इकाई 5 : सांख्यिकी तथा प्रायिकता

13 सांख्यिकी (Statistics)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली 13.1

- **प्रश्न 1 एवं 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. 4 7 8 9 10 12 13 17

हल : माध्य विचलन की गणना के लिए सारणी

x_i	$x_i - x$	$\|x_i - x\|$
4	− 6	6
7	− 3	3
8	− 2	2
9	− 1	1
10	0	0
12	2	2
13	3	3
17	7	7
$\Sigma x_i = 80$		$\Sigma \|x_i - \bar{x}\| = 24$

यहाँ $\Sigma x_i = 80$ तथा आँकड़ों की संख्या = 8

∴ माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{8} = \frac{80}{8} = 10$

अब, $\Sigma |x_i - \bar{x}| = 24$

∴ माध्य विचलन $= \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{8} = \frac{24}{8} = 3$ **उत्तर**

प्रश्न 2. 38 70 48 40 42 55 63 46 54 44

हल : माध्य विचलन की गणना के लिए सारणी

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$
38	−12	12
70	20	20
48	−2	2
40	−10	10
42	− 8	8
55	5	5
63	13	13
46	−4	4
54	4	4
44	−6	6
$\Sigma x_i = 500$		$\Sigma \|x_1 - \bar{x}\| = 84$

यहाँ $\Sigma x_i = 500$ तथा आँकड़ों की संख्या = 10

∴ माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{10} = \frac{500}{10} = 50$

अब, $\Sigma |x_i - \bar{x}| = 84$

∴ माध्य विचलन $= \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{10} = \frac{84}{10} = 8.4$ **उत्तर**

● प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 3. 13 17 16 14 11 13 10 16 11 18 12 17

हल : परिकलन सारणी

दिए गए पद x_i	पदों को आरोही क्रम में लिखने पर	माध्यिका (M) से विचलन $(d_i) = (x_i - M) \equiv (x_i - 13.5)$	विचलनों के निरपेक्ष मान $= \lvert (x_i - M) \rvert = \lvert (x_i - 13.5) \rvert$
(1)	(2)	(3)	(4)
13	10	$13 - 13.5 = -0.5$	$\lvert (-0.5) \rvert = +0.5$
17	11	$17 - 13.5 = +3.5$	$\lvert (+3.5) \rvert = +3.5$
16	11	$16 - 13.5 = +2.5$	$\lvert (+2.5) \rvert = +2.5$
14	12	$14 - 13.5 = +0.5$	$\lvert (+0.5) \rvert = +0.5$
11	13 माध्यिका	$11 - 13.5 = -2.5$	$\lvert (-2.5) \rvert = +2.5$
13	13 पद	$13 - 13.5 = -0.5$	$\lvert (-0.5) \rvert = +0.5$
10	14	$10 - 13.5 = -3.5$	$\lvert (-3.5) \rvert = +3.5$
16	16	$16 - 13.5 = +2.5$	$\lvert (+2.5) \rvert = +2.5$
11	16	$11 - 13.5 = -2.5$	$\lvert (-2.5) \rvert = +2.5$
18	17	$18 - 13.5 = +4.5$	$\lvert (+4.5) \rvert = +4.5$
12	17	$12 - 13.5 = -1.5$	$\lvert (-1.5) \rvert = +1.5$
17	18	$17 - 13.5 = +3.5$	$\lvert (+3.5) \rvert = +3.5$
N = 12			$\sum_{i=1}^{12} \lvert x - M \rvert = 28.0$

यहाँ पदों की संख्या $N = 12$ सम है,

$$\text{अत: माध्यिका } (M) = \frac{\frac{N}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{6 \text{ वाँ पद} + 7 \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

$$\text{माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \lvert x_i - M \rvert}{N} = \frac{28}{12}$$

$$= 2.33$$

उत्तर

प्रश्न 4. 36 72 46 42 60 45 53 46 51 49

हल : माध्यिका से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी

दिए गए पद x_i	पदों को आरोही क्रम में लिखने पर	माध्यिका (M) से विचलन $(d_i) = (x_i - M)$ या $(x_i - 47.5)$	विचलनों के निरपेक्ष मान $= \lvert (x_i - M) \rvert$
(1)	(2)	(3)	(4)
36	36	$36 - 47.5 = -11.5$	$\lvert (-11.5) \rvert = +11.5$
72	42	$72 - 47.5 = +24.5$	$\lvert (+24.5) \rvert = +24.5$
46	45	$46 - 47.5 = -1.5$	$\lvert (-1.5) \rvert = +1.5$
42	46	$42 - 47.5 = -5.5$	$\lvert (-5.5) \rvert = +5.5$
60	46	$60 - 47.5 = +12.5$	$\lvert (+12.5) \rvert = +12.5$
45	49 माध्यिका	$45 - 47.5 = -2.5$	$\lvert (-2.5) \rvert = +2.5$
53	51 पद	$53 - 47.5 = +5.5$	$\lvert (+5.5) \rvert = +5.5$
46	53	$46 - 47.5 = -1.5$	$\lvert (-1.5) \rvert = +1.5$
51	60	$51 - 47.5 = +3.5$	$\lvert (+3.5) \rvert = +3.5$
49	72	$49 - 47.5 = +1.5$	$\lvert (+1.5) \rvert = +1.5$
N = 10			$\lvert x - x_i \rvert$ $\sum_{i=1}^{10} \lvert x_i - M \rvert = 70.0$

यहाँ पदों की संख्या $N = 10$ सम है। अत:

$$\text{माध्यिका (M)} = \frac{\frac{N}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वाँ पद} + 6 \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \left(\frac{46+49}{2}\right) = 47.5$$

$$\text{माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \lvert x_i - M \rvert}{N} = \frac{70}{10} = 7$$

उत्तर

● **प्रश्न 5 एवं 6 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 5. x_i : 5 10 15 20 25

f_i : 7 4 6 3 5

हल : माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन हेतु सारणी

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
5	7	35	$\|5-14\|=9$	63
10	4	40	$\|10-14\|=4$	16
15	6	90	$\|15-14\|=1$	6
20	3	60	$\|20-14\|=6$	18
25	5	125	$\|25-14\|=11$	55
	$N=\Sigma f_i$ $=25$	$\Sigma f_i x_i$ $=350$		$\Sigma f_i \|x_i - \bar{x}\|$ $=158$

यहाँ $\Sigma f_i x_i = 350$ तथा $N = 25$

$\therefore$ माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N} = \dfrac{350}{25} = 14$

अब, $\Sigma f_i \,|\, x_i - \bar{x} \,| = 158$

$\therefore$ माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन (M.D.)

$$= \frac{\Sigma f_i \,|\, x_i - \bar{x} \,|}{N}$$

$$= \frac{158}{25} = 6.32$$ **उत्तर**

प्रश्न 6. x_i 10 30 50 70 90

f_i 4 24 28 16 8

हल : माध्य से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी

x_i	f_i	$f_i x_i$	माध्य $\bar{x} = 50$ से विचलन $d_i = (x_i - \bar{x}) \equiv (x_i - 50)$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|(x_i - x)\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
10	4	40	$10-50=-40$	$+40$	$4\times 40=160$
30	24	720	$30-50=-20$	$+20$	$24\times 20=480$
50	28	1400	$50-50=00$	00	$28\times 00=00$
70	16	1120	$70-50=+20$	$+20$	$16\times 20=320$
90	8	720	$90-50=+40$	$+40$	$8\times 40=320$
	N $=80$	$\Sigma f_i x_i$ $=4000$			$\sum_{i=1}^{80} f_i \|(x_i - \bar{x})\| = 1280$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{80} f_i x_i}{N} = \frac{4000}{80} = 50$$

$$\text{माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{80} f_i |(x_i - \bar{x})|}{N}$$

$$= \frac{1280}{80} = 16$$

अत: माध्य विचलन $= 16$ **उत्तर**

● **प्रश्न 7 एवं 8 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 7. x_i : 5 7 9 10 12 15

f_i : 8 6 2 2 2 6

हल : माध्यिका से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी

x_i	f_i	संचयी बारम्बारता C_i	विचलन $d_i = (x_i - M)$	विचलनों के निरपेक्ष मान $\|(x_i - M)\|$	$f_i \|x_i - M\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
5	8	$=8$	$5-7=-2$	$+2$	$8\times 2=16$
7	6	$8+6=14$	$7-7=0$	$+0$	$6\times 0=00$
9	2	$8+6+2=16$	$9-7=+2$	$+2$	$2\times 2=04$
10	2	$8+6+2+2=18$	$10-7=+3$	$+3$	$2\times 3=06$
12	2	$8+6+2+2+2=20$	$12-7=+5$	$+5$	$2\times 5=10$
15	6	$8+6+2+2+2+6=26$	$15-7=+8$	$+8$	$6\times 8=48$
	N $=\Sigma f_i$ $=26$				$\sum_{i=1}^{26} f_i \|x_i - M\| = 84$

यहाँ पदों की संख्या $N = 26$ सम है। अत:

$$\text{माध्यिका} = \frac{\dfrac{26}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\dfrac{26}{2} + 1\right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{13 \text{ वाँ पद} + 14 \text{ वाँ पद}}{2}$$

13वाँ तथा 14वाँ दोनों पद संचयी बारम्बारता 14 के अन्तर्गत आते हैं।

$\because$ संचयी बारम्बारता 14 के संगत $x_i = 7$,

अत: माध्यिका $(M) = 7$

$$\therefore \text{ माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{26} f_i |(x_i - M)|}{N} = \frac{84}{26}$$

$$= \frac{42}{13} = 3.23 \text{ (लगभग)}$$

अत: माध्य विचलन $= 3.23$ **उत्तर**

प्रश्न 8.

x_i :	15	21	27	30	35
f_i :	3	5	6	7	8

हल : **माध्यिका से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी**

x_i	f_i	संचयी बारम्बारता C_i	विचलन $d_i = (x_i - M)$	$\|(x_i - M)\|$	$f_i\|x_i - M\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
15	3	= 3	15 − 30 = −15	+ 15	3 × 15 = 45
21	5	3 + 5 = 8	21 − 30 = −9	+ 9	5 × 9 = 45
27	6	3 + 5 + 6 = 14	27 − 30 = −3	+ 3	6 × 3 = 18
30	7	3 + 5 + 6 + 7 = 21	30 − 30 = 0	0	7 × 0 = 0
35	8	3 + 5 + 6 + 7 + 8 = 29	35 − 30 = +5	+ 5	8 × 5 = 40
	N = 29				$\sum_{i=1}^{29} f_i \|(x_i - M)\|$ = 148

∵ यहाँ पदों की संख्या $N = 29$ विषम है। अत:

$$\text{माध्यिका पद} = \frac{N+1}{2} \text{ वाँ पद}$$

$$= \frac{29+1}{2} \text{ वाँ पद} = 15 \text{ वाँ पद}$$

∵ 15 वाँ पद संचयी बारम्बारता 21 के अन्तर्गत है।

∴ संचयी बारम्बारता 21 के लिए $x_i = 30$,

अत: माध्यिका $(M) = 30$

$$\text{माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{29} f_i |(x_i - M)|}{N}$$

$$= \frac{148}{29} = 5.1$$

अत: माध्य विचलन = 5.1 **उत्तर**

प्रश्न 9 एवं 10 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

आय प्रतिदिन (₹ में)	0–100	100–200	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
व्यक्तियों की संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

हल : **माध्य से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी**

आय प्रतिदिन (वर्ग)	व्यक्तियों की संख्या (बारम्बारता) f_i	मध्य बिन्दु x_i	$f_i x_i$	माध्य $\bar{x} = 358$ से विचलन $d_i = (x_i - \bar{x}) \equiv (x_i - 358)$	$\|(x_i - \bar{x})\|$	$f_i\|(x_i - \bar{x})\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0-100	4	50	200	50 − 358 = −308	+ 308	1232
100-200	8	150	1200	150 − 358 = −208	+ 208	1664
200-300	9	250	2250	250 − 358 = −108	+ 108	972
300-400	10	350	3500	350 − 358 = −8	+ 8	80
400-500	7	450	3150	450 − 358 = +92	+ 92	644
500-600	5	550	2750	550 − 358 = +192	+ 192	960
600-700	4	650	2600	650 − 358 = +292	+ 292	1168
700-800	3	750	2250	750 − 358 = +392	+ 392	1176
	N = 50		$\sum_{i=1}^{50} f_i x_i$ = 17900			$\sum_{i=1}^{50} f_i \|(x_i - \bar{x})\|$ = 7896

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{50} f_i x_i}{N} = \frac{17900}{50} = 358$$

$$\text{अत: माध्य विचलन (M.D.)} = \frac{\sum_{i=1}^{50} f_i |(x_i - \bar{x})|}{N}$$

$$= \frac{7896}{50} = 157.92$$

उत्तर

प्रश्न 10.

ऊँचाई (सेमी में)	95–105	105–115	115–125	125–135	135–145	145–155
लड़कों की संख्या	9	13	26	30	12	10

हल : **माध्य से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी**

ऊँचाई (सेमी में)	लड़कों की संख्या (बारम्बारता) f_i	मध्य बिन्दु x_i	$f_i x_i$	माध्य $\bar{x}$ से विचलन $d_i = (x_i - \bar{x}) \equiv (x_i - 125.3)$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i\|x_i - \bar{x}\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
95–105	9	100	900	− 25.3	25.3	227.7
105–115	13	110	1430	−15.3	15.3	198.9
115–125	26	120	3120	−5.3	5.3	137.8
125–135	30	130	3900	+ 4.7	4.7	141.0
135–145	12	140	1680	+14.7	14.7	176.4
145–155	10	150	1500	+ 24.7	24.7	247.0
	N = 100	$\sum_{i=1}^{100} f_i x_i$ = 12530				$\sum_{i=1}^{100} f_i \|(x_i - \bar{x})\|$ = 1128.8

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{100} f_i x_i}{N} = \frac{12530}{100} = 125.3$$

अत: माध्य विचलन (M.D.)$= \dfrac{\sum_{i=1}^{100} f_i |(x_i - \bar{x})|}{N}$

$= \dfrac{1128.8}{100} = 11.28$ **उत्तर**

प्रश्न 11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
लड़कियों की संख्या	6	8	14	16	4	2

हल : **माध्यिका से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी**

अंक (वर्ग)	लड़कियों की संख्या (बारम्बारता) f_i	संचयी बारम्बारता C_i	मध्य-बिन्दु x_i	माध्यिका M = 27.85 से विचलन $d_i = (x_i - M)$	$\|(x_i - M)\|$	$f_i \|x_i - M\|$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0–10	6	6	5	−22.85	+22.85	137.10
10–20	8	6+8=14	15	−12.85	+12.85	102.80
20–30	14	8+6+14=28	25	−2.85	+2.85	39.90
30–40	16	6+8+14+16=44	35	+7.15	+7.15	114.40
40–50	4	6+8+14+16+4=48	45	+17.15	+17.15	68.60
50–60	2	6+8+14+16+4+2=50	55	+27.15	+27.15	54.30
	N=50					$\sum_{i=1}^{50} f_i \|x_i - M\| = 517.10$

माध्यिका की गणना :

यहाँ पदों की संख्या $N = 50$

$\therefore \quad \dfrac{N}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$

माध्यिका वर्ग = वह वर्ग जिसके अन्तर्गत यह माध्यिका पद (25वाँ पद) हो = 20 − 30

अत: माध्यिका $(M) = l + \dfrac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$

जहाँ l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा = 20

C = माध्यिका वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता = 14

f = माध्यिका वर्ग की संचयी बारम्बारता = 14

तथा $h = 10$

अत: माध्यिका $(M) = 20 + \dfrac{(25-14)}{14} \times 10$

$= 20 + \dfrac{11 \times 10}{14} = 20 + 7.85$

$= 27.85$

$\therefore$ माध्य विचलन (M.D.) $= \dfrac{\sum_{i=1}^{50} f_i |(x_i - M)|}{N}$

$= \dfrac{517.10}{50} = 10.34$ **उत्तर**

प्रश्न 12. नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन की माध्यिका आयु के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए :

आयु	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

हल : यहाँ हम देखते हैं कि दिए गए आँकड़ों के वर्ग अन्तराल सतत नहीं हैं, अत: पहले हमें इन्हें सतत बनाना होगा।

इसके लिए हम वर्ग अन्तराल 16–20 को 15.5–20.5 लिखते हैं। इसी प्रकार वर्ग अन्तराल 21–25 को 20.5–25.5 लिखते हैं आदि।

माध्यिका से माध्य विचलन हेतु परिकलन सारणी

आयु (वर्ग) समावेशी विधि	आयु (वर्ग) अपवर्जी विधि	व्यक्तियों की संख्या f_i	संचयी बारम्बारता C_i	मध्य-बिन्दु x_i	माध्यिका M = 38 से विचलन $d_i = (x_i - M)$	$\|(x_i - M)\|$	$f_i \|x_i - M\|$
(1)–a	(1)–b	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
16–20	15.5 – 20.5	5	5	18	−20	20	100
21–25	20.5 – 25.5	6	11	23	−15	15	90
26–30	25.5 – 30.5	12	23	28	−10	10	120
31–35	30.5 – 35.5	14	37	33	−5	5	70
36–40	35.5 – 40.5	26	63	38	00	00	00
41–45	40.5 – 45.5	12	75	43	+5	5	60
46–50	45.5 – 50.5	16	91	48	+10	10	160
51–55	50.5 – 55.5	9	100	53	+15	15	135
		N =100					$\sum_{i=1}^{100} f_i \|(x_i - M)\| = 735$

माध्यिका की गणना :

यहाँ $N = 100 \Rightarrow \dfrac{N}{2} = 50$

$\because$ 50वाँ पद, संचयी बारम्बारता 63 के अन्तर्गत आता है, जिसके संगत वर्ग अन्तराल 35.5– 40.5 है।

$\therefore$ माध्यिका वर्ग = वह वर्ग जिसमें माध्यिका पद निहित हो

= 35.5 – 40.5

तब, माध्यिका $(M) = l + \dfrac{\left(\dfrac{N}{2} - C\right)}{f} \times h$

यहाँ $l = 35.5,\ N = 100,\ \ C = 37$

$h = 40.5 - 35.5 = 5,\ f = 26$

अत: माध्यिका $= 35.5 + \dfrac{\left(\dfrac{100}{2} - 37\right)}{26} \times 5$

$= 35.5 + \dfrac{50 - 37}{26} \times 5$

$= 35.5 + \dfrac{13 \times 5}{26}$

$= 35.5 + 2.5 = 38.0$

माध्य विचलन की गणना :

अत: माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{100} f_i |(x_i - M)|}{N}$

$= \dfrac{735}{100} = 7.35$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 13.2

● **प्रश्न 1 से 5 तक के आँकड़ों के लिए माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. 6 7 10 12 13 4 8 12

हल : 6 7 10 12 13 4 8 12 का माध्य

$\bar{x} = \dfrac{6 + 7 + 10 + 12 + 13 + 4 + 8 + 12}{8}$

$= \dfrac{72}{8} = 9$ **उत्तर**

प्रसरण के लिए परिकलन सारणी

पद x_i	माध्य $\bar{x} = 9$ से विचलन $d_i = (x_i - x)$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	$6 - 9 = -3$	+9
7	$7 - 9 = -2$	+4
10	$10 - 9 = +1$	+1
12	$12 - 9 = +3$	+9
13	$13 - 9 = +4$	+16
4	$4 - 9 = -5$	+25
8	$8 - 9 = -1$	+1
12	$12 - 9 = +3$	+9
N = 8		$\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 = 74$

तब, प्रसरण $(\sigma^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2}{N}$

$= \dfrac{74}{8} = \dfrac{37}{4} = 9.25$

अत: माध्य = 9 तथा प्रसरण = 9.25 **उत्तर**

प्रश्न 2. प्रथम n प्राकृत संख्याएँ।

हल : प्रथम N प्राकृत संख्याओं का योग

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1 + 2 + 3 + \ldots.. + N = \frac{N}{2}(N+1)$$

$\therefore$ प्रथम N प्राकृत संख्याओं का माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} n}{N}$

$$= \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N} = \frac{N+1}{2}$$

प्रथम N प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + N^2$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$\because$ प्रसरण $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} n^2}{N} - \left(\dfrac{\sum_{n=1}^{N} n}{N}\right)^2$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{N.6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{N+1}{2}\right)\left[\frac{(2N+1)}{3} - \frac{N+1}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{N+1}{2}\right)\left[\frac{4N+2-3N-3}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{N+1}{2}\right)\left[\frac{N-1}{6}\right]$$

$$= \frac{(N+1)(N-1)}{12} = \frac{N^2-1}{12}$$

अत: प्रथम N प्राकृत संख्याओं का माध्य $= \dfrac{N+1}{2}$

तथा प्रसरण $= \dfrac{N^2-1}{12}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. तीन के प्रथम 10 गुणज।

हल : 3 के प्रथम 10 गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, ... , 30

3 के प्रथम 10 गुणजों का योग

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = (3 + 6 + 9 + 12 + \ldots.. + 30)$$

$= 3(1+2+3+4+.....+10)$

$= 3.\frac{10(10+1)}{2} = 165$

$\therefore$ 3 के प्रथम 10 गुणजों का माध्य $\bar{x} = \frac{165}{10} = 16.5$

3 के प्रथम 10 गुणजों के वर्गों का योग

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 3^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2 + ... + 30^2$

$= 3^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 10^2)$

$= 3^2.\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ जबकि $N = 10$

$= \frac{3}{2}.10 \times (10+1)(20+1)$

$= \frac{3}{2} \times 2310 = 3465$

तब, प्रसरण $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{N}\right)^2$

$= \frac{3465}{10} - \left(\frac{165}{10}\right)^2$

$= 346.5 - 272.25 = 74.25$

अत: 3 के प्रथम 10 गुणजों का माध्य $= 16.5$

तथा प्रसरण $= 74.25$ **उत्तर**

प्रश्न 4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

हल : माना कल्पित माध्य $A = 20$ है।

माध्य एवं प्रसरण हेतु परिकलन सारणी

पद x_i	बारम्बा-रता f_i	कल्पित माध्य A = 20 से विचलन $d_i = x_i - 20$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2 = (f_i d_i \times d_i)$
6	2	6 − 20 = − 14	− 28	392
10	4	10 − 20 = − 10	− 40	400
14	7	14 − 20 = − 6	− 42	252
18	12	18 − 20 = − 2	− 24	48
24	8	24 − 20 = 4	32	128
28	4	28 − 20 = 8	32	256
30	3	30 − 20 = 10	30	300
	N = 40		$\sum_{i=1}^{40} f_i d_i = -40$	$\sum_{i=1}^{40} f_i d_i^2 = 1776$

तब, माध्य $= A + \frac{\sum_{i=1}^{40} f_i d_i}{N} = 20 + \frac{(-40)}{40}$

$= 20 - 1 = 19$

प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{1}{N^2}\left[N \sum_{i=1}^{N} f_i d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i d_i\right)^2\right]$

$= \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i d_i}{N}\right)^2$

$= \frac{1776}{40} - \left(\frac{-40}{40}\right)^2$

$= 44.4 - (-1)^2 = 44.4 - 1 = 43.4$

अत: माध्य $= 19$ तथा प्रसरण $\sigma^2 = 43.4$ **उत्तर**

प्रश्न 5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

हल : माना कल्पित माध्य $A = 100$ है।

माध्य एवं प्रसरण हेतु परिकलन सारणी

पद x_i	बारम्बारता f_i	कल्पित माध्य A = 100 से विचलन $d_i = (x_i - 100)$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2 = (f_i d_i \times d_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
92	3	92 − 100 = − 8	− 24	192
93	2	93 − 100 = − 7	− 14	98
97	3	97 − 100 = − 3	− 9	27
98	2	98 − 100 = − 2	− 4	8
102	6	102 − 100 = + 2	+ 12	24
104	3	104 − 100 = + 4	+ 12	48
109	3	109 − 100 = + 9	+ 27	243
	N = 22		$\sum_{i=1}^{22} f_i d_i = 0$	$\sum_{i=1}^{22} f_i d_i^2 = 640$

तब, माध्य $= A + \frac{\sum_{i=1}^{22} f_i d_i}{N} = 100 + \frac{0}{22} = 100$

प्रसरण $(\sigma^2) = \frac{1}{N^2}\left[N \sum_{i=1}^{N} f_i d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i d_i\right)^2\right]$

$= \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i d_i}{N}\right)^2$

$$= \frac{640}{22} - 0 = 29.09$$

अत: माध्य $= 100$ तथा प्रसरण $\sigma^2 = 29.09$ **उत्तर**

प्रश्न 6. लघु विधि द्वारा माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

हल : माना कल्पित माध्य $A = 63$ है।

माध्य एवं मानक विचलन हेतु परिकलन सारणी

पद x_i	बारम्बा-रता f_i	कल्पित माध्य $A = 63$ से विचलन $d_i = (x_i - 63)$	$f_i d_i$ $(x_i - \bar{x})^2$	$f_i d_i^2 = (f_i d_i \times d_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
60	2	− 3	− 6	+ 18
61	1	− 2	− 2	+ 4
62	12	− 1	− 12	+ 12
63	29	0	00	00
64	25	+ 1	+ 25	+ 25
65	12	+ 2	+ 24	+ 48
66	10	+ 3	+ 30	+ 90
67	4	+ 4	+ 16	+ 64
68	5	+ 5	+ 25	+ 125
	$N = 100$		$\sum_{i=1}^{100} f_i d_i = 100$	$\sum_{i=1}^{100} f_i d_i^2 = 386$

$$\therefore \text{ माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{\sum_{i=1}^{100} f_i d_i}{N}$$

$$= 63 + \frac{100}{100} = 63 + 1 = 64$$

मानक विचलन

$$(\text{S.D.}) = \frac{1}{N}\sqrt{N\left(\sum_{i=1}^{100} f_i d_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{100} f_i \ d_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{100 \times 386 - (100)^2}$$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{38600 - 10000}$$

$$= \frac{1}{100}\sqrt{28600} = \frac{1}{100} \times 169.11$$

$= 1.69$ (लगभग)

अत: माध्य $= 64$ तथा मानक विचलन $= 1.69$ **उत्तर**

- **प्रश्न 7 व प्रश्न 8 में दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 7.

वर्ग	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
बारम्बारता	2	3	5	10	3	5	2

हल : माध्य एवं प्रसरण हेतु परिकलन सारणी

वर्ग	बारम्बारता f_i	मध्य मान x_i	$f_i x_i$			$f_i (x_i - x)^2$
0-30	2	15	30	−92	8464	16928
30-60	3	45	135	−62	3844	11532
60-90	5	75	375	−32	1024	5120
90-120	10	105	1050	−2	4	40
120-150	3	135	405	28	784	2352
150-180	5	165	825	58	3364	16820
180-210	2	195	390	88	7744	15488
	$N = \Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 3210$			$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 68280$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i = \frac{3210}{30} = 107$$ **उत्तर**

$$\text{तथा प्रसरण} = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{68280}{30} = 2276$$ **उत्तर**

प्रश्न 8.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	5	8	15	16	6

हल : माध्य एवं प्रसरण हेतु परिकलन सारणी

वर्ग	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$ $x_i - 27$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
0-10	5	5	25	−22	484	2420
10-20	8	15	120	−12	144	1152
20-30	15	25	375	−2	4	60
30-40	16	35	560	8	64	1024

40-50	6	45	270	18	324	1944
	$N = \Sigma f_i = 50$		$\Sigma f_i x_i = 1350$			$\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 6600$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i = \frac{1350}{50} = 27$$

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{50} \times 6600 = 132$$

$\therefore$ माध्य = 27 तथा प्रसरण = 132 **उत्तर**

प्रश्न 9. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी में)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
बच्चों की संख्या	3	4	7	7	15	9	6	6	3

हल : माना कल्पित माध्य $A = 92.5$ तथा अन्तराल $h = 5$ है।

माध्य, प्रसरण व मानक विचलन हेतु परिकलन सारणी

वर्ग	बारम्बारता	मध्य-बिन्दु x_i	$y_i = \frac{x_i - 92.5}{h}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
70-75	3	72.5	−4	16	−12	48
75-80	4	77.5	−3	9	−12	36
80-85	7	82.5	−2	4	−14	28
85-90	7	87.5	−1	1	−7	7
90-95	15	92.5	0	0	0	0
95-100	9	97.5	1	1	9	9
100-105	6	102.5	2	4	12	24
105-110	6	107.5	3	9	18	54
110-115	3	112.5	4	16	12	48
	$N = 60$				$\Sigma f_i y_i = 6$	$\Sigma f_i y_i^2 = 254$

$$\therefore \quad \text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i y_i}{N} \times h = 92.5 + \frac{6}{60} \times 5$$

$$= 92.5 + 0.5 = 93$$ **उत्तर**

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \Sigma f_i y_i^2 - (\Sigma f_i y_i)^2]$$

$$= \left(\frac{5}{60}\right)^2 [60 \times 254 - 6^2]$$

$$= \frac{1}{144} [15240 - 36]$$

$$= \frac{15204}{144} = 105.52$$ **उत्तर**

और मानक विचलन $= \sqrt{105.58} = 10.27$ **उत्तर**

प्रश्न 10. एक डिज़ाइन में बनाए गए वृत्तों के व्यास मिमी में नीचे दिए गए हैं :

व्यास	33–36	37–40	41–44	45–48	49–52
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन व माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : माना कल्पित माध्य $A = 42.5$ तथा अन्तराल $h = 4$ है।

माध्य व्यास तथा मानक विचलन हेतु परिकलन सारणी

(वर्ग) व्यास		(बारम्बारता) वृत्तों की संख्या f_i	मध्य-बिन्दु x_i	कल्पित माध्य A = 42.5 से विचलन $d_i = (x_i - 42.5)$	पद विचलन $D_i = \frac{d_i}{h} = \frac{d_i}{4}$	$f_i D_i$	$f_i D_i^2 \equiv (f_i D_i \times D_i)$
समावेशी वर्ग	अपवर्जी वर्ग						
(1) (a)	(1) (b)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
33−36	32.5−36.5	15	34.5	−8.0	−2.0	−30	+60
37−40	36.5−40.5	17	38.5	−4.0	−1.0	−17	+17
41−44	40.5−44.5	21	42.5	0.0	0.0	+00	00
45−48	44.5−48.5	22	46.5	+4.0	+1.0	+22	+22
49−52	48.5−52.5	25	50.5	+8.0	+2.0	+50	+100
		$N = 100$				$\sum_{i=1}^{100} f_i D_i = 25$	$\sum_{i=1}^{100} f_i D_i^2 = +199$

$$\text{माध्य व्यास} = A + h \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i D_i}{N}$$

$$= 42.5 + 4 \times \frac{\sum_{i=1}^{100} f_i D_i}{100}$$

$$= 42.5 + \frac{4 \times 25}{100}$$

$$= 42.5 + 1 = 43.5 \text{ मिमी}$$

मानक विचलन

$$= \frac{h}{N} \left[\sqrt{N \sum_{i=1}^{N} f_i D_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i D_i\right)^2}\right]$$

$$= \frac{4}{100} \left[\sqrt{100 \times 199 - (25)^2}\right]$$

$$= \frac{4}{100}\sqrt{19900 - 625}$$
$$= \frac{4}{100} \times \sqrt{19275}$$
$$= \frac{4}{100} \times 138.83$$
$= 5.5532 \cong 5.55$ मिमी
$= 5.55$

अत: माध्य व्यास $= 43.5$ मिमी
तथा मानक विचलन $= 5.55$ **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. आठ प्रेक्षणों के माध्य तथा प्रसरण क्रमश: 9 और 9.25 हैं। यदि इनमें से छह प्रेक्षण 6, 7, 10, 12, 12 और 13 हैं तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल : माना 8 प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ व x_8 हैं।

दिया है,

8 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x} = 9$ तथा प्रसरण $\sigma^2 = 9.25$

छह प्रेक्षण $x_3 = 6, x_4 = 7, \quad x_5 = 10,$
$x_6 = 12, \; x_7 = 12$ और $x_8 = 13$

तब, शेष दो प्रेक्षण x_1 व x_2 हैं।

$$\therefore \quad \text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8}{8} = 9$$
(दिया है)

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{8} x_i = x_1 + x_2 + 6 + 7 + 10 + 12 + 12 + 13$$
$$= 72 \qquad \ldots(1)$$
$$x_1 + x_2 + 60 = 72 \quad \text{या} \quad x_1 + x_2 = 12 \qquad \ldots(2)$$

$$\because \quad \text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{1}{N^2}\left[N \sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{8} x_i\right)^2\right]$$
$$\therefore \quad 9.25 = \frac{1}{(8)^2}\left[8 \sum_{i=1}^{8} x_i^2 - (72)^2\right]$$
$$\therefore \quad 9.25 \times 64 + (72)^2 = 8 \sum_{i=1}^{8} x_i^2$$
$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \frac{9.25 \times 64 + (72)^2}{8}$$
$$= 74 + 648 = 722$$

$$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2 + 12^2 + 13^2 = 722$$
$$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = 722 - (6^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2 + 12^2 + 13^2)$$
$$= 722 - (36 + 49 + 100 + 144 + 144 + 169)$$
$$= 722 - 642$$
$$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = 80 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) के वर्ग में से समीकरण (3) को घटाने पर,
$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = (12)^2 - 80$$
$$\therefore \quad 2x_1x_2 = 144 - 80 = 64 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर,
$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 80 - 64$$
$$(x_1 - x_2)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 4 \qquad \ldots(5)$$

समीकरण (2) में समीकरण (5) को क्रमश: जोड़ने तथा घटाने पर,
$$2x_1 = 16 \quad \text{तथा} \quad 2x_2 = 8$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 8 \quad \text{व} \quad x_2 = 4$$

अत: शेष दो प्रेक्षण 8 व 4 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2. सात प्रेक्षणों के माध्य तथा प्रसरण क्रमश: 8 तथा 16 हैं। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल : माना 7 प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ व x_7 हैं।

दिया है, 7 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x} = 8$ तथा प्रसरण $\sigma^2 = 16$

$\because$ 5 प्रेक्षण 2, 4, 10, 12 व 14 हैं।

$\therefore$ $x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 10, x_6 = 12$ व $x_7 = 14$

$\therefore$ शेष दो प्रेक्षण x_1 व x_2 हैं।

$$\because \quad \text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{N}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$$
$$\therefore \quad 8 = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + 2 + 4 + 10 + 12 + 14}{7}$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = x_1 + x_2 + 2 + 4 + 10 + 12 + 14 = 56 \qquad \ldots(1)$$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 42 = 56$ या $x_1 + x_2 = 14 \quad ...(2)$

$\because$ प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N^2}\left[N\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2\right]$

$\therefore \quad 16 = \frac{1}{(7)^2}\left[7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - (56)^2\right]$

[समीकरण (1) से, $\sum_{i=1}^{7} x_i = 56$, $N = 7$ और $\sigma^2 = 16$]

$\therefore \quad 16 \times 49 = 7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - (56)^2$

$\therefore \quad 784 = 7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - 3136$

$(\because \ 56^2 = 3136)$

$\therefore \quad 784 + 3136 = 7\sum_{i=1}^{7} x_i^2$

$\therefore \quad 7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 3920$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 560$

$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 + 2^2 + 4^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 = 560$

$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 + 4 + 16 + 100 + 144 + 196 = 560$

$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = 560 - (4 + 16 + 100 + 144 + 196)$

$= 560 - 460 = 100$

$\therefore \quad x_1^2 + x_2^2 = 100 \quad ...(3)$

समीकरण (2) के वर्ग में से समीकरण (3) को घटाने पर,

$(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = (14)^2 - 100 = 96$

$\therefore \quad 2x_1x_2 = 96 \quad ...(4)$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 100 - 96 = 4$

$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = 4$ या $x_1 - x_2 = 2 \quad ...(5)$

समीकरण (2) में समीकरण (5) को क्रमशः जोड़ने व घटाने पर,

$2x_1 = 16$ तथा $2x_2 = 12$

$\Rightarrow \quad x_1 = 8$ व $x_2 = 6$

अतः शेष दो प्रेक्षण 8 व 6 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. छः प्रेक्षणों के माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 तथा 4 हैं। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को तीन गुना कर दिया जाए तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $n = 6$, माध्य $\bar{x} = 8$ तथा मानक विचलन $\sigma = 4$

माना दिए गए प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ हैं।

तब, $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 8$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 8 \times 6 = 48$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{6} x_i = 48 \quad ...(1)$

और मानक विचलन $\sigma = 4 \quad \therefore \quad \sigma^2 = 16$

$\therefore \quad \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{6} = 16$

अथवा $\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = 96 \quad ...(2)$

यदि प्रेक्षणों को 3 से गुणा कर दें तो नए प्रेक्षण : $3x_1, 3x_2, 3x_3, 3x_4, 3x_5$ व $3x_6$ होंगे।

तब, परिणामी माध्य

$= \frac{3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6}{6}$

$= 3.\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)}{6}$

$= 3.\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{2}$

$= \frac{48}{2} = 24 = 3 \times 8 = 3\bar{x}$

और परिणामी मानक विचलन $= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(3x_i - 3\bar{x})^2}{6}}$

$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(3)^2(x_i - \bar{x})^2}{6}}$

$= \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}$

$= \sqrt{\frac{3}{2} \times 96}$

[समीकरण (2) से]

$= \sqrt{144} = 12$

अतः परिणामी माध्य $= 24$

और परिणामी मानक विचलन $= 12$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का माध्य $\bar{x}$ तथा प्रसरण σ^2 है तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \ldots, ax_n$ का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ तथा $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ है।

हल : $\because$ n प्रेक्षणों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$ ...(1)

$\because$ n प्रेक्षणों का प्रसरण $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2$ ...(2)

तब, प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ का माध्य (जहाँ $X_i = a x_i$)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

$$= \frac{a x_1 + a x_2 + a x_3 + ... + a x_n}{n}$$

$$= \frac{a(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)}{n}$$

$$= \frac{a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

$$= \frac{a(n\bar{x})}{n} \quad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$\therefore$ माध्य $\bar{X} = a\bar{x}$ ...(3) **Proved.**

और प्रेक्षणों $a x_1, a x_2, a x_3, ..., a x_n$ का प्रसरण

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a x_i - a\bar{x})^2$$

[$\because$ प्रेक्षण a गुने हैं और $\bar{X} = a\bar{x}$]

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^2 (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{a^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{a^2}{n} \cdot n\sigma^2 \quad \text{[समीकरण (2) से]}$$

$$= a^2\sigma^2$$

अत: प्रसरण $= a^2\sigma^2$ **Proved.**

प्रश्न 5. बीस प्रेक्षणों के माध्य तथा मानक विचलन क्रमश: 10 तथा 2 हैं। जाँच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि

(a) गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

(b) उसे 12 से बदल दिया जाए।

हल : दिया है, $n = 20$, माध्य $\bar{x} = 10$ तथा मानक विचलन $\sigma = 2$

$\therefore$ माध्य $\dfrac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \bar{x} = 10$ से

$\sum_{i=1}^{20} x_i = 10 \times 20 = 200$ ...(1)

इस योग में एक गलत प्रेक्षण 8 सम्मिलित है।

- **(a) यदि गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए** तब शेष 19 प्रेक्षणों का योग $= 200 - 8 = 192$

तब, सही माध्य $= \dfrac{192}{19} = 10.1$

$\because$ मानक विचलन $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{20}} = 2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2}{20} = (2)^2$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 80$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=1}^{20} \bar{x}^2 = 80$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 2 \times 10 \times 200 + 20 \times (10)^2 = 80$

$\left(\text{क्योंकि } \bar{x} = 10 \text{ और } \sum_{i=1}^{20} x_i = 200\right)$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 80 + 2000 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2080$

$\because$ उक्त गणना में हटाए जाने वाला प्रेक्षण 8 सम्मिलित है,

$\therefore$ सही $\sum_{i=1}^{19} x_i^2 = 2080 - 8^2 = 2016$

तब, सही मानक विचलन $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{19} x_i^2}{n} - (\text{सही माध्य})^2}$

$$= \sqrt{\frac{2016}{19} - (10.105)^2}$$

$$= \sqrt{106.105 - 102.111}$$

$$= \sqrt{3.99} = 1.99$$

अत: सही माध्य $= 10.1$

तथा सही मानक विचलन $= 1.99$ **उत्तर**

- **(b) यदि गलत प्रेक्षण 8 के स्थान पर 12 कर दिया जाए तो**

20 प्रेक्षणों का सही योग

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 200 - 8 + 12 = 204$$

अतः सही माध्य $= \frac{204}{20} = 10.2$ **उत्तर**

तब, मानक विचलन के लिए सही

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2080 - 8^2 + 12^2$$

$$= 2080 - 64 + 144 = 2160$$

तब, सही मानक विचलन

$$= \sqrt{\text{सही} \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{n} - (\text{सही माध्य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2160}{20} - (10.2)^2}$$

$$= \sqrt{108 - 104.04}$$

$$= \sqrt{3.96} = 1.98$$

अतः सही माध्य $= 10.2$ तथा सही मानक विचलन $= 1.98$ **उत्तर**

प्रश्न 6. 100 प्रेक्षणों के माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 हैं। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षणों को हटा दिया जाए तो माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : 100 प्रेक्षणों का माध्य $\bar{x} = 20$

$\therefore$ 100 प्रेक्षणों का योग $\sum_{i=1}^{100} x_i = 20 \times 100 = 2000$

इनमें 21, 21, 18 तीन प्रेक्षण गलत थे। इनको निकाल देने पर,

शेष 97 प्रेक्षणों का योग

$$\sum_{i=1}^{97} x_i = 2000 - (21 + 21 + 18) = 1940$$

अतः सही माध्य $= \frac{\sum_{i=1}^{97} x_i}{n} = \frac{1940}{97} = 20$

प्राप्त माध्य विचलन $= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (x_i - \bar{x})^2}{100}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} (x_i - \bar{x})^2 = 900$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{100} x_i + 100 . (\bar{x})^2 = 900$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - 2(20) \times 2000 + 100 (20)^2 = 900$$

$$\left(\because \bar{x} = 20 \text{ तथा } \sum_{i=1}^{100} x_i = 2000 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - 80000 + 40000 = 900$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 40900$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{97} x_i^2 + (21)^2 + (21)^2 + (18)^2 = 40900$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{97} x_i^2 = 40900 - [(21)^2 + (21)^2 + (18)^2]$$

$$= 40900 - [441 + 441 + 324]$$

$$= 40900 - 1206$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{97} x_i^2 = 39694$$

तब, तीन प्रेक्षण निकाल देने पर,

$$\text{मानक विचलन} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{97} x_i^2}{n} - (\text{सही माध्य})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{39694}{97} - (20)^2}$$

$$= \sqrt{409.2165 - 400}$$

$$= \sqrt{9.2165} = 3.036$$

अतः परिणामी माध्य $= 20$

और मानक विचलन $= 3.036$ **उत्तर**

❐