समकोणीय त्रिभुज है।

अत: दिए हुए बिन्दु $(0, 7, 10), (-1, 6, 6)$ व $(-4, 9, 6)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **Proved.**

● **(iii)** माना दिए हुए बिन्दु क्रमश: A, B, C तथा D हैं।

तब, $AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (-7+2)^2 + (8-5)^2}$

$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (-3+7)^2 + (4-8)^2}$

$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

तथा $DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+3)^2 + (1-4)^2}$

$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

हम देखते हैं कि $AB = CD$ तथा $BC = DA$

इससे प्रदर्शित होता है कि चतुर्भुज $ABCD$ की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।

अत: $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। अत: दिए हुए बिन्दु एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। **Proved.**

प्रश्न 4. ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2, 3) और (3, 2, – 1) से समदूरस्थ है।

हल : माना अभीष्ट बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

तब, बिन्दु $A \equiv (1, 2, 3)$ से बिन्दु $P(x, y, z)$ की दूरी

$AP = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$

$\therefore \quad AP = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9}$

$\therefore \quad AP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14}$

और बिन्दु $B \equiv (3, 2, -1)$ से बिन्दु $P(x, y, z)$ की दूरी

$BP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + \{z-(-1)\}^2}$

$\therefore \quad BP = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + (z+1)^2}$

$\therefore \quad BP = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 + z^2 + 2z + 1}$

$\therefore \quad BP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 14}$

$\because$ प्रश्नानुसार, $AP = BP$

$\therefore \quad (AP)^2 = (BP)^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14$

$= x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z + 14$

$\therefore \quad -2x + 6x - 6z - 2z = 0$

$\therefore \quad 4x - 8z = 0$

$\therefore \quad 4(x - 2z) = 0$

$\therefore \quad x - 2z = 0$

अत: बिन्दुओं P के समुच्चयों का समीकरण:

$x - 2z = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 5. बिन्दुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दुओं A (4, 0, 0) और B (– 4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है।

हल : माना समुच्चय का एक बिन्दु $P(x, y, z)$ है।

तब, $PA + PB = 10$

$\Rightarrow \quad PA = 10 - PB$ **[Note]**

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$

$= 10 - \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$

$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 + z^2$

$- 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 100 + x^2 + 8x + 16$

$- 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow \quad 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 16x + 100$

$\Rightarrow \quad 5\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 4x + 25$

$\Rightarrow \quad 25[(x+4)^2 + y^2 + z^2] = (4x + 25)^2$

$\Rightarrow \quad 25(x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2)$

$= 16x^2 + 200x + 625$

$\Rightarrow \quad 9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

अत: अभीष्ट समुच्चय का समीकरण :

$9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$ **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. समान्तर चतुर्भुज के तीन शीर्ष A (3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) व C (– 1, 1, 2) हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के चौथे शीर्ष D के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

इसलिए विकर्णों AC तथा BD के मध्य-बिन्दु सम्पाती होंगे।

अर्थात $\left[\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right]$

$= \left[\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{-4+z}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad (1,\ 0,\ 2) = \left[\frac{x+1}{2},\ \frac{y+2}{2},\ \frac{z-4}{2}\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{2} = 1, \quad \frac{y+2}{2} = 0 \quad$ तथा $\quad \frac{z-4}{2} = 2$

$\Rightarrow \quad x = 1, \quad y = -2$ तथा $\quad z = 8$

अत: चौथे शीर्ष D के निर्देशांक $= (1,\ -2,\ 8)$ **उत्तर**

प्रश्न 2. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमश: A (0, 0, 6), B (0, 4, 0) तथा C (6, 0, 0) हैं। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

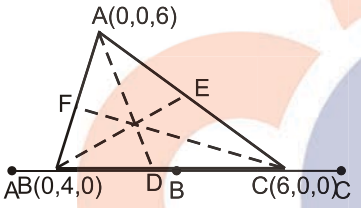
हल : $A = (0, 0, 6)$; $\quad B = (0, 4, 0)$;

$C = (6, 0, 0)$

माना भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिन्दु क्रमश: D, E व F हैं।

तब, $\quad D = BC$ का मध्य-बिन्दु

$$= \left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 2, 0)$$



$E = CA$ का मध्य-बिन्दु

$$= \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (3, 0, 3)$$

तथा $\quad F = AB$ का मध्य-बिन्दु

$$= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0, 2, 3)$$

तब माध्यिका $AD = A\,(0, 0, 6)$ व $D\,(3, 2, 0)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (0-6)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

माध्यिका $BE = B\,(0, 4, 0)$ व $E\,(3, 0, 3)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2 + (3-0)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}$$

तथा माध्यिका $CF = C\,(6, 0, 0)$ व $F\,(0, 2, 3)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(0-6)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

अत: त्रिभुज ABC की माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ $7, \sqrt{34}$ व 7 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि त्रिभुज PQR का केन्द्रक मूलबिन्दु है और शीर्ष P (2 a, 2, 6), Q (– 4, 3 b, – 10) और R (8, 14, 2 c) है तो a, b और c का मान ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज के शीर्ष $P = (2a,\ 2,\ 6)$,

$Q = (-4,\ 3b,\ -10)$

तथा $\quad R = (8,\ 14,\ 2c)$

यदि त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (x, y, z) हों तो

$$(x, y, z) \equiv \left(\frac{2a + (-4) + 8}{3}, \frac{2 + 3b + 14}{3}, \frac{6 + (-10) + 2c}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) \equiv \left(\frac{2a+4}{3}, \frac{3b+16}{3}, \frac{-4+2c}{3}\right)$$

परन्तु दिया है कि त्रिभुज का केन्द्रक मूलबिन्दु $(0, 0, 0)$ है।

$$\therefore \quad \left(\frac{2a+4}{3}, \frac{3b+16}{3}, \frac{-4+2c}{3}\right) \equiv (0, 0, 0)$$

तब, $\quad \frac{2a+4}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a + 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad a = -2$$

$$\frac{3b+16}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3b + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{16}{3}$$

$$\frac{-4+2c}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + 2c = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = 2$$

अत: $\quad a = -2, \quad b = \frac{-16}{3}, \quad c = 2$ **उत्तर**

प्रश्न 4. Y-अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु P (3, – 2, 5) से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

हल : माना Y-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु A के निर्देशांक $= (0,\ a,\ 0)$

तब, $\quad AP = 5\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(3-0)^2 + (-2-a)^2 + (5-0)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad 9 + (2+a)^2 + 25 = 50$$

$$\Rightarrow \quad (2+a)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 2 + a = \pm 4$$

$$\Rightarrow \quad a = 2,\ -6$$

अत: अभीष्ट बिन्दुओं के निर्देशांक $(0, 2, 0)$ तथा $(0, -6, 0)$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि बिन्दु A और B क्रमश: (3, 4, 5) तथा (– 1, 3, – 7) हैं। चर बिन्दु P द्वारा निर्मित समुच्चय से सम्बन्धित समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $PA^2 + PB^2 = k^2$ जहाँ k अचर है।

हल : माना चर बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

$A = (3, 4, 5)$

तथा $B = (-1, 3, -7)$

तब, $PA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2}$

$\therefore \quad PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 10z + 25$

$\Rightarrow \quad PA^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 50 \quad ...(1)$

और $PB = \sqrt{(-1-x)^2 + (3-y)^2 + (-7-z)^2}$

$\Rightarrow \quad PB = \sqrt{(1+x)^2 + (3-y)^2 + (7+z)^2}$

$\Rightarrow \quad PB^2 = (1+x)^2 + (3-y)^2 + (7+z)^2$

$\Rightarrow \quad PB^2 = 1 + 2x + x^2 + 9 - 6y + y^2 + 49 + 14z + z^2$

$\Rightarrow \quad PB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 14z + 59 \quad ...(2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर,

$PA^2 + PB^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z + 109$

परन्तु प्रश्न में दिया है कि

$PA^2 + PB^2 = k^2$

$\therefore \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z + 109 = k^2$

$\therefore \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = k^2 - 109$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$

अत: चर बिन्दु P द्वारा निर्मित समुच्चय से सम्बन्धित समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$ है।

उत्तर

❐