इकाई 4 : कलन

12 सीमा तथा अवकलज (Limits and Derivatives)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली 12.1

- **प्रश्न 1 से 22 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए :**

प्रश्न 1. $\lim_{x\to 3}(x+3)$

हल : हमें यहाँ दिए गए फलन की $x \to 3$ पर सीमा ज्ञात करनी है, अत: सर्वप्रथम हम फलन $(x+3)$ में $x=3$ रखकर देखते हैं।

$\therefore$ $x=3$ रखने पर

$$x+3=3+3=6 \quad \text{(परिभाषित मान)}$$

$\because$ इस प्रकार प्राप्त मान परिभाषित है, अत: यह मान ही फलन की सीमा होगी, अर्थात

$$\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $\lim_{x\to\pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$

हल : $$\lim_{x\to\pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)=\lim_{x\to\pi}(x)-\lim_{x\to\pi}\left(\frac{22}{7}\right)$$
$$=\pi-\frac{22}{7}$$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $\lim_{r\to 1}\pi r^2$

हल : $$\lim_{r\to 1}\pi r^2=\pi\lim_{r\to 1}r^2$$
$$=\pi.(1)^2=\pi$$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$

हल : प्रश्न-1 की भाँति फलन में $x=4$ रखने पर,

$$\frac{4x+3}{x-2}=\frac{4\times4+3}{4-2}=\frac{19}{2} \quad \text{(परिभाषित मान)}$$

अत: यह मान ही फलन की सीमा होगी अर्थात

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}=\frac{4\times4+3}{4-2}=\frac{16+3}{2}=\frac{19}{2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$

हल : दिए गए फलन में $x=-1$ रखने पर

$$\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}=\frac{(-1)^{10}+(-1)^5+1}{-1-1}$$
$$=\frac{1-1+1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

(परिभाषित मान)

अत: यह मान ही फलन की सीमा होगी अर्थात

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}=\frac{(-1)^{10}+(-1)^5+1}{-1-1}$$
$$=\frac{1-1+1}{-2}=-\frac{1}{2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

हल : दिए गए फलन में $x=0$ रखने पर,

$$\frac{(x+1)^5-1}{x}=\frac{(0+1)^5-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

(अनिर्धार्य मान)

स्पष्ट है कि यह मान फलन की सीमा नहीं हो सकता।

$\because$ $(x+1)^5$ एक द्विपद व्यंजक है, अत: हम इसका द्विपद प्रमेय से प्रसार कर सकते हैं, अर्थात

$$(x+1)^5 = x^5+{}^5C_1x^4+{}^5C_2x^3+{}^5C_3x^2+{}^5C_4x+1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x^5+{}^5C_1.\ x^4+{}^5C_2.x^3+{}^5C_3.x^2+{}^5C_4.x+{}^5C_5]-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5) = 5$$

उत्तर

प्रश्न 7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

हल : $\because \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

$$= \frac{3(2)^2 - 2 - 10}{(2)^2 - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{(अनिर्धार्य मान)}$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x+5}{x+2}$$

$$= \frac{3(2)+5}{2+2} = \frac{6+5}{4} = \frac{11}{4}$$

उत्तर

प्रश्न 8. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

हल : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2)^2 - (3^2)^2}{2x^2 - 6x + x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 3^2)(x^2 + 3^2)}{2x(x-3) + (x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)(2x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x^2+9)}{2x+1}$$

$$= \frac{(3+3)(3^2+9)}{2 \times 3 + 1} = \frac{6 \times 18}{7} = \frac{108}{7}$$

उत्तर

प्रश्न 9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax + b}{cx + 1}$.

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax+b}{cx+1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} (ax+b)}{\lim\limits_{x \to 0} (cx+1)}$

$$= \frac{(a.0 + b)}{(c.0 + 1)} = \frac{b}{1} = b$$

अत: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax+b}{cx+1} = b$

उत्तर

प्रश्न 10. $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

हल : $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1} = \lim\limits_{z \to 1} \dfrac{\left[z^{\frac{1}{6}}\right]^2 - 1^2}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\left[z^{\frac{1}{6}} - 1\right]\left[z^{\frac{1}{6}} + 1\right]}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$$

$$= \lim_{z \to 1} z^{\left(\frac{1}{6} + 1\right)}$$

$$= 1^{\frac{1}{6}} + 1 = 1 + 1 = 2$$

प्रश्न 11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

हल : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$

$$= \frac{a \times 1^2 + b \times 1 + c}{c \times 1^2 + b \times 1 + a}$$

$$= \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1$$

उत्तर

प्रश्न 12. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$.

हल : $\therefore \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x+2} = \dfrac{\frac{1}{-2} + \frac{1}{2}}{-2 + 2} = \dfrac{0}{0}$

(अनिर्धार्य मान)

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\left(\frac{2+x}{2x}\right)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)}{2x(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to -2} \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{-2} = -\frac{1}{4}$$

अत: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2} = -\dfrac{1}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{bx}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{bx} \times \dfrac{ax}{ax}\right)$ **[Note]**

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{ax} \times \dfrac{ax}{bx}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{\sin ax}{ax}\right)$

$= \dfrac{a}{b} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)$

$= \dfrac{a}{b} \lim\limits_{ax \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)$ $[\because x \to 0 \Rightarrow ax \to 0]$

$= \dfrac{a}{b} \times 1$ $\left(\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin \theta}{\theta} = 1\right)$

$= \dfrac{a}{b}$

अत: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$ **उत्तर**

प्रश्न 14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $(a, b \neq 0)$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax \cdot \dfrac{\sin ax}{ax}}{bx \cdot \dfrac{\sin bx}{bx}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)}{\left(\dfrac{\sin bx}{bx}\right)}$

$= \dfrac{a}{b} \left[\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{\sin ax}{ax}}{\dfrac{\sin bx}{bx}}\right]$

$= \dfrac{a}{b} \cdot \left[\dfrac{\lim\limits_{ax \to 0} \left(\dfrac{\sin ax}{ax}\right)}{\lim\limits_{bx \to 0} \left(\dfrac{\sin bx}{bx}\right)}\right]$

$(\because x \to 0 \Rightarrow ax \to 0$ तथा $bx \to 0)$

$= \dfrac{a}{b} \cdot \left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{a}{b}$

अत: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$ **उत्तर**

प्रश्न 15. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin (\pi - x)}{\pi (\pi - x)}$

हल : $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin (\pi - x)}{\pi (\pi - x)}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} \cdot \left(\dfrac{1}{\pi}\right)$ ($\pi - x = y$ रखने पर)

$(\because x \to \pi$ तब $y = \pi - x = \pi - \pi = 0)$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y}\right] = \dfrac{1}{\pi} \cdot 1$

अत: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin (\pi - x)}{\pi (\pi - x)} = \dfrac{1}{\pi}$ **उत्तर**

प्रश्न 16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x} = \dfrac{\cos 0}{\pi - 0} = \dfrac{1}{\pi}$ **उत्तर**

प्रश्न 17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2\cos^2 x - 1) - 1}{\cos x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 [\cos^2 x - 1]}{(\cos x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 (\cos x + 1)(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 (\cos x + 1)$

$= 2 \lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)$

$= 2 [1 + \cos 0] = 2 [1 + 1] = 2 \times 2 = 4$

अत: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} = 4$ **उत्तर**

प्रश्न 18. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax + x \cos x}{b \sin x}\right)$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax + x \cos x}{b \sin x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax}{b \sin x} + \dfrac{x \cos x}{b \sin x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ax}{b \sin x}\right) + \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x \cos x}{b \sin x}\right)$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) + \frac{1}{b} \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x\right)$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} + \frac{1}{b} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{b}\left(\frac{\cos 0}{1}\right)$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} = \frac{a+1}{b}$$

अत: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{ax + x\cos x}{b \sin x}\right) = \frac{a+1}{b}$ **उत्तर**

प्रश्न 19. $\lim_{x \to 0} x \sec x$

हल : $\lim_{x \to 0} x \sec x = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos x}$

$$= \frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

अत: $\lim_{x \to 0} x \sec x = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 20. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$; $(a, b, a + b \neq 0)$

हल : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ax \cdot \frac{\sin ax}{ax} + bx}{ax + bx \cdot \frac{\sin bx}{bx}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(a \cdot \frac{\sin ax}{ax} + b\right)}{x\left(a + b \cdot \frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0}\left(a \frac{\sin ax}{ax} + b\right)}{\lim_{x \to 0}\left(a + b \cdot \frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{ax \to 0}\left(a \frac{\sin ax}{ax} + b\right)}{\lim_{bx \to 0}\left(a + b \frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$(\because x \to 0 \Rightarrow ax \to 0$ तथा $x \to 0 \Rightarrow bx \to 0)$

$$= \frac{a\,.(1) + b}{a + b.(1)} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

अत: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 21. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

हल : $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \quad \left(x \to 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \to 0\right)$$

$$= \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \cos\frac{x}{2}} = \frac{0.1}{1} = 0$$

अत: $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x) = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 22. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

हल : माना कि $y = x - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad x = y + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = 2y + \pi = \pi + 2y$

और $\quad x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \to 0$

तब, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \to 0} \frac{\tan(\pi + 2y)}{y}$

$\left(\because 2x = \pi + 2y \text{ और } x - \frac{\pi}{2} = y\right)$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\tan 2y}{y} \qquad [\because \tan(\pi + 2y) = \tan 2y]$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin 2y}{y \cos 2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2y \cdot \left(\frac{\sin 2y}{2y}\right)}{y \cos 2y} = \lim_{y \to 0} 2 \cdot \frac{\frac{\sin 2y}{2y}}{\cos 2y}$$

$$= 2 \lim_{2y \to 0} \frac{\left(\frac{\sin 2y}{2y}\right)}{\cos 2y} \qquad (y \to 0 \Rightarrow 2y \to 0)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 2 \cdot \frac{1}{1} \qquad (\because \cos 0 = 1)$$

$$= 2$$

अत: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}} = 2$ **उत्तर**

प्रश्न 23. $\lim_{x \to 0} \mathbf{f(x)}$ **और** $\lim_{x \to 1} \mathbf{f(x)}$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ** $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2x + 3}, & \mathbf{x \le 0} \\ \mathbf{3(x+1)}, & \mathbf{x > 0} \end{cases}$

हल : $\because f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \le 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$

यदि $x > 0$ तो दक्षिण पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3(x+1) = 3$$

और यदि $x < 0$ तो वाम पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x + 3 = 3$$

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 3$$ **उत्तर**

यदि $x > 1$ तो दक्षिण पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} 3[(1+h)+1]$$

$$= 3[(1+0)+1] = 3 \times 2 = 6$$

यदि $x < 1$ तो वाम पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} 3[(1-h)+1]$$

$$= 3[(1+0)+1] = 3 \times 2 = 6$$

$$\because \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 6$$ **उत्तर**

प्रश्न 24. $\lim_{x \to 1} \mathbf{f(x)}$ **ज्ञात कीजिए,**

जहाँ $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 - 1}, & \mathbf{x \le 1} \\ \mathbf{-x^2 - 1}, & \mathbf{x > 1} \end{cases}$

हल : $\because f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

यदि $x > 1$ तो दक्षिण पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} (-x^2 - 1)$$

$$= -(1)^2 - 1 = -2$$

यदि $x < 1$ तो वाम पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1)$$

$$= (1)^2 - 1 = 0$$

$$\because \lim_{x \to 1^+} f(x) \ne \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

अत: $x = 1$ पर $\lim_{x \to 1} f(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 25. $\lim_{x \to 0} \mathbf{f(x)}$ **का मान प्राप्त कीजिए,**

जहाँ $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}}, & \mathbf{x \ne 0} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x = 0} \end{cases}$

हल : $\because f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

यदि $x > 0$ तो दक्षिण पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

$$= \frac{x}{x} \qquad (\because x > 0 \text{ के लिए} |x| = x)$$

$$= 1$$

और यदि $x<0$ तो वाम पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

$$= -\frac{x}{x} \quad (\because x<0 \text{ के लिए } |x| = -x)$$

$$= -1$$

$$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

अत: $x = 0$ पर $\lim_{x\to 0} f(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 26. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **ज्ञात कीजिए,**

जहाँ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

हल : $\because$ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

यदि $x>0$ तो दक्षिण पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$$

$$= \frac{x}{x} \quad (\because x>0 \text{ के लिए } |x| = x)$$

$$= 1$$

और यदि $x<0$ तो वाम पक्ष की सीमा

$$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

$$= \frac{x}{-x}$$

$$(\because x<0 \text{ के लिए } |x| = -x)$$

$$= -1$$

$$\because \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

अत: $x=0$ पर $\lim_{x\to 0} f(x)$ का कोई अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 27. $\lim_{x\to 5} f(x)$ **ज्ञात कीजिए,**

जहाँ $f(x) = |x| - 5$

हल : $\because$ $f(x) = |x| - 5$

दक्षिण पक्ष की सीमा :

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (|x| - 5)$$

$$= \lim_{h\to 0} \{(5+h) - 5\}$$

$(x = 5+h$ रखने पर)

$(\because x\to 5^+ \Rightarrow h\to 0)$

$$= \lim_{h\to 0} (h) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 5^+} f(x) = 0$$

और **वाम पक्ष की सीमा :**

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (|x| - 5)$$

$$= \lim_{h\to 0} \{(5-h) - 5\}$$

$$\left(\begin{array}{l} x = 5-h \text{ रखने पर,} \\ \because x\to 5^- \Rightarrow h\to 0 \end{array}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} (-h) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$$

$$\because \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^-} f(x) = 0$$

अत: $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ उत्तर

प्रश्न 28. मान लीजिए $$f(x) = \begin{cases} a+bx, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ b-ax, & x>1 \end{cases}$$

और यदि $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ **तो a और b के सम्भव मान क्या हैं?**

हल : दिया है कि

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

इसलिए $$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} [a + b(1-h)]$$

$$= \lim_{h\to 0} [b - a(1+h)] = 4$$

$$\Rightarrow a+b = b-a = 4$$

$$\Rightarrow a+b=4 \quad \text{तथा} \quad b-a=4$$

उक्त समीकरणों को हल करने पर, $a = 0$ तथा $b = 4$

उत्तर

प्रश्न 29. मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन** $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ **से परिभाषित है।** $\lim_{x\to a_1} f(x)$ **क्या है?**

किसी $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ **के लिए** $\lim_{x\to a} f(x)$ **का परिकलन कीजिए।**

हल : $\lim_{x \to a_1} f(x) = \lim_{x \to a_1} [(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....(x-a_n)]$

$= (a_1 - a_1)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3).....(a_1 - a_n)$

$= 0 \times (a_1 - a_2)(a_1 - a_3).....(a_1 - a_n) = 0$ **उत्तर**

जब $a \neq a_1, a_2, ..., a_n$ है तो

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....(x-a_n)]$

$= (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3).....(a-a_n)$ **उत्तर**

प्रश्न 30. यदि $\mathbf{f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ |x|-1, & x>0 \end{cases}}$ **तो a के किन मानों के लिए** $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x)}$ **का अस्तित्व है?**

हल : $f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ |x|-1, & x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$

यहाँ हम देखते हैं कि $x<0$ के लिए $f(x) = -x+1$ एक बहुपदीय फलन है, अत: स्पष्ट है कि **प्रत्येक a < 0 के लिए** $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x)}$ **अस्तित्व में है।**

इसी प्रकार $x > 0$ के लिए $f(x) = x-1$

एक बहुपदीय फलन है, अत: स्पष्ट है कि **प्रत्येक a < 0 के लिए** $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x)}$ **अस्तित्व में है।**

इससे स्पष्ट है कि **प्रत्येक** $\mathbf{a \neq 0}$ **के लिए** $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x)}$ **का अस्तित्व है।**

अब हम यह देखेंगे कि $\lim_{x \to 0} f(x)$ अस्तित्व में है अथवा नहीं। **[Note]**

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \{-(0-h)+1\} = \mathbf{1}$$

तथा $$\text{R.H.L.} = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \{(0+h)-1\} = \mathbf{-1}$$

हम देखते हैं कि $\lim_{x \to 0-} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$

इसलिए $\mathbf{\lim_{x \to 0} f(x)}$ **अस्तित्व में नहीं है।**

अत: $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x)}$**, प्रत्येक** $\mathbf{a \neq 0}$ **के लिए अस्तित्व में है।** **उत्तर**

प्रश्न 31. यदि फलन f (x), $\mathbf{\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi}$**, को सन्तुष्ट करता है तो** $\mathbf{\lim_{x \to 1} f(x)}$ **का मान प्राप्त कीजिए।**

हल : दिया है कि $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$ ...(1)

अब, $\lim_{x \to 1} f(x) - 2 = \lim_{x \to 1} [f(x)-2]$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{f(x)-2}{x^2-1}(x^2-1)\right]$$ **[Note]**

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} \times \lim_{x \to 1} (x^2-1)$$

$$= \pi \times (1^2 - 1)$$ [समीकरण (1) से]

$$= \pi \times (1-1) = \pi \times 0 = 0$$

इस प्रकार, $\lim_{x \to 1} f(x) - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 2$ **उत्तर**

प्रश्न 32. किन पूर्णांकों m और n के लिए $\mathbf{\lim_{x \to 0} f(x)}$ **और** $\mathbf{\lim_{x \to 1} f(x)}$ **दोनों का अस्तित्व है,**

यदि $\mathbf{f(x) = \begin{cases} mx^2+n, & x<0 \\ nx+m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3+m, & x>1 \end{cases}}$

हल : दिया है कि $\lim_{x \to 0} f(x)$ तथा $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है।

$\therefore \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x)$

तथा $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(0-h) = \lim_{h \to 0} f(0+h)$

तथा $\lim_{h \to 0} f(1-h) = \lim_{h \to 0} f(1+h)$

$\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} [m(-h)^2 + n] = \lim_{h \to 0} [n(0+h)+m]$

तथा $\lim_{h \to 0} [n(1-h)+m] = \lim_{h \to 0} [n(1+h)^3+m]$

$\Rightarrow \quad n = m \quad$ तथा $\quad n + m = n + m \quad \Rightarrow \quad m = n$

अत: m तथा n दो पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $m = n$ **उत्तर**

अब, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (nx + m) = n + m$

तथा $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (nx^3 + m) = n + m$

$\therefore \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = d\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = m + n$

अत: m तथा n के सभी पूर्णांक मान के लिए $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ अस्तित्व में हैं। **उत्तर**

प्रश्नावली | 12.2

प्रश्न 1. x = 10 पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = f(x) = x^2 - 2$

तब, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 2) = \dfrac{d}{dx}x^2 - \dfrac{d}{dx}2$

$= 2x^{2-1} - 0 = 2x$

उक्त में $x = 10$ रखने पर,

$y = f(x)$ का अवकलज

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=10} = 2 \times 10 = 20$ **उत्तर**

प्रश्न 2. x = 100 पर 99x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = f(x) = 99x$

तब $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(99x) = 99\dfrac{d}{dx}x$

$= 99 \times 1 = 99$

उक्त में $x = 100$ रखने पर,

$y = f(x)$ का अवकलज $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=100} = 99$ **उत्तर**

प्रश्न 3. x = 1 पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = f(x) = x$

तब $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}x = 1$

उक्त में $x = 1$ रखने पर,

$y = f(x)$ का अवकलज $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 4. प्रथम सिद्धान्त से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 27$ **(ii)** $(x - 1)(x - 2)$

(iii) $\dfrac{1}{x^2}$ **(iv)** $\dfrac{x + 1}{x - 1}$

हल : (i) $\because$ प्रथम सिद्धान्त से किसी फलन $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

अत: स्पष्ट है कि उक्त सूत्र को लगाने के लिए हमें $f(x)$ तथा $f(x+h)$ ज्ञात होने चाहिए।

माना दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 27$

$\therefore$ x के स्थान पर $x + h$ रखने पर,

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 27$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[(x+h)^3 - 27] - (x^3 - 27)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x^2 + x(x+h)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}[(x+h)^2 + x^2 + x(x+h)]$$

$$= (x+0)^2 + x^2 + x(x+0)$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

अत: $\dfrac{d}{dx}(x^3 - 27) = 3x^2$ **उत्तर**

● **(ii)** माना $y = f(x) = (x-1)(x-2)$

$\therefore \quad y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

तब $y = f(x)$ का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[(x+h)^2 - 3(x+h) + 2] - (x^2 - 3x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[x^2 + 2hx + h^2 - 3x - 3h + 2] - (x^2 - 3x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[(x^2 - 3x + 2) + h(h + 2x - 3)] - (x^2 - 3x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(h + 2x - 3) = 0 + 2x - 3$$

$$= 2x - 3$$

अत: $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 3$ **उत्तर**

● **(iii)** माना $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$

तब $y = f(x)$ का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 (x+h)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2hx - h^2}{x^2 (x+h)^2 . h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2x - h)}{x^2 (x+h)^2}$$

$$= \frac{-2x - 0}{x^2 (x+0)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

अत: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$ **उत्तर**

● **(iv)** माना $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

तब $y = f(x)$ का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(x+h)+1}{(x+h)-1} - \frac{x+1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x+1+h}{x-1+h} - \frac{x+1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{(x+1)(x-1) + h(x-1) - (x+1)(x-1) - (x+1)h}{(x-1+h)(x-1)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h(x-1) - h(x+1)}{(x+h-1)(x-1)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \left[\frac{(x-1) - (x+1)}{(x+h-1)(x-1)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{-2}{(x+0-1)(x-1)} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

अत: $\frac{x+1}{x-1}$ का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} \text{ या } \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{(x-1)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. फलन

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1}$$

के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\mathbf{f'(1) = 100 f'(0)}$$

हल : फलन

$$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

तब $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1\right]$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{d}{dx} x^{100} + \frac{1}{99} \cdot \frac{d}{dx} x^{99} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 1$$

$$= \frac{1}{100} . 100\, x^{99} + \frac{1}{99}\, 99\, x^{98} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot 2\,x + 1 + 0$$

$\Rightarrow$ $f'(x) = x^{99} + x^{98} + x^{97} + \ldots + x + 1$

x के स्थान पर क्रमश: 1 तथा 0 रखने पर,

$f'(1) = 1^{99} + 1^{98} + \ldots\ldots + 1 + 1$

$= 1 + 1 + 1 \ldots + 100$ पद $= 100$

तथा $f'(0) = 1$

$\therefore$ $f'(1) = 100 = 100 \times 1$

अथवा $f'(1) = 100\, f'(0)$ **उत्तर**

प्रश्न 6. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $\mathbf{x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^n) + \frac{d}{dx}(ax^{n-1})$$

$$+\frac{d}{dx}(a^2x^{n-2})+\ldots+\frac{d}{dx}(a^{n-1}x)+\frac{d}{dx}(a^n)$$

$$=\frac{d}{dx}(x^n)+a\frac{d}{dx}(x^{n-1})+a^2\frac{d}{dx}(x^{n-2})+\ldots+a^{n-1}\frac{d}{dx}(x)+a^n\frac{d}{dx}(1)$$

$$=nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}+a^2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}.1+a^n.0$$

$$=nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}+a^2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$$

अत: दिए हुए फलन का अवकलज

$$=nx^{n-1}+a(n-1)x^{n-2}+a^2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. किन्हीं अचरों a और b के लिए,
(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$
(iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$
के अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : **(i)** माना $y=(x-a)(x-b)$

$$=x^2-(a+b)x+ab$$

तब दिए हुए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{x^2-(a+b)x+ab\}$$

$$=\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(a+b)x+\frac{d}{dx}(ab)$$

$$=2x^{2-1}-(a+b)\frac{d}{dx}(x^1)+0$$

($\because$ a तथा b अचर हैं।)

$$=2x-(a+b).1.x^{1-1}$$

$$=2x-(a+b).1.1$$

$$=2x-(a+b)=2x-a-b$$

अत: दिए हुए फलन $(x-a)(x-b)$ का अवकलज

$$=2x-a-b$$ **उत्तर**

● **(ii)** माना $y=(ax^2+b)^2$

$$=(ax^2)^2+2.ax^2.b+(b)^2$$

$$=a^2x^4+2abx^2+b^2$$

तब दिए हुए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(a^2x^4+2abx^2+b^2)$$

$$=\frac{d}{dx}(a^2x^4)+\frac{d}{dx}(2abx^2)+\frac{d}{dx}(b^2)$$

$$=a^2\frac{d}{dx}(x^4)+2ab\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(b^2)$$

($\because$ a तथा b अचर हैं।)

$$=a^2.4x^{4-1}+2ab.2x^{2-1}+0$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(\text{अचर})=0\right]$$

$$=4a^2x^3+4ab\,x=4ax(ax^2+b)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$=4a^2x^3+4abx$ या $4ax(ax^2+b)$ **उत्तर**

● **(iii)** माना $y=\dfrac{x-a}{x-b}$

$$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\right)=\frac{\text{हर}\times\frac{d}{dx}(\text{अंश})-\text{अंश}\times\frac{d}{dx}(\text{हर})}{(\text{हर})^2}$$

$\therefore$ दिए गए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-b)\frac{d}{dx}(x-a)-(x-a)\frac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$

$$=\frac{[(x-b)\times(1-0)-(x-a)\times(1-0)]}{(x-b)^2}$$

$$=\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2}=\frac{(a-b)}{(x-b)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $=\dfrac{(a-b)}{(x-b)^2}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. किसी अचर a के लिए $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

तब दिए गए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{हर}\times\frac{d}{dx}(\text{अंश})-\text{अंश}\times\frac{d}{dx}(\text{हर})}{(\text{हर})^2}$$

$$=\frac{\left[(x-a)\frac{d}{dx}(x^n-a^n)-(x^n-a^n)\frac{d}{dx}(x-a)\right]}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{(x-a).(nx^{n-1}-0)-(x^n-a^n)(1-0)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{n(x-a)x^{n-1}-x^n+a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n-nax^{n-1}-x^n+a^n}{(x-a)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{nx^n-nax^{n-1}-x^n+a^n}{(x-a)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\mathbf{2x - \frac{3}{4}}$

(ii) $\mathbf{(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)}$

(iii) $\mathbf{x^{-3}(5 + 3x)}$

(iv) $\mathbf{x^5(3 - 6x^{-9})}$

(v) $\mathbf{x^{-4}(3 - 4x^{-5})}$

(vi) $\mathbf{\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}}$

हल : (i) दिया गया फलन $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$

$\therefore$ दिए गए फलन का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(2x - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}\right) = 2\frac{d}{dx}(x) - 0$$

($\because$ अचर का अवकलज शून्य होता है।)

$$= 2(1) = 2$$

अत: दिए गए फलन $\left(2x - \frac{3}{4}\right)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2$$ **उत्तर**

● **(ii)** माना $y = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

$$\because \frac{d}{dx}\left(f_1(x) \times f_2(x)\right) = f_1(x)\frac{d}{dx}f_2(x) + f_2(x)\frac{d}{dx}f_1(x)$$

तब, $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)]$$

$$= (5x^3 + 3x - 1)\frac{d}{dx}(x - 1) + (x - 1)\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1)$$

$$= (5x^3 + 3x - 1) \times (1 - 0) + (x - 1)\left[5\frac{d}{dx}(x)^3 + 3\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1)\right]$$

$$= 5x^3 + 3x - 1 + (x - 1)[5.3x^2 + 3(1) - 0]$$

$$= 5x^3 + 3x - 1 + (x - 1)[15x^2 + 3]$$

$$= 5x^3 + 3x - 1 + 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3$$

$$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$$ **उत्तर**

● **(iii)** माना $y = x^{-3}(5 + 3x)$

$$= 5x^{-3} + 3x^{-2}$$

तब, $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^{-3} + 3x^{-2})$$

$$= \frac{d}{dx}(5x^{-3}) + \frac{d}{dx}(3x^{-2})$$

$$= 5\frac{d}{dx}(x^{-3}) + 3\frac{d}{dx}(x^{-2})$$

$$= 5 \times (-3)x^{-3-1} + 3 \times (-2)x^{-2-1}$$

$$= -15x^{-4} - 6x^{-3} = -\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^3}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^3} \quad \text{या} \quad -\frac{3}{x^3}\left(2 + \frac{5}{x}\right)$$

$$\text{या} \quad -\frac{3}{x^4}(5 + 2x)$$ **उत्तर**

● **(iv)** माना $y = x^5(3 - 6x^{-9})$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f_1(x).f_2(x)$$

जहाँ $f_1(x) = x^5$ तथा $f_2(x) = 3 - 6x^{-9}$

$$= f_1(x) \times \frac{d}{dx}f_2(x) + f_2(x).\frac{d}{dx}f_1(x)$$

$$= x^5 \times \frac{d}{dx}(3 - 6x^{-9}) + (3 - 6x^{-9})\frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= x^5 \times [0 - 6(-9)x^{-9-1}] + (3 - 6x^{-9}) \times 5x^4$$

$$= x^5 \times 54x^{-10} + 15x^4 - 30x^{-5}$$

$$= 54x^{-5} - 30x^{-5} + 15x^4$$

$$= 24x^{-5} + 15x^4 = \frac{24}{x^5} + 15x^4$$

अत: दिए गए फलन $x^5(3 - 6x^{-9})$ का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24}{x^5} + 15x^4$$ **उत्तर**

वैकल्पिक विधि :

दिया गया फलन $f(x) = x^5 (3 - 6x^{-9})$

$= 3x^5 - 6x^{5-9} = 3x^5 - 6x^{-4}$

तब, माना $y = f(x) = 3x^5 - 6x^{-4}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(3x^5 - 6x^{-4})$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^5) - \frac{d}{dx}(6x^{-4})$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) - 6\frac{d}{dx}(x^{-4})$$

$$= 3 \times 5x^4 - 6 \times (-4)\, x^{-5}$$

$$= 15x^4 + 24x^{-5}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 15x^4 + \frac{24}{x^5}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $\frac{dy}{dx} = 15x^4 + \frac{24}{x^5}$ **उत्तर**

- **(v)** माना $y = x^{-4}(3 - 4x^{-5})$

$\therefore \quad y = 3x^{-4} - 4x^{-5-4}$ (गुणा करने पर)

या $\quad y = 3x^{-4} - 4x^{-9}$

तब, $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^{-4} - 4x^{-9})$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^{-4}) - \frac{d}{dx}(4x^{-9})$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^{-4}) - 4\frac{d}{dx}(x^{-9})$$

$$= 3 \times (-4x^{-4-1}) - 4 \times (-9x^{-9-1})$$

$$= -12x^{-5} + 36x^{-10}$$

$$= -\frac{12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}} = -\frac{12}{x^5}\left(1 - \frac{3}{x^5}\right)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^5}\left(1 - \frac{3}{x^5}\right) = -\frac{12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$$ **उत्तर**

- **(vi)** माना $y = \frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

तब, $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)$$

$$= \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2) - 2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

(भागफल के अवकलन सूत्र से)

$$= \frac{(x+1) \times 0 - 2 \times (1+0)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1).(2x) - x^2(3 \times 1 - 0)}{(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. प्रथम सिद्धान्त से cos x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $f(x) = \cos x$,

तब $\quad f(x+h) = \cos(x+h)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2} \cdot \sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$\left[\because \cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[-\sin\left\{x + \frac{h}{2}\right\} \times \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]$$

$$= -1 \times \lim_{h \to 0} \sin\left\{x + \frac{h}{2}\right\} \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin x \times 1 = -\sin x$$

अत: $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

प्रश्न 11. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) sin x cos x

(ii) sec x

(iii) 5 sec x + 4 cos x

(iv) cosec x

(v) 3 cot x + 5 cosec x

(vi) 5 sin x − 6 cos x + 7

(vii) 2 tan x − 7 sec x

हल : (i) माना $y = \sin x \cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \,.\, \cos x)$$
$$= \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos 2x \qquad (\because \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x)$$

उत्तर

अत: दिए गए फलन का अवकलज = $\cos 2x$

● **(ii)** दिया गया फलन $f(x) = \sec x$

तब $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x . \frac{d}{dx}(1) - 1 . \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \,.\, (0) - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$
$$= \tan x \times \sec x$$
$$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

अत: दिए हुए फलन का अवकलज = $\sec x . \tan x$

उत्तर

● **(iii)** दिया गया फलन

$$f(x) = 5 \sec x + 4 \cos x$$

तब, $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(5 \sec x + 4 \cos x)$$
$$= \frac{d}{dx}(5 \sec x) + \frac{d}{dx}(4 \cos x)$$
$$= 5 \frac{d}{dx}(\sec x) + 4 \frac{d}{dx} \cos x$$
$$= 5(\sec x \tan x) + 4(-\sin x)$$
$$= 5 \sec x \tan x - 4 \sin x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= 5 \sec x \tan x - 4 \sin x$$ **उत्तर**

● **(iv)** दिया गया फलन $f(x) = \text{cosec } x$

तब, $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \text{cosec } x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$
$$= \frac{(\sin x) \times \frac{d}{dx}(1) - 1 . \frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{(\sin x \times 0) - (1 \times \cos x)}{(\sin x)^2}$$
$$= -\frac{\cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}$$
$$= -\cot x \times \text{cosec } x$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x . \cot x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -\text{cosec } x \cot x.$$ **उत्तर**

● **(v)** दिया गया फलन

$$f(x) = 3 \cot x + 5 \text{ cosec } x$$

तब $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[3 \cot x + 5 \text{ cosec } x]$$
$$= \frac{d}{dx}(3 \cot x) + \frac{d}{dx}(5 \text{ cosec } x)$$
$$= 3 \frac{d}{dx}(\cot x) + 5 \frac{d}{dx} \text{cosec } x$$
$$= 3(-\text{cosec}^2 x) + 5(-\text{cosec } x . \cot x)$$
$$= -3 \text{ cosec}^2 x - 5 \text{ cosec } x \cot x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -3 \text{ cosec}^2 x - 5 \text{ cosec } x \cot x$$ **उत्तर**

● **(vi)** दिया गया फलन

$$f(x) = 5 \sin x - 6 \cos x + 7$$

तब, $$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(5 \sin x - 6 \cos x + 7)$$
$$= \frac{d}{dx}(5 \sin x) - \frac{d}{dx}(6 \cos x) + \frac{d}{dx}(7)$$
$$= 5 \frac{d}{dx}(\sin x) - 6 \frac{d}{dx}(\cos x) + 0$$
$$= 5 \cos x - 6(-\sin x)$$
$$= 5 \cos x + 6 \sin x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= 5 \cos x + 6 \sin x$$ **उत्तर**

● **(vii)** दिया गया फलन $f(x) = 2\tan x - 7\sec x$

तब, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(2\tan x - 7\sec x)$

$$= \frac{d}{dx}(2\tan x) - \frac{d}{dx}(7\sec x)$$

$$= 2\frac{d}{dx}(\tan x) - 7\frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2\sec^2 x - 7\sec x\tan x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$= 2\sec^2 x - 7\sec x\tan x$ **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. प्रथम सिद्धान्त से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $-x$ **(ii) $(-x)^{-1}$**

(iii) $\sin(x+1)$ **(iv) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$**

हल : (i) दिया गया फलन $f(x) = -x$

तब $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-\{-(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-x-h+x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(-1)$$

$$= -1$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= -1$ **उत्तर**

● **(ii)** दिया गया फलन $f(x) = (-x)^{-1}$

तब $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{-(x+h)\}^{-1}-(-x)^{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{x+h}-\left(-\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-x+x+h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x(x+0)} = \frac{1}{x^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \frac{1}{x^2}$ **उत्तर**

● **(iii)** दिया गया फलन $f(x) = \sin(x+1)$

तब $f(x)$ का अवकलज $\frac{d}{dx}f(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+1+h)-\sin(x+1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2\cos\frac{(x+1+h)+(x+1)}{2}\sin\frac{(x+1+h)-(x+1)}{2}\right]}{h}$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+1+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\cos\left(x+1+\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin h/2}{h/2}\right)$$

$$\left(\because h\to 0 \Rightarrow \frac{h}{2}\to 0\right)$$

$$= \cos(x+1+0)\times 1 = \cos(x+1)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \cos(x+1)$ **उत्तर**

● **(iv)** दिया गया फलन $f(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

तब $f(x)$ का अवकलज $\frac{d}{dx}f(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{8}+h\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2 \sin \frac{\left(x - \frac{\pi}{8} + h\right) + \left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{2} \sin \frac{\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \left(x - \frac{\pi}{8} + h\right)}{2}\right]}{h}$$

$$\left[\because \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} . \sin \frac{D-C}{2}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right) \sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right) . \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{\frac{h}{2} \to 0} - \sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right) . \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

$$= - \sin\left(x - \frac{\pi}{8} + 0\right) \times 1 = - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ **उत्तर**

- **निर्देश : निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए। (यह समझा जाए कि *a, b, c, d, p, q, r* और *s* निश्चित शून्येतर अचर हैं और *m* तथा *n* पूर्णांक हैं।) :**

प्रश्न 2. (x + a)

हल : दिया गया फलन $f(x) = (x + a)$

तब $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x + a)$$

$$= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(a)$$

$$= 1 + 0 \qquad (\because a \text{ अचर है})$$

$$= 1$$

उत्तर

प्रश्न 3. $\mathbf{(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)}$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = (px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$$

तब $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)\right]$

$$= \frac{d}{dx}\left[pr + psx + \frac{qr}{x} + qs\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(pr) + \frac{d}{dx}(psx) + \frac{d}{dx}\left(\frac{qr}{x}\right) + \frac{d}{dx}(qs)$$

$$= 0 + ps \frac{d}{dx}(x) + qr \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0$$

($\because$ p, q, r, s अचर हैं।)

$$= ps.(1) + qr . \frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$= ps + qr(-1x^{-1-1})$$

$$= ps + qr(-x^{-2})$$

$$= ps - \frac{qr}{x^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= ps - \frac{qr}{x^2}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $\mathbf{(ax + b)(cx + d)^2}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = (ax + b)(cx + d)^2$

तब $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[(ax + b)(cx + d)^2]$

$$= \frac{d}{dx}[(ax + b)(c^2x^2 + 2cdx + d^2)]$$

$$= (ax + b)\frac{d}{dx}(c^2x^2 + 2cdx + d^2) + (c^2x^2 + 2cdx + d^2) \cdot \frac{d}{dx}(ax + b)$$

$$= (ax + b)[c^2.(2x) + 2cd(1) + 0] + (c^2x^2 + 2cdx + d^2).(a.1 + 0)$$

$$= (ax + b)(2c^2x + 2cd) + (c^2x^2 + 2cdx + d^2)a$$

$$= 2c(ax + b)(cx + d) + a(cx + d)^2$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= 2c(ax + b)(cx + d) + a(cx + d)^2$$

उत्तर

प्रश्न 5. $\mathbf{\frac{ax + b}{cx + d}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

तब, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$

$$= \frac{\left[(cx+d)\times\frac{d}{dx}(ax+b) - (ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)\right]}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{[(cx+d)(a.1+0) - (ax+b)(c.1+0)]}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $\dfrac{\mathbf{1+\frac{1}{x}}}{\mathbf{1-\frac{1}{x}}}$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}$$

तब, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$= \frac{\left[(x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\cdot\frac{d}{dx}(x-1)\right]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{[(x-1)(1+0) - (x+1)(1-0)]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= -\frac{2}{(x-1)^2}$, $x \neq 0, 1$ **उत्तर**

प्रश्न 7. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$

तब $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\left[(ax^2+bx+c)\frac{d}{dx}(1) - 1\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\right]}{(ax^2+bx+c)^2}$

$$= \frac{(ax^2+bx+c)\times 0 - 1(2ax+b.1+0)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$= -\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. $\dfrac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{px^2+qx+r}}$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}$$

तब $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{px^2+qx+r}\right)$

$$= \frac{\left[(px^2+qx+r).\frac{d}{dx}(ax+b) - (ax+b)\frac{d}{dx}(px^2+qx+r)\right]}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{[(px^2+qx+r)(a.1+0) - (ax+b)(p(2x)+q(1)+0)]}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{[a(px^2+qx+r) - (ax+b)(2px+q)]}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{(apx^2+aqx+ar-2apx^2-aqx-2pbx-bq)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2-2pbx+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{-apx^2-2pbx+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\dfrac{\mathbf{px^2 + qx + r}}{\mathbf{ax + b}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{px^2 + qx + r}{ax + b}$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{px^2 + qx + r}{ax + b}\right)$

$$= \frac{\left[(ax+b)\dfrac{d}{dx}(px^2 + qx + r) - (px^2 + qx + r)\dfrac{d}{dx}(ax+b)\right]}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{[(ax+b)(p(2x) + q(1) + 0) - (px^2 + qx + r)(a.1 + 0)]}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(2px + q) - (px^2 + qx + r).a}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{2apx^2 + aqx + 2pbx + bq - apx^2 - aqx - ar}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{apx^2 + 2pbx + bq - ar}{(ax+b)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{apx^2 + 2\,pbx + bq - ar}{(ax+b)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{x^4}} - \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{x^2}} + \mathbf{\cos x}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^2} + \cos x$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^2} + \cos x\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^4}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{x^2}\right) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= a\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) - b\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) + (-\sin x)$$

$$= a\frac{d}{dx}(x^{-4}) - b\frac{d}{dx}(x^{-2}) - \sin x$$

$$= a.(-4x^{-4-1}) - b.(-2x^{-2-1}) - \sin x$$

$$= -4ax^{-5} + 2bx^{-3} - \sin x$$

$$= -\frac{4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -\frac{4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x$$ **उत्तर**

प्रश्न 11. $\mathbf{4\sqrt{x} - 2}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = (4\sqrt{x} - 2)$
$= 4x^{1/2} - 2$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}(4x^{1/2} - 2)$

$$= \frac{d}{dx}(4x^{1/2}) - \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 4\frac{d}{dx}(x^{1/2}) - 0$$

$$= 4.\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right) = 4 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $\mathbf{(ax + b)^n}$

हल : माना $y = ax + b$

तब दिया हुआ फलन $(ax+b)^n = y^n$

तब y^n का x के सापेक्ष अवकलज $= \dfrac{d}{dx}(y^n)$

$$= \frac{d}{dx}(y^n).\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}(y)$$

$$= n(ax+b)^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$(\because y = ax + b)$

$$= n(ax+b)^{n-1}.(a.1+0)$$

$$= na(ax+b)^{n-1}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= na(ax+b)^{n-1}$ **उत्तर**

प्रश्न 13. $\mathbf{(ax + b)^n \ (cx + d)^m}$

हल : माना $y = ax + b$

तब, $(ax+b)^n = y^n$

$\therefore$ $(ax+b)^n$ का अवकलज $= \dfrac{d}{dx} y^n$

$$= \frac{d}{dx} y^n . \frac{dy}{dx}$$

$$= ny^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}(y)$$

$$= n(ax+b)^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b) \quad (\because y = ax + b)$$

$= n\,(ax+b)^{n-1}\,.\,(a.1+0) = na\,(ax+b)^{n-1}$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dx}(ax+b)^n = na\,(ax+b)^{n-1} \qquad \ldots(1)$

इसी प्रकार,

$\dfrac{d}{dx}(cx+d)^m = mc\,(cx+d)^{m-1} \qquad \ldots(2)$

दिया गया फलन

$f(x) = (ax+b)^n\ (cx+d)^m$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}[(ax+b)^n\ (cx+d)^m]$

$= (ax+b)^n \cdot \dfrac{d}{dx}(cx+d)^m + (cx+d)^m \cdot \dfrac{d}{dx}(ax+b)^n$

$= (ax+b)^n\,.\,mc\,(cx+d)^{m-1} + (cx+d)^m\,.\,na\,(ax+b)^{n-1}$

[समीकरण (1) व (2) से]

$= (ax+b)^{n-1}\,(cx+d)^{m-1}\,[(ax+b)\,mc + (cx+d)\,na]$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$= (ax+b)^{n-1}\,(cx+d)^{m-1}\,[(ax+b)\,mc + (cx+d)\,na]$ **उत्तर**

प्रश्न 14. $\sin(x+a)$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \sin(x+a)$

माना $y = x+a$

तब, दिया गया फलन $f(x) = \sin y$

तब, $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}(\sin y)$

$= \dfrac{d}{dx}(\sin y)\,.\,\dfrac{dy}{dx}$

$= \cos y\,.\,\dfrac{d}{dx}y$

$= \cos(x+a)\,\dfrac{d}{dx}(x+a)$

$= \cos(x+a)\,.\,(1+0)$

$= \cos(x+a)$

अत: दिए गए फलन $\sin(x+a)$ का अवकलज

$= \cos(x+a)$ **उत्तर**

प्रश्न 15. $\operatorname{cosec} x\,.\,\cot x$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \operatorname{cosec} x . \cot x$

तब $\dfrac{d}{dx}f\,x = \dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} x .\cot x$

$= \operatorname{cosec} x\,\dfrac{d}{dx}\cot x + \cot x\,\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} x$

$= \operatorname{cosec} x\,.\,(-\operatorname{cosec}^2 x) + \cot x\,(-\operatorname{cosec} x\,.\,\cot x)$

$= -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x.\cot^2 x$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$= -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x$ **उत्तर**

प्रश्न 16. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

तब $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$= \frac{\left[(1+\sin x)\dfrac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\,\dfrac{d}{dx}(1+\sin x)\right]}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{[(1+\sin x)\,.\,(-\sin x) - \cos x\,.(0+\cos x)]}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-1}{1+\sin x}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= -\dfrac{1}{1+\sin x}$

उत्तर

प्रश्न 17. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

तब $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$

$$= \frac{\left[(\sin x - \cos x)\dfrac{d}{dx}(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)\dfrac{d}{dx}(\sin x - \cos x)\right]}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{[(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x - (-\sin x))]}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x) - (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(1 - 2\sin x\cos x) - (1 + 2\sin x\cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-1 + 2\sin x\cos x - 1 - 2\sin x\cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

उत्तर

प्रश्न 18. $\dfrac{\mathbf{\sec x - 1}}{\mathbf{\sec x + 1}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx} \dfrac{(\sec x - 1)}{(\sec x + 1)}$

$$= \frac{\left[(\sec x + 1)\frac{d}{dx}(\sec x - 1) - (\sec x - 1)\frac{d}{dx}(\sec x + 1)\right]}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{[(\sec x + 1)(\sec x \tan x - 0) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x + 0)]}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{[\sec x \tan x(\sec x + 1) - \sec x \tan x(\sec x - 1)]}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{\sec x \tan x(\sec x + 1 - \sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \dfrac{2\sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$

उत्तर

प्रश्न 19. $\mathbf{\sin^n x}$

हल : दिया गया फलन $= \sin^n x$

माना कि $y = \sin x$ तब $\sin^n x = y^n$

तब $\dfrac{d}{dx}\sin^n x = \dfrac{d}{dx} y^n$

$$= \frac{d}{dy} y^n \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(y)$$

$$= n \sin^{n-1} x \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= n \sin^{n-1} x \, . \cos x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= n \sin^{n-1} x . \cos x$$

उत्तर

प्रश्न 20. $\dfrac{\mathbf{a + b \sin x}}{\mathbf{c + d \cos x}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{a + b\sin x}{c + d\cos x}$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a + b\sin x}{c + d\cos x}\right)$

$$= \frac{\left[(c + d\cos x)\frac{d}{dx}(a + b\sin x) - (a + b\sin x)\frac{d}{dx}(c + d\cos x)\right]}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{[(c + d\cos x)(0 + b\cos x) - (a + b\sin x)(0 + d.(-\sin x))]}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{[(c + d\cos x)\, b\cos x + d\sin x(a + b\sin x)]}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{(bc\cos x + bd\cos^2 x + ad\sin x + bd\sin^2 x)}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{[(bc\cos x + ad\sin x) + bd(\sin^2 x + \cos^2 x)]}{(c + d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd}{(c + d\cos x)^2}$$

$$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd}{(c + d\cos x)^2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 21. $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$

हल : माना कि $y = \dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$

तब $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x+a)}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\left[\cos x \cdot \dfrac{d}{dx}\sin(x+a) - \sin(x+a)\dfrac{d}{dx}\cos x\right]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\left[\cos x \cdot \dfrac{d}{dx}\sin(x+a) \cdot \dfrac{d}{dx}(x+a) - \sin(x+a)\cdot\dfrac{d}{dx}\cos x\right]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{[\cos x.\cos(x+a).(1+0) - \sin(x+a)(-\sin x)]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{[\cos(x+a).\cos x + \sin(x+a).\sin x]}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos(x+a-x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos a}{\cos^2 x}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज $= \dfrac{\cos a}{\cos^2 x}$ **उत्तर**

प्रश्न 22. $x^4\ (5\sin x - 3\cos x)$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = x^4.(5\sin x - 3\cos x)$$

तब $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4(5\sin x - 3\cos x)$$

$$= x^4\frac{d}{dx}(5\sin x - 3\cos x) + (5\sin x - 3\cos x)\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= x^4[5\cos x - 3(-\sin x)] + (5\sin x - 3\cos x)4x^3$$

$$= x^4(5\cos x + 3\sin x) + 4x^3(5\sin x - 3\cos x)$$

$$= 5x^4\cos x + 3x^4\sin x + 20x^3\sin x - 12x^3\cos x$$

$$= x^3(5x\cos x + 3x\sin x + 20\sin x - 12\cos x)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= x^3(5x\cos x + 3x\sin x + 20\sin x - 12\cos x)$$ **उत्तर**

प्रश्न 23. $(x^2 + 1)\cos x$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = (x^2+1)\cos x$$

तब $f(x)$ का अवकलज

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[(x^2+1)\cos x]$$

$$= (x^2+1)\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= (x^2+1)(-\sin x) + \cos x(2x+0)$$

$$= -(x^2+1)\sin x + 2x\cos x$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -x^2\sin x + \sin x + 2x\cos x$$ **उत्तर**

प्रश्न 24. $(ax^2 + \sin x)(p + q\cos x)$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = (ax^2 + \sin x)(p + q\cos x)$$

तब, $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)]$$

$$= (ax^2+\sin x)\frac{d}{dx}(p+q\cos x) + (p+q\cos x)\frac{d}{dx}(ax^2+\sin x)$$

$$= (ax^2+\sin x)[0 + q.(-\sin x)] + (p+q\cos x)(a.2x+\cos x)$$

$$= -q\sin x(ax^2+\sin x) + (p+q\cos x)(2ax+\cos x)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -q\sin x(ax^2+\sin x) + (p+q\cos x)(2ax+\cos x)$$ **उत्तर**

प्रश्न 25. $(x + \cos x)(x - \tan x)$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = (x+\cos x)(x-\tan x)$$

तब, $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[(x+\cos x)(x-\tan x)]$$

$$= (x+\cos x)\frac{d}{dx}(x-\tan x) + (x-\tan x)\frac{d}{dx}(x+\cos x)$$

$$= (x+\cos x)(1-\sec^2 x) + (x-\tan x)(1-\sin x)$$

$$= (x+\cos x)(-\tan^2 x) + (x-\tan x)(1-\sin x)$$

$$= -\tan^2 x\,(x + \cos x) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= -\tan^2 x\,(x + \cos x) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$$ उत्तर

प्रश्न 26. $\mathbf{\dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}\right)$

$$= \frac{\left[(3x + 7\cos x)\dfrac{d}{dx}(4x + 5\sin x) - (4x + 5\sin x)\dfrac{d}{dx}(3x + 7\cos x)\right]}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{[(3x + 7\cos x)(4 + 5\cos x) - (4x + 5\sin x)(3 - 7\sin x)]}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{[(12x + 28\cos x + 15x\cos x + 35\cos^2 x) - (12x + 15\sin x - 28x\sin x - 35\sin^2 x)]}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(12x + 28\cos x + 15x\cos x + 35\cos^2 x - 12x - 15\sin x + 28x\sin x + 35\sin^2 x)}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{[28\cos x - 15\sin x + 15x\cos x + 28x\sin x + 35(\cos^2 x + \sin^2 x)]}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(28\cos x - 15\sin x + 15x\cos x + 28x\sin x + 35)}{(3x + 7\cos x)^2}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{(28\cos x - 15\sin x + 15x\cos x + 28x\sin x + 35)}{(3x + 7\cos x)^2}$$ उत्तर

प्रश्न 27. $\mathbf{\dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}}$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = \frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^2}{\sin x}$$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \cos\dfrac{\pi}{4} \bullet \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)$

$\left(\because \cos\dfrac{\pi}{4}\right.$ अचर है।)

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\left[\sin x\dfrac{d}{dx}[x^2] - x^2\dfrac{d}{dx}(\sin x)\right]}{\sin^2 x}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(\sin x.2x - x^2.\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x\,[2\sin x - x\cos x]}{\sin^2 x}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{x\cos\frac{\pi}{4}\,[2\sin x - x\cos x]}{\sin^2 x}$$ उत्तर

प्रश्न 28. $\mathbf{\dfrac{x}{1 + \tan x}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{x}{1 + \tan x}$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1 + \tan x}\right)$

$$= \frac{\left[(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(x) - x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)\right]}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x).(1) - x\,[0 + \sec^2 x]}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{1 + \tan x - x\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{1 + \tan x - x\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$ उत्तर

प्रश्न 29. $\mathbf{(x + \sec x)(x - \tan x)}$

हल : दिया गया फलन

$$f(x) = (x + \sec x)(x - \tan x)$$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}[(x + \sec x)(x - \tan x)]$

$$= (x + \sec x) \frac{d}{dx}(x - \tan x) + (x - \tan x)\frac{d}{dx}(x + \sec x)$$

$$= (x + \sec x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 + \sec x \tan x)$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= (x + \sec x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 + \sec x \tan x)$$

उत्तर

प्रश्न 30. $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{\sin^n x}}$

हल : दिया गया फलन $f(x) = \dfrac{x}{\sin^n x}$

यहाँ पहले $\sin^n x$ का अवकलज ज्ञात करना होगा।

तब माना कि $y = \sin^n x = (\sin x)^n$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^n x = \frac{d}{dx} z^n$$

($\sin x = z$ मानने पर)

$$= \frac{d}{dz}(z)^n \cdot \frac{dz}{dx} = n . z^{n-1} . \frac{d}{dx} z$$

$$= n \sin^{n-1} x . \frac{d}{dx}\sin x$$

($z = \sin x$ रखने पर)

$$= n \sin^{n-1} x . \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^n x) = n \sin^{n-1} x . \cos x \qquad ...(1)$$

तब $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sin^n x}\right)$

$$= \frac{\sin^n x \dfrac{d}{dx}(x) - x \dfrac{d}{dx}(\sin^n x)}{(\sin^n x)^2}$$

$$= \frac{\sin^n x .(1) - x .(n \sin^{n-1} x \cos x)}{(\sin^n x)^2}$$

$$= \frac{\sin^n x - nx \sin^{n-1} x \cos x}{(\sin^n x)^2}$$

[समीकरण (1) से]

$$= \frac{\sin^{n-1} x (\sin x - nx \cos x)}{\sin^n x . \sin^n x}$$

$$= \frac{(\sin x - nx \cos x)}{\sin x . \sin^n x} = \frac{\sin x - nx \cos x}{\sin^{n+1} x}$$

अत: दिए गए फलन का अवकलज

$$= \frac{\sin x - nx \cos x}{\sin^{n+1} x}$$

उत्तर

❐