14 प्रायिकता (Probability)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 14.1

प्रश्न 1. एक पासा फेंका जाता है। माना घटना E 'पासे पर संख्या 4 दर्शाता' है और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है। ज्ञात कीजिए कि क्या E और F परस्पर अपवर्जी हैं?

हल : एक पासा यादृच्छया फेंका जाता है।

तब **प्रतिदर्श समष्टि** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

घटना E : "पासे पर संख्या 4 आना"

$\Rightarrow$ **घटना E** $= \{4\}$

घटना F : "पासे पर सम संख्या आना"

$\Rightarrow$ **घटना F** $= \{2, 4, 6\}$

$\because$ $4 \in E$ और $4 \in F \Rightarrow E \cap F \neq \phi$

अत: **घटना E व घटना F परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 2. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए :

(i) A : संख्या 7 से कम है।

(ii) B : संख्या 7 से बड़ी है।

(iii) C : संख्या 3 का गुणज है।

(iv) D : संख्या 4 से कम है।

(v) E : 4 से बड़ी सम संख्या है।

(vi) F : संख्या 3 से कम नहीं है।

$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$ तथा F' ज्ञात कीजिए।

हल : जब यादृच्छिक परीक्षण में एक पासा फेंका जाता है तो

प्रतिदर्श समष्टि S $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **(i) घटना** A : संख्या 7 से कम है।

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S के सभी परिणाम 7 से छोटे हैं।

अत: $A = \{x \in S : x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **उत्तर**

- **(ii) घटना** B : संख्या 7 से बड़ी है।

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S का कोई भी अवयव 7 से बड़ा नहीं है।

अत: घटना $\mathbf{B} = \{x \in S : x > 7\} = \phi$ **उत्तर**

- **(iii) घटना** C : संख्या 3 का गुणज है।

$\because$ S के अन्तर्गत आने वाले 3 के गुणज केवल 3 तथा 6 हैं।

$\therefore$ घटना $C = \{x \in S : x, 3$ का गुणज है।$\}$

$= \{3, 6\}$ **उत्तर**

- **(iv) घटना** D : संख्या 4 से कम है।

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S के वे अवयव जो 4 से कम हैं $= 1, 2, 3$

अत: घटना $\mathbf{D} = \{x \in S : x < 4\} = \{1, 2, 3\}$ **उत्तर**

- **(v) घटना** E : 4 से बड़ी सम संख्या है।

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S के अन्तर्गत 4 से बड़ी सम संख्या केवल 6 है।

अत: घटना **E**

$= \{x \in S : x > 4$ तथा x एक सम संख्या है।$\}$

$= \{6\}$ **उत्तर**

- **(vi) घटना** F : संख्या 3 से कम नहीं है।

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S के अन्तर्गत 3 या 3 से बड़ी संख्याएँ $= 3, 4, 5, 6$

अत: **घटना** $F = \{x \in S : x \nless 3\}$

$= \{3, 4, 5, 6\}$ **उत्तर**

$\therefore$ $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **उत्तर**

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \phi = \phi$ **उत्तर**

$B \cup C = \phi \cup \{3, 6\} = \{3, 6\}$ **उत्तर**

$E \cap F = \{6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$

= समुच्चयों E तथा F के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय

$= \{6\}$ **उत्तर**

$D \cap E = \{1, 2, 3\} \cap \{6\} =$ समुच्चयों D व E के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय $= \phi$ **उत्तर**

$A - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 6\}$

$=$ A के उन अवयवों का समुच्चय जो C में न हों।

$= \{1, 2, 4, 5\}$ **उत्तर**

$D - E = \{1, 2, 3\} - \{6\}$

$=$ D के उन अवयवों का समुच्चय जो E में न हो।

$= \{1, 2, 3\}$ **उत्तर**

$F' = S - F$
= S के उन अवयवों का समुच्चय जो F में न हों
$= \{1, 2\}$ **उत्तर**

तथा $E \cap F' = \{6\} \cap \{1, 2\}$ $[\because F' = \{1,2\}]$
= दो समुच्चयों के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय
$= \phi$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक परीक्षण में पासे के एक जोड़े को फेंकते हैं और उन पर प्रकट संख्याओं को लिखते हैं। निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए :

A : प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

B : दोनों में से कम-से-कम एक पासे पर संख्या 2 प्रकट होती है।

C : प्रकट संख्याओं का योग कम-से-कम 7 है और 3 का गुणज है।

ज्ञात कीजिए कि इन घटनाओं के कौन-कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

हल : जब यादृच्छिक परीक्षण में पासे का एक जोड़ा फेंका जाता है तो

प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \begin{Bmatrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1,6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{Bmatrix}$$

प्रतिदर्श समष्टि में 8 से अधिक योग वाले प्रतिदर्श बिन्दु क्रमशः (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6) हैं।

$\therefore$ **घटना A** = प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक हो
= 8 से अधिक योग वाले युग्मों का समुच्चय
= {(3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 4) (5, 5), (5, 6) (6, 3), (6, 4) (6, 5), (6,6)} **उत्तर**

प्रतिदर्श समष्टि में वे प्रतिदर्श बिन्दु जिनमें कम-से-कम एक पासे पर 2 का अंक प्रकट होता है निम्नलिखित हैं :

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)

$\therefore$ **घटना B** = दोनों पासों में से कम-से-कम एक पर संख्या 2 प्रकट होती है।
= {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)} **उत्तर**

घटना C = दोनों संख्याओं का योग कम-से-कम 7 है और 3 का गुणज है।
= दोनों संख्याओं का योग (7, 8, 9, 10, 11, 12) में से वे संख्याएँ हैं जो 3 का गुणज हैं।
= दोनों संख्याओं का योग 9 या 12
= {(3, 6), (4, 5) (5, 4), (6, 3), (6, 6)} **उत्तर**

घटनाओं A, B और C के परिणामों के निरीक्षण से यह स्पष्ट है कि

$A \cap B = \phi$ तथा $B \cap C = \phi$, $A \cap C \neq \phi$

अतः **घटनाएँ A तथा B** और **घटनाएँ B** तथा **C परस्पर अपवर्जी हैं, परन्तु घटनाएँ A** और **C अपवर्जी नहीं हैं।** **उत्तर**

प्रश्न 4. तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। माना घटना 'तीन चित दिखना' को A से, घटना 'दो चित और एक पट दिखना' को B से, घटना 'तीन पट दिखना' को C से और घटना 'पहले सिक्के पर चित दिखना' को D से निरूपित किया गया है। ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन-सी घटनाएँ (i) परस्पर अपवर्जी हैं? (ii) सरल हैं? (iii) मिश्र हैं?

हल : यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण में 3 सिक्कों को एक बार उछाला जाता है तो **प्रतिदर्श समष्टि** $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

घटना A : 3 चित दिखना = $\{HHH\}$

घटना B : 2 चित और एक पट दिखना
$= \{HHT, HTH, THH\}$

घटना C : 3 पट दिखना = $\{TTT\}$

घटना D : पहले सिक्के पर चित दिखना
$= \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

घटनाओं A, B, C और D के समुच्चयों के अवयवों के निरीक्षण से,

- **(i)** घटनाएँ A और B, A और C, B और C तथा C और D **परस्पर अपवर्जी हैं** क्योंकि इन युग्मों में किसी के भी अवयव परस्पर उभयनिष्ठ नहीं हैं। **उत्तर**
- **(ii)** $\because$ **घटना** A तथा **घटना** C में केवल एक-एक ही प्रतिदर्श बिन्दु हैं।
  अतः घटना A तथा C सरल घटनाएँ हैं। **उत्तर**
- **(iii)** $\because$ **घटना** B और D में प्रत्येक में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु हैं। अतः B और D मिश्र घटनाएँ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 5. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित को बताइए :

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।

(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।

(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।

हल : जब तीन सिक्के एक बार यादृच्छिक उछाले जाते हैं तो

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

विभिन्न घटनाएँ :

घटना A : तीन चित प्राप्त होना $= \{HHH\}$

घटना B : तीन पट प्राप्त होना $= \{TTT\}$

घटना C : दो चित प्राप्त होना $= \{HHT, HTH, THH\}$

घटना D : दो पट प्राप्त होना $= \{HTT, THT, TTH\}$

घटना E : अधिकतम दो चित प्राप्त होना

$= \{(HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

घटना F : केवल एक चित प्राप्त होना

$= \{HTT, THT, TTH\}$

घटना G : केवल एक पट प्राप्त होना

$= \{HHT, HTH, THH\}$

- **(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।**

स्पष्ट है कि घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी हैं। **उत्तर**

- **(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।**

$\because$ **घटना** $A = \{HHH\}$, **घटना** $B = \{TTT\}$

घटना $E = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

स्पष्ट है कि $A \cap E = \phi, E \cap B = \phi, B \cap A = \phi$

और $A \cup E \cup B = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\} = S$

अत: घटनाएँ A, E और B परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं। **उत्तर**

- **(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।**

$\because$ **घटना** $C = \{HHT, HTH, THH\}$

घटना $E = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$

स्पष्ट है $C \cap E \neq \phi$

अत: घटनाएँ C और E अपवर्जी नहीं हैं। **उत्तर**

- **(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं, किन्तु नि:शेष नहीं हैं।**

घटना C $: \{HHT, HTH, THH\}$

घटना D $: \{HTT, THT, TTH\}$

$\because$ $C \cap D = \phi$ पर

$C \cup D = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\} \neq S$

अत: घटनाएँ C और D परस्पर अपवर्जी तो हैं, किन्तु नि:शेष नहीं हैं। **उत्तर**

- **(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं, परन्तु नि:शेष नहीं हैं।**

घटना $A = \{HHH\}$

घटना $C = \{HHT, HTH, THH\}$

घटना $D = \{HTT, THT, TTH\}$

$\because$ $A \cap C = \phi$; $C \cap D = \phi$; $A \cap D = \phi$

और $A \cup C \cup D = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\} \neq S$

अत: घटनाएँ A, C और D परस्पर अपवर्जी तो हैं, परन्तु नि:शेष नहीं हैं। **उत्तर**

इसके अतिरिक्त अन्य उत्तर भी सम्भव हैं।

प्रश्न 6. दो पासे फेंके जाते हैं। घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित प्रकार से हैं :

A : पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना।

B : पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

C : पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 5 होना।

निम्नलिखित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए :

I. A′	**II. B-नहीं**
III. A या B	**IV. A और B**
V. A किन्तु C-नहीं	**VI. B या C**
VII. B और C	**VIII. $A \cap B' \cap C'$**

हल : यादृच्छया दो पासे फेंके जाते हैं तो

प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

घटना A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना।

$$\therefore A = \left\{\begin{matrix} (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{matrix}\right\}$$

घटना B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

$$\therefore B = \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \end{matrix}\right\}$$

घटना C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 5 होना

तब, **प्रतिदर्श समष्टि** $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

- **I.** $A' = S - A$

$$= \left\{\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \end{matrix}\right\} = B$$

उत्तर

- **II. घटना B-नहीं** $= B'$

$S - B =$

$$\left\{\begin{matrix}(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\} = A$$

- **III. घटना A या B**

$A \cup B =$

$$\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\} = S$$

- **IV. घटना A और B** $= A \cap B = \phi$ **उत्तर**
- **V. घटना A किन्तु C नहीं** $= A - C$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A$ परन्तु $(x, y) \notin C\}$

$$= \left\{\begin{matrix}(2,4),(2,5),(2,6),(4,2),(4,3),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),\\(4,4),(4,5),(4,6),\\(6,5),(6,6),\end{matrix}\right\}$$ **उत्तर**

- **VI. घटना B या C** $= B \cup C$

$= \{(x, y) : (x, y) \in B$ तथा $(x, y) \in C\}$

$$= \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\end{matrix}\right\}$$

- **VII. घटना B और C** $= B \cap C$

= समुच्चय B व समुच्चय C के सर्वनिष्ठ अवयवों का समुच्चय

$= \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(3, 1)(3, 2)\}$ **उत्तर**

- **VIII.** यहाँ $C' = S - C$

$$= \left\{\begin{matrix}(1,5),(1,6),\\(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$\therefore$ **घटना** $A \cap B' \cap C' = (A \cap B') \cap C'$

$= \{A \cap A\} \cap C'$

$(\because B' = S - B = A)$

$= A \cap C' \quad (\because A \cap A = A)$

= A व C' के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय

$$= \left\{\begin{matrix}(2,4),(2,5),(2,6),\\(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. उपर्युक्त प्रश्न 6 को देखिए और निम्नलिखित में सत्य या असत्य बताइए। अपने उत्तर का कारण भी दीजिए :

I. A और B परस्पर अपवर्जी हैं।

II. A और B परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं।

III. A = B′

IV. A और C परस्पर अपवर्जी हैं।

V. A और B′ परस्पर अपवर्जी हैं।

VI. A′, B′, C परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

हल : I. हम घटना A और B के अवयवों के निरीक्षण से पाते हैं।

$$A \cap B = \phi$$

अत: A और B परस्पर अपवर्जी हैं, **सत्य** है। **उत्तर**

- **II.** $\because$ $\quad A \cap B = \phi$

और $\quad A \cup B = S$

अत: A और B परस्पर अपवर्जी और नि:शेष हैं, **सत्य** है। **उत्तर**

- **III.** घटनाओं A तथा B' के अवयवों के निरीक्षण से स्पष्ट है कि $A = B'$

अत: $A = B'$ **सत्य** है। **उत्तर**

- **IV.** $\because A \cap C \neq \phi$

अत: A और C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं, अत: कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **V.** $\because$ खण्ड III. से $A = B'$

$\therefore$ A और B' परस्पर अपवर्जी नहीं हैं

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

- **VI.** A', B' और C परस्पर अपवर्जी और नि:शेष घटनाएँ हैं।

$\because \quad A' = B$

और $\quad B' = A$

$\therefore \quad A' \cap B' = B \cap A = \phi$

परन्तु $\quad B' \cap C \equiv A \cap C \neq \phi$, ऐसे ही

$A' \cap C \equiv B \cap C \neq \phi$

परन्तु $A' \cup B' \cup C \equiv B \cup A \cup C = S$

$\therefore$ घटनाएँ A', B' और C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं, परन्तु नि:शेष हैं।

अत: दिया गया कथन **असत्य** है। **उत्तर**

प्रश्नावली | 14.2

प्रश्न 1. प्रतिदर्श समष्टि $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ के परिणामों के लिए निम्नलिखित में से कौन-से प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं हैं :

परिणाम	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	−0.1	0.2	0.3	0.4	−0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

हल : किसी प्रयोग से सम्बद्ध प्रायिकता निर्धारण की वैधता का परीक्षण करने के लिए हम दिए गए प्रायिकता निर्धारण को प्रायिकता सम्बन्धी दो अभिगृहीतों की कसौटी पर परखेंगे जो कि निम्नवत् हैं :

(i) प्रत्येक $E_i \subseteq S$ के लिए $0 \le P(E_i) \le 1$

तथा (ii) यदि $S = \{E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n\}$ है तो

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_n) = 1$$

यहाँ दिया है, $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

- **(a)** दिया है, $P(\omega_1) = 0.1$; $P(\omega_5) = 0.01$;
  $P(\omega_2) = 0.01$; $P(\omega_6) = 0.2$;
  $P(\omega_3) = 0.05$; $P(\omega_7) = 0.6$;
  $P(\omega_4) = 0.03$;

प्रतिबन्ध (i) : $\because$ सभी $P(\omega_i)$ शून्य और 1 के मध्य में हैं। अत:

प्रतिबन्ध $0 \le P(\omega_i) \le 1$ सन्तुष्ट होता है।

प्रतिबन्ध (ii) :

$\because$ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7)$

$= (0.1 + 0.01 + 0.05 + 0.03 + 0.01 + 0.2 + 0.6)$

$= 1.00$

$\therefore$ प्रतिबन्ध $\Sigma P(\omega_i) = 1$ भी सन्तुष्ट होता है।

अत: प्रायिकता निर्धारण वैध है। **उत्तर**

- **(b)** यहाँ $P(\omega_1) = \frac{1}{7}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{7}$;
  $P(\omega_3) = \frac{1}{7}$; $P(\omega_4) = \frac{1}{7}$;
  $P(\omega_5) = \frac{1}{7}$; $P(\omega_6) = \frac{1}{7}$;
  $P(\omega_7) = \frac{1}{7}$

प्रतिबन्ध (i) :

$\because$ प्रत्येक $P(\omega_i)$ शून्य और 1 के बीच में है

$\therefore$ $0 \le P(\omega_i) \le 1$ सन्तुष्ट होता है।

और **प्रतिबन्ध (ii) :** $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7)$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 1$$

$\therefore$ प्रतिबन्ध (ii) भी सन्तुष्ट होता है।

अत: प्रायिकता निर्धारण वैध है। **उत्तर**

- **(c)** यहाँ $P(\omega_1) = 0.1$; $P(\omega_2) = 0.2$;
  $P(\omega_3) = 0.3$; $P(\omega_4) = 0.4$; $P(\omega_5) = 0.5$;
  $P(\omega_6) = 0.6$ तथा $P(\omega_7) = 0.7$

$\because$ प्रत्येक $P(\omega)_i$ शून्य और 1 के बीच में है,

$\therefore$ प्रतिबन्ध (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ सन्तुष्ट होता है।

परन्तु सभी प्रायिकताओं का योग

$$\Sigma P(\omega_i) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 = 2.8 \ne 1$$

$\therefore$ प्रतिबन्ध $\Sigma P(\omega)_i = 1$ सन्तुष्ट नहीं होता।

अत: प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है। **उत्तर**

- **(d)** यहाँ $P(\omega_1) = -0.1$; $P(\omega_2) = 0.2$;
  $P(\omega_3) = 0.3$; $P(\omega_4) = 0.4$;
  $P(\omega_5) = -0.2$; $P(\omega_6) = 0.1$;
  $P(\omega_7) = 0.3$

$\because$ $P(\omega_1)$ और $P(\omega_5)$ ऋणात्मक हैं

$\therefore$ प्रतिबन्ध (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ सन्तुष्ट नहीं होता है।

अत: प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है। **उत्तर**

- **(e)** $P(\omega_1) = \frac{1}{14}$; $P(\omega_2) = \frac{2}{14}$;
  $P(\omega_3) = \frac{3}{14}$; $P(\omega_4) = \frac{4}{14}$;
  $P(\omega_5) = \frac{5}{14}$; $P(\omega_6) = \frac{6}{14}$;
  $P(\omega_7) = \frac{15}{14}$;

$\because$ सभी प्रायिकताएँ धनात्मक हैं और 1 से कम हैं, परन्तु प्रायिकता

$$P(\omega_7) > 1$$

$\therefore$ प्रतिबन्ध (i) $0 \le P(\omega_i) \le 1$ सन्तुष्ट नहीं होता है।

अत: प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 2. एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। कम-से-कम एक पट प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को 2 बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ जबकि $H =$ चित तथा $T =$ पट है।

कम-से-कम एक पट प्राप्त होने की घटनाएँ

$$= \{HT, TH, TT\}$$

तब, $n(S) = 4$ और $n(E) = 3$

तब, घटना E की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

अत: कम-से-कम एक पट प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) एक अभाज्य संख्या प्रकट होना।

(ii) 3 अथवा 3 से बड़ी संख्या प्रकट होना।

(iii) 1 अथवा 1 से छोटी संख्या प्रकट होना।

(iv) छः से बड़ी संख्या प्रकट होना।

(v) छः से छोटी संख्या प्रकट होना।

हल : एक पासा फेंकने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\therefore$ $n(S) = 6$

- **(i)** एक अभाज्य संख्या प्रकट होने की घटना

$$A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$\therefore$ घटना A की प्रायिकता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अत: **एक अभाज्य संख्या प्रकट होने की प्रायिकता** $= \frac{1}{2}$ **उत्तर**

- **(ii)** 3 या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होने की घटना

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$\therefore$ घटना B की प्रायिकता $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

अत: **तीन या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होने की प्रायिकता** $= \frac{2}{3}$ **उत्तर**

- **(iii)** 1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होने की घटना $C = \{1\}$

$\Rightarrow$ $n(C) = 1$

$\therefore$ घटना C की प्रायिकता $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

अत: **1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होने की प्रायिकता** $= \frac{1}{6}$ **उत्तर**

- **(iv)** 6 से बड़ी संख्या प्रकट होने की घटना

$$D = \{\ \} = \phi \Rightarrow n(D) = 0$$

अत: 6 **से बड़ी संख्या प्रकट होने की प्रायिकता** $= \frac{0}{6} = 0$ **उत्तर**

- **(v)** 6 से छोटी संख्या प्रकट होने की घटना

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow n(E) = 5$$

$\therefore$ घटना E की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{6}$

अत: **6 से छोटी संख्या प्रकट होने की प्रायिकता** $= \frac{5}{6}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया है।

(a) ज्ञात कीजिए कि प्रतिदर्श समष्टि में कितने बिन्दु हैं?

(b) ज्ञात कीजिए कि पत्ते का हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता क्या है?

(c) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्ता (i) इक्का है, (ii) काले रंग का है।

हल : जब ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकालने पर निकाला गया पत्ता 52 पत्तों में से कोई भी हो सकता है।

- **(a)** प्रतिदर्श समष्टि के बिन्दुओं की संख्या $n(S) = 52$ **उत्तर**
- **(b)** $\because$ ताश की गड्डी में हुकुम का केवल एक इक्का होता है, अत: इस घटना का अनुकूल परिणाम केवल 1 है।

अत: निकाला गया पत्ता हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$ **उत्तर**

- **(c)** $\because$ ताश की गड्डी में इक्के 4 होते हैं तथा काले पत्तों की कुल संख्या 26 होती है।

(i) खींचा गया पत्ता इक्का होने की घटना E हो तो

$$n(E) = 4$$

$\therefore$ घटना (E) की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

अत: खींचा गया पत्ता इक्का होने की प्रायिकता $= \frac{1}{13}$ **उत्तर**

(ii) खींचा गया पत्ता काले रंग का होने की घटना F हो तो

$$n(F) = 26$$

$\therefore$ घटना (F) की प्रायिकता $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

अत: खींचा गया पत्ता काले रंग का होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. एक अनभिनत (unbiased) सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिनत पासा, दोनों को उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रकट संख्याओं का योग (i) 3, (ii) 12 है।

हल : किसी परीक्षण में किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने की दिशा में सबसे पहला कार्य प्रतिदर्श समष्टि तथा घटना की पहचान करना तथा उन्हें लिखना है।

$\because$ सिक्के के एक ओर 1 तथा दूसरी ओर 6 लिखा है, अत: सिक्के को उछालने पर परिणाम 1 या 6 प्राप्त होगा।

पासे को उछालने पर परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 प्राप्त होगा।

जब दोनों एक साथ उछाले जाएँ तो प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)$$
$$(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6)\}$$

यहाँ प्रतिदर्श समष्टि में केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु (1, 2) ऐसा है जिसमें प्राप्त अंकों का योग 3 है।

यदि प्रकट संख्याओं का योग 3 होने की घटना E_1 हो तो

$$E_1 = \{(1, 2)\}$$

इसी प्रकार प्रतिदर्श समष्टि में केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु (6, 6) ऐसा है, जिसमें प्राप्त अंकों का योग 12 है।

$\therefore$ यदि प्रकट संख्याओं का योग 12 होने की घटना E_2 हो तो

$$E_2 = \{(6, 6)\}$$

$\because$ किसी घटना E की प्रायिकता $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

जहाँ $n(E)$ व $n(S)$ क्रमश: घटना E व प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्याएँ हैं।

अत: स्पष्ट है कि अब हमें क्रमश: $n(E_1)$, $n(E_2)$ व $n(S)$ ज्ञात करने होंगे।

यहाँ $n(S) = 12$, $n(E_1) = 1$

तथा $n(E_2) = 1$

- **(i)** $\therefore$ घटना E_1 की प्रायिकता $P(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} = \dfrac{1}{12}$

अत: **प्रकट संख्याओं का योग 3 होने की प्रायिकता**

$= \dfrac{1}{12}$ **उत्तर**

- **(ii)** $\therefore$ घटना E_2 की प्रायिकता $P(E_2) = \dfrac{n(E_2)}{n(S)} = \dfrac{1}{12}$

अत: **प्रकट संख्याओं का योग 12 होने की प्रायिकता**

$= \dfrac{1}{12}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. नगर परिषद् में चार पुरुष तथा छः स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक परिषद् सदस्य चुना गया है तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी सम्भावना है ?

हल : माना परिषद् के सदस्यों में M_1, M_2, M_3, M_4 चार पुरुष व $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6$ छह स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक सदस्य चुना जाता है तो

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$

$\Rightarrow$ $n(S) = 10$

यदि चुने गए सदस्य का स्त्री होना घटना E से व्यक्त हो तो

$$E = \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$$

$\Rightarrow$ $n(E) = 6$

$\therefore$ घटना E की प्रायिकता $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

अत: चुना गया सदस्य स्त्री होने की सम्भावना (प्रायिकता)

$= \dfrac{3}{5}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. एक अनभिनत सिक्के को चार बार उछाला जाता है और एक व्यक्ति प्रत्येक चित पर ₹ 1 जीतता है और प्रत्येक पट पर ₹ 1.50 हारता है। इस परीक्षण की प्रतिदर्श समष्टि से ज्ञात कीजिए कि आप चार उछालों में कितनी विभिन्न राशियाँ प्राप्त कर सकते हैं? साथ ही इन राशियों में से प्रत्येक की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को यादृच्छया चार बार उछाला गया है। यदि चित को H से तथा पट को T से व्यक्त किया जाए तो परीक्षण की प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \left\{\begin{matrix} HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, \\ HTHT, HTTH, HTTT, \\ THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, \\ TTHT, TTTH, TTTT \end{matrix}\right\}$$

स्पष्ट है कि चार उछालों में हम निम्नलिखित घटनाएँ प्राप्त कर सकते हैं :

घटना A : चारों चित प्राप्त होना $\equiv$ ₹ 4.00 की जीत

घटना B : 3 चित प्राप्त होना व एक पट प्राप्त होना $\equiv (3 \times 1) - 1.50 =$ ₹ 1.50 की जीत

घटना C : 2 चित्त प्राप्त होना व दो पट प्राप्त होना $\equiv (2 \times 1) - (2 \times 1.50) =$ ₹ 1.00 की हार

घटना D : 1 चित प्राप्त होना व 3 पट प्राप्त होना $\equiv (1 - 3 \times 1.50) =$ ₹ 3.50 की हार

घटना E : चारों पट प्राप्त होना $\equiv (4 \times 1.50)$

$= ₹\ 6$ की हार

घटना A $= \{HHHH\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 1$

तब, **घटना B** $= \{HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$

$\Rightarrow \quad n(B) = 4$

घटना C $= \{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$

$\Rightarrow \quad n(C) = 6$

घटना D $= \{HTTT, THTT, TTHT, TTTH\}$

$\Rightarrow \quad n(D) = 4$

घटना E $= \{TTTT\} \quad \Rightarrow \quad n(E) = 1$

तब, **घटना** A अर्थात ₹ **4.00 जीतने की प्रायिकता**

$= P$ (₹ 4.00 जीतना) $= \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{16}$ **उत्तर**

घटना B अर्थात ₹ **1.50 जीतने की प्रायिकता**

$= P$ (₹ 1.50 जीतना) $= \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ **उत्तर**

घटना C अर्थात ₹ **1.00 हारने की प्रायिकता**

$= P$ (₹ 1.00 हारना) $= \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$ **उत्तर**

घटना D अर्थात ₹ **3.50 हारने की प्रायिकता**

$= P$ (₹ 3.50 हारना) $= \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ **उत्तर**

तथा **घटना** E अर्थात ₹ **6.00 हारने की प्रायिकता**

$= P$ (₹ 6.00 हारना) $= \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{16}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। निम्नलिखित प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

I. तीन चित प्रकट होना।
II. 2 चित प्रकट होना।
III. न्यूनतम 2 चित प्रकट होना।
IV. अधिकतम 2 चित प्रकट होना।
V. एक भी चित प्रकट न होना।
VI. 3 पट प्रकट होना।
VII. तथ्यत: 2 पट प्रकट होना।
VIII. कोई भी पट प्रकट न होना।
IX. अधिकतम 2 पट प्रकट होना।

हल : तीन सिक्कों को एक बार उछालने पर, परीक्षण की प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \begin{Bmatrix} HHH, & HHT, & HTH, & HTT, \\ THH, & THT, & TTH, & TTT, \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad n(S) = 8$

- **I. घटना** A : 3 चित प्रकट होना $= \{H\ H\ H\}$

$\Rightarrow \quad n(A) = 1$

अत: 3 चित प्रकट होने की प्रायिकता $= \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{8}$ **उत्तर**

- **II. घटना** B : 2 चित प्रकट होना

$= \{HHT, HTH, THH\}$

$\Rightarrow \quad n(B) = 3$

अत: 2 चित प्रकट होने की प्रायिकता $= \dfrac{n(B)}{n(S)}$

$= \dfrac{3}{8}$ **उत्तर**

- **III. घटना** C : न्यूनतम 2 चित प्रकट होना

$= \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

$\Rightarrow \quad n(C) = 4$

अत: न्यूनतम 2 चित प्रकट होने की प्रायिकता

$= \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ **उत्तर**

- **IV. घटना** D : अधिकतम 2 चित प्रकट होना

$= \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$\Rightarrow \quad n(D) = 7$

अत: अधिकतम 2 चित प्रकट होने की प्रायिकता

$= \dfrac{n(D)}{n(S)} = \dfrac{7}{8}$ **उत्तर**

- **V. घटना** E : एक भी चित प्रकट न होना अर्थात् तीनों प्रकट होना

$= \{T\ T\ T\} \quad \Rightarrow \quad n(E) = 1$

अत: एक भी चित प्रकट न होने की प्रायिकता

$= \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{1}{8}$ **उत्तर**

- **VI. घटना** F : 3 पट प्रकट होना $= \{T\ T\ T\}$

$\Rightarrow \quad n(F) = 1$

अत: 3 पट प्रकट होने की प्रायिकता $= \dfrac{n(F)}{n(S)} = \dfrac{1}{8}$ **उत्तर**

- **VII. घटना** G : तथ्यत: 2 पट प्रकट होना

$= \{HTT, THT, TTH\}$

$\Rightarrow \quad n(G) = 3$

अत: तथ्यत: 2 पट प्रकट होने की प्रायिकता $= \dfrac{n(G)}{n(S)}$

$= \dfrac{3}{8}$ **उत्तर**

● **VIII. घटना** H : कोई भी पट प्रकट न होना अर्थात् तीनों चित प्रकट होना

$$= \{HHH\} \Rightarrow n(H) = 1$$

अत: कोई भी पट प्रकट न होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$ **उत्तर**

● **IX. घटना** K : अधिकतम दो पट प्रकट होना

$$= \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$$

$\Rightarrow \quad n(K) = 7$

अत: अधिकतम दो पट प्रकट होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ है तो घटना 'A-नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ घटना A की प्रायिकता $P(A) = \frac{2}{11}$

$\therefore$ घटना 'A-नहीं' की प्रायिकता $= 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. शब्द ASSASSINATION से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर

(i) एक स्वर (vowel),

(ii) एक व्यंजन (consonant) है।

हल : शब्द **'ASSASSINATION'** में अक्षरों की कुल संख्या = 13

अक्षर $A = 3, \quad S = 4, \quad I = 2, \quad N = 2, \quad T = 1$ तथा $O = 1$

$\therefore$ स्वरों की संख्या $= 3 + 2 + 1 = 6$

तथा व्यंजनों की संख्या $= 4 + 2 + 1 = 7$

13 अक्षरों में 1 अक्षर चुनने की विधियाँ $= {}^{13}C_1 = 13$

$\therefore$ यादृच्छिक परीक्षण में 1 अक्षर चुनने के लिए प्रतिदर्श समष्टि S के प्रतिदर्श बिन्दु $n(S) = 13$

● **(i) यदि चुना हुआ अक्षर एक स्वर** (vowel) **है** तो 6 स्वरों में से एक स्वर चुनने की कुल विधियाँ $= {}^6C_1 = 6$

$\therefore$ 6 स्वरों में से 1 स्वर चुनने की घटना (E) हो तो

$$n(E) = 6$$

अत: चुना हुआ अक्षर एक स्वर होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{13}$$ **उत्तर**

● **(ii)** यदि चुना हुआ अक्षर एक व्यंजन (consonant) है तो 7 व्यंजनों में से 1 व्यंजन चुनने की कुल विधियाँ

$$= {}^7C_1 = 7$$

$\therefore$ 7 व्यंजनों में से 1 व्यंजन चुनने की घटना (F) हो तो

$$n(F) = 7$$

अत: चुना हुआ अक्षर एक व्यंजन होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{7}{13}$$ **उत्तर**

प्रश्न 11. एक लाटरी में एक व्यक्ति 1 से 20 तक की संख्याओं में से छः भिन्न-भिन्न संख्याएँ यादृच्छया चुनता है और यदि ये चुनी गईं छः संख्याएँ उन छः संख्याओं से मेल खाती हैं जिन्हें लाटरी समिति ने पूर्व-निर्धारित कर रखा है तो वह व्यक्ति इनाम जीत जाता है। लाटरी के खेल में इनाम जीतने की प्रायिकता क्या है?

हल : 1 से 20 तक की संख्याओं में से 6 संख्याएँ चुनने की कुल विधियाँ $= {}^{20}C_6$

$\therefore$ यादृच्छया 6 संख्याएँ चुनने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि S के कुल प्रतिदर्श बिन्दु $= {}^{20}C_6$

लाटरी समिति द्वारा पूर्व-निर्धारित अंक का सेट भी इन्हीं विधियों में से 1 विधि होगी।

अत: लाटरी के खेल में इनाम जीतने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{{}^{20}C_6} = \frac{1}{38760}$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित प्रायिकताएँ P (A) और P(B) युक्तिसंगत परिभाषित की गई हैं :

(a) $P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.7, \quad P(A \cap B) = 0.6$

(b) $P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.4, \quad P(A \cup B) = 0.8$

हल : (a) दिया है, $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7$

तथा $P(A \cap B) = 0.6$

$\because \quad A \cap B \subseteq A$ तथा $A \cap B \subseteq B$

$\therefore \quad P(A \cap B) \le P(A)$

तथा $P(A \cap B) \le P(B)$

परन्तु यहाँ हम देखते हैं कि $P(A \cap B) > P(A)$

अत: प्रायिकताएँ $P(A)$ तथा $P(B)$ युक्तिसंगत नहीं हैं। **उत्तर**

● **(b)** दिया है, $P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.4$

तथा $P(A \cup B) = 0.8$

$\because \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= 0.5 + 0.4 - 0.8 = 0.1$$

क्योंकि $P(A \cap B) < P(A)$ तथा $P(B)$

अत: प्रायिकताएँ $P(A)$ तथा $P(B)$ युक्तिसंगत हैं। **उत्तर**

प्रश्न 13. निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थान भरिए :

	P (A)	**P (B)**	**P (A∩B)**	**P (A∪B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	...

(ii) 0.35 ... 0.25 0.6
(iii) 0.5 0.35 ... 0.7

हल : **(i)** दिया है,

$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{15}$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5+3-1}{15}$

$= \frac{7}{15}$

$\therefore \quad P(A \cup B) = \frac{7}{15}$

अत: रिक्त स्थान में $\frac{7}{15}$ आएगा। **उत्तर**

● **(ii)** दिया है, $P(A) = 0.35, P(A \cap B) = 0.25,$
$P(A \cup B) = 0.6$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad 0.6 = 0.35 + P(B) - 0.25$

$\Rightarrow \quad P(B) = 0.6 + 0.25 - 0.35 = 0.50$

$\therefore \quad P(B) = 0.50$

अत: रिक्त स्थान में **0.5** आएगा। **उत्तर**

● **(iii)** दिया है, $P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.35,$
$P(A \cup B) = 0.7$

$\because \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad 0.7 = 0.5 + 0.35 - P(A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0.5 + 0.35 - 0.7 = 0.15$

$\therefore \quad P(A \cap B) = 0.15$

अत: रिक्त स्थान में 0.15 आएगा। **उत्तर**

प्रश्न 14. P (A) = $\frac{3}{5}$ और P (B) = $\frac{1}{5}$ दिया गया है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो P(A या B) ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $P(A) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = \frac{1}{5}$

$\because$ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

$\therefore \quad A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0$

$\because$ **P (A या B)** $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{4}{5}$

अत: $P(A$ या $B) = \frac{4}{5}$ **उत्तर**

प्रश्न 15. यदि घटनाएँ E और F इस प्रकार हैं कि P(E) = $\frac{1}{4}$, P (F) = $\frac{1}{2}$ तथा P (E और F) = $\frac{1}{8}$ तो निम्नलिखित प्रत्येक को ज्ञात कीजिए :

(i) P (E या F) (ii) P (E-नहीं और F-नहीं)

हल : दिया है, $P(E) = \frac{1}{4}$,

$P(F) = \frac{1}{2}$

और $\quad P(E$ और $F) = P(E \cap F) = \frac{1}{8}$

● **(i)** अब $P(E$ या $F)$

$= P(E \cup F)$

$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$

अत: $P(E$ या $F) = \frac{5}{8}$ **उत्तर**

● **(ii)** $P(E$-नहीं और F-नहीं$) \equiv P(E'$ और $F')$

$\equiv P(E' \cap F')$

$= P(E \cup F)'$

(डिमॉर्गन के नियम से)

$= 1 - P(E \cup F)$

$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$\left[\because P(E \cup F) = \frac{5}{8}\right]$

अत: $P(E$-नहीं और F-नहीं$) = \frac{3}{8}$ **उत्तर**

प्रश्न 16. घटनाएँ E और F इस प्रकार हैं कि P (E-नहीं या F-नहीं) = 0.25 है। ज्ञात कीजिए कि E और F परस्पर अपवर्जी हैं या नहीं।

हल : $\because$ घटनाएँ E तथा F ऐसी हैं कि

$P(E$-नहीं या F-नहीं$) = 0.25$

या $\quad P(E' \cup F') = 0.25$

या $\quad P(E \cap F)' = 0.25$

या $\quad 1 - P(E \cap F) = 0.25$

या $\quad P(E \cap F) = 1 - 0.25 = 0.75 \neq 0$

$\because \quad P(E \cap F) \neq 0,$ अत: घटनाएँ E तथा F अपवर्जी नहीं हैं। **उत्तर**

प्रश्न 17. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि P (A) = 0.42, P (B) = 0.48 और P (A और B) = 0.16 है। ज्ञात कीजिए :

(i) P (A -नहीं) (ii) P (B -नहीं)
(iii) P (A या B)

हल : घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि

$P(A) = 0.42, \quad P(B) = 0.48,$

$P(A$ और $B) = P(A \cap B) = 0.16$

● **(i)** $\quad P(A$-नहीं$) = P(A')$

$= 1 - P(A)$

$= 1 - 0.42 = 0.58$

अतः P (A-नहीं) $= 0.58$ **उत्तर**

● **(ii)** P (B-नहीं) $= P(B')$

$= 1 - P(B)$

$= 1 - 0.48 = 0.52$

अतः P (B-नहीं) $= 0.52$ **उत्तर**

● **(iii)** P (A या B) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.42 + 0.48 - 0.16$

$= 0.74$

अतः P (A या B) $= 0.74$ **उत्तर**

प्रश्न 18. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा।

हल : माना कि चुने गए विद्यार्थी के गणित पढ़ने की घटना M तथा जीव विज्ञान पढ़ने की घटना B है।

$\therefore \quad P(M) = 40\% = 0.4, \quad P(B) = 30\% = 0.3$

और $\quad P(M \cap B) = 10\% = 0.1$

तब, चुने गए विद्यार्थी के **गणित या जीव विज्ञान पढ़ने की घटना** $= M \cup B$

$\because \quad P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B)$

$= 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$

अतः चयनित विद्यार्थी के गणित अथवा जीव विज्ञान का विद्यार्थी होने की प्रायिकता $= 0.6$ **उत्तर**

प्रश्न 19. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों (tests) के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.8 और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम-से-कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों की उत्तीर्ण करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रवेश परीक्षा का पहला परीक्षण T_1 तथा दूसरा परीक्षण T_2 है।

यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता $P(T_1) = 0.8$

और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$P(T_2) = 0.7$

दोनों परीक्षणों में कम-से-कम एक में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$P(T_1 \cup T_2) = 0.95$

तब, दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता

$= P(T_1 \cap T_2)$

अब, $P(T_1 \cup T_2) = P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2)$

$\Rightarrow \quad 0.95 = 0.8 + 0.7 - P(T_1 \cap T_2)$

$\Rightarrow \quad P(T_1 \cap T_2) = 0.8 + 0.7 - 0.95 = 0.55$

अतः चयनित विद्यार्थी के दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $= 0.55$ **उत्तर**

प्रश्न 20. एक विद्यार्थी के अन्तिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिन्दी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार, हिन्दी विषय को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $= P(H)$

और अंग्रेजी विषय को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $= P(E)$

तब, दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता

$P(H \cap E) = 0.5$

अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता

$P(E) = 0.75$

कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता

$P(H \cup E)' = 0.1$

$\Rightarrow \quad 1 - P(H \cup E) = 0.1$

$\Rightarrow \quad P(H \cup E) = 1 - 0.1 = 0.9$

अब $\quad P(H) + P(E) - P(H \cap E) = P(H \cup E)$

$\Rightarrow \quad P(H) + 0.75 - 0.5 = 0.9$

$\Rightarrow \quad P(H) = 0.9 - 0.75 + 0.5 = 0.65$

अतः हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $= 0.65$ **उत्तर**

प्रश्न 21. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एन० सी० सी० (N.C.C.), 32 ने एन० एस० एस० (N.S.S.) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) विद्यार्थी ने एन०सी०सी० या एन०एस०एस० को चुना है।

(ii) विद्यार्थी ने न तो एन०सी०सी० और न ही एन०एस०एस० को चुना है।

(iii) विद्यार्थी ने एन०एस०एस० को चुना है किन्तु, एन०सी०सी० को नहीं चुना है।

हल : माना चुने गए विद्यार्थी के N.C.C. को चुनने की घटना $= A$

तथा N.S.S. को चुनने की घटना $= B$

तब, $\quad n(A) = 30, \quad n(B) = 32, \quad n(A \cap B) = 24$

$\because$ प्रतिदर्श समष्टि S में कुल प्रतिदर्श बिन्दु $n(S) = 60$

$\therefore \quad P(A)$ = विद्यार्थी के N.C.C. को चुनने की प्रायिकता

$= \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$

और $P(B)$ = विद्यार्थी के N.S.S. को चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$$

और $P(A \cap B)$ = N.C.C. व N.S.S. दोनों को चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

- **(i)** विद्यार्थी द्वारा N.C.C. या N.S.S. चुनने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{15+16-12}{30} = \frac{19}{30}$$

अत: विद्यार्थी द्वारा N.C.C. या N.S.S. चुनने की प्रायिकता $= \frac{19}{30}$ **उत्तर**

- **(ii)** विद्यार्थी द्वारा न तो N.C.C. और न ही N.S.S. चुनने की प्रायिकता

$$P(A \text{ नहीं और } B \text{ नहीं}) = P(A' \cap B')$$

$$= P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{19}{30}$$

$$\left[\because P(A \cup B) = \frac{19}{30}\right]$$

$$= \frac{11}{30}$$

अत: विद्यार्थी द्वारा न तो N.C.C. और न ही N.S.S. चुनने की प्रायिकता $= \frac{11}{30}$ **उत्तर**

- **(iii)** विद्यार्थी द्वारा N.S.S. चुनने किन्तु N.C.C. न चुनने की

प्रायिकता $= P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{8-6}{15} = \frac{2}{15}$$

अत: चयनित विद्यार्थी द्वारा N.S.S. चुनने किन्तु N.C.C. न चुनने की प्रायिकता $= \frac{2}{15}$ **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली तथा 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) सभी गोलियाँ नीली हैं।

(ii) कम-से-कम एक गोली हरी है।

हल : $\because$ डिब्बे में 10 लाल (R), 20 नीली (B) और 30 हरी (G) गोलियाँ हैं।

$\therefore$ गोलियों की कुल संख्या $= 10 + 20 + 30 = 60$

- **(i)** 20 नीली गोलियों में से सभी 5 नीली गोलियाँ चुनने की विधियाँ $= {}^{20}C_5$

और कुल 60 गोलियों में से 5 गोलियाँ चुनने की विधियाँ $= {}^{60}C_5$

$\therefore$ प्रतिदर्श समष्टि S के प्रतिदर्श बिन्दु $= n(S) = {}^{60}C_5$

और घटना B के अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(B) = {}^{20}C_5$

अत: सभी गोलियाँ नीले रंग की चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5}$$ **उत्तर**

- **(ii)** जब हम पाँचों गोलियाँ नीली अथवा लाल चुनते हैं तो स्पष्टत: उनमें एक भी गोली हरी नहीं होगी। **[Note]**

कुल 30 (10 लाल + 20 नीली) गोलियों में से 5 गोली चुनने की विधियाँ $= {}^{30}C_5$

$\therefore$ 5 में से 1 भी हरी गोली न चुनने की प्रायिकता $P(G')$

= पाँच गोली, लाल तथा नीली गोलियों में से

चुनने की प्रायिकता $= \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5}$

अत: कम-से-कम 1 गोली हरी चुनने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5}$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गए पत्तों में 3 ईंट और एक हुकुम का पत्ता है।

हल : 52 पत्तों में से 4 पत्ते निकालने की विधियाँ $= {}^{52}C_4$

$\therefore$ प्रतिदर्श समष्टि S के कुल परिणाम $n(S) = {}^{52}C_4$

$\because$ गड्डी में ईंट के 13 और हुकुम के 13 पत्ते होते हैं।

$\therefore$ 3 ईंट और 1 हुकुम का पत्ता निकालने की कुल विधियाँ

$$= {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$$

$\therefore$ घटना के अनुकूल विधियाँ, $n(E) = {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$

$\therefore$ अभीष्ट घटना E के

घटने की प्रायिकता $= \frac{n(E)}{n(S)}$

$$= \frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$$

अत: 3 ईंट और1 हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$$

उत्तर

प्रश्न 3. एक पासे के दो फलकों में से प्रत्येक पर संख्या '1' अंकित है, तीन फलकों में प्रत्येक पर संख्या '2' अंकित है और एक फलक पर संख्या '3' अंकित है। यदि पासा एक बार फेंका जाता है तो निम्नलिखित प्रत्येक को ज्ञात कीजिए :

(i) P (2) **(ii) P (1या 3)** **(iii) P (3-नहीं)**

हल : $\because$ पासे के दो फलकों में से प्रत्येक पर 1 अंकित है तीन फलकों में से प्रत्येक पर 2 अंकित है तथा एक फलक पर 3 अंकित है।

तब, पासे को फेंकने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$$

$\Rightarrow$ $n(S) = 6$

$\therefore$ पासे के ऊपर 1 प्राप्त होने की घटना $= \{1, 1\}$

$\Rightarrow$ $n(1) = 2$

पासे के ऊपर 2 प्राप्त होने की घटना $= \{2, 2, 2\}$

$\Rightarrow$ $n(2) = 3$

पासे के ऊपर 3 प्राप्त होने की घटना $= \{3\}$

$\Rightarrow$ $n(3) = 1$

तब, $P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ तथा $P(3) = \frac{1}{6}$

- **(i)** पासे के ऊपर 2 प्राप्त होने की प्रायिकता $P(2) = \frac{1}{2}$ **उत्तर**

- **(ii)** 1 या 3 अंकित होने की प्रायिकता P (1 या 3)

$= P(1) + P(3)$ ($\because$ घटनाएँ अपवर्जी हैं।)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अत: P (1 या 3) $= \frac{1}{2}$ **उत्तर**

- **(iii)** P (3–नहीं) = 3 अंकित न होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

अत: P (3–नहीं) $= \frac{5}{6}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. एक लाटरी में 10000 टिकट बेचे गए जिनमें दस समान इनाम दिए जाने हैं। कोई भी इनाम न मिलने की प्रायिकता क्या है यदि आप (a) एक टिकट खरीदते हैं? (b) दो टिकट खरीदते हैं? (c) 10 टिकट खरीदते हैं?

हल : $\because$ लाटरी के बिके हुए टिकटों की संख्या = 10000

और कुल इनामों की संख्या = 10

$\therefore$ उन टिकटों की संख्या जिन पर इनाम नहीं निकलेगा

$$= 10000 - 10 = 9990$$

यदि हमारा एक टिकट इन 9990 टिकटों में से निकलता है तो इमें इनाम नहीं मिलेगा।

- **(a) 1 टिकट खरीदने पर इनाम न मिलने की प्रायिकता**

$$= \frac{^{9990}C_1}{^{10000}C_1} = \frac{9990}{10000} = \frac{999}{1000}$$ **उत्तर**

- **(b)** इसी प्रकार, **2 टिकट खरीदने पर इनाम न मिलने की प्रायिकता** $= \frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ **उत्तर**

- **(c) 10 टिकट खरीदने पर इनाम न मिलने की प्रायिकता**

$$= \frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. 100 विद्यार्थियों में से 40 और 60 विद्यार्थियों के दो वर्ग बनाए गए हैं। यदि आप और आपका एक मित्र 100 विद्यार्थियों में हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) आप दोनों एक ही वर्ग में हों।

(b) आप दोनों अलग-अलग वर्गों में हों।

हल : माना 40 छात्रों वाला वर्ग A तथा शेष 60 छात्रों वाला वर्ग B है।

तब, 100 छात्रों को 40 तथा 60 छात्रों के दो वर्गों में बाँटने की कुल विधियाँ $= {}^{100}C_{40}$

- **(a)** दोनों छात्रों को वर्ग A में रखने की कुल विधियाँ

$$= {}^2C_2 \times {}^{98}C_{38} = {}^{98}C_{38}$$

दोनों छात्रों को वर्ग B में रखने की विधियाँ

$$= {}^2C_2 \times {}^{98}C_{58} = {}^{98}C_{58}$$

दो विशेष छात्रों को किसी एक ही वर्ग में रखने की कुल विधियाँ

$$= {}^{98}C_{38} + {}^{98}C_{58}$$

$\therefore$ दो विशेष छात्रों को एक ही वर्ग में रखने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{98}C_{38} + {}^{98}C_{58}}{{}^{100}C_{40}}$$

$$= \frac{40!\,60!}{100!}\left[\frac{98!}{38!\,60!} + \frac{98!}{58!\,40!}\right]$$

$$= \frac{40!\,60!}{100!} \times 98!\left[\frac{39 \times 40}{39 \times 40 \times 38! \times 60!} + \frac{59 \times 60}{58! \times 59 \times 60 \times 40!}\right]$$

$$= \frac{40!\,60! \times 98!}{100 \times 99 \times 98!}\left[\frac{1560 + 3540}{40!\ \ 60!}\right]$$

$$= \frac{5100}{9900} = \frac{17}{33}$$

अत: आप और आपके मित्र के एक वर्ग में होने की प्रायिकता $= \frac{17}{33}$ **उत्तर**

- **(b)** जब दो विशेष छात्र अलग-अलग वर्गों में होंगे तो निश्चित रूप से वे एक ही वर्ग में नहीं होंगे। **[Note]**

$\therefore$ आप और आपके मित्र (दोनों छात्र) की अलग-अलग वर्गों में होने की प्रायिकता

= 1 – दोनों के एक ही वर्ग में होने की प्रायिकता

$= 1 - \frac{17}{33} = \frac{16}{33}$

अतः आप और आपके मित्र की अलग-अलग वर्गों में होने की प्रायिकता

$= \frac{16}{33}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. तीन व्यक्तियों के लिए तीन पत्र लिखवाए गए हैं और प्रत्येक के लिए पता लिखा एक लिफाफा है। पत्रों को लिफाफों में यादृच्छया इस प्रकार डाला गया कि प्रत्येक लिफाफे में एक ही पत्र है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम-से-कम एक पत्र अपने सही लिफाफे में डाला गया है।

हल : $\because$ 3 पत्रों को अलग-अलग 3 लिफाफों में रखने की कुल सम्भावित विधियाँ $= 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

यदि दो पत्र (असंगत पते वाले) गलत लिफाफों में रखें तो तीसरा पत्र स्वतः ही गलत लिफाफे में रखा जाएगा।

पहला पत्र गलत लिफाफे में जाएगा यदि उसे निर्धारित लिफाफे को छोड़कर शेष दो लिफाफों में से किसी एक में डाल दिया जाए।

$\therefore$ प्रथम पत्र को गलत लिफाफे में डालने की विधियाँ = 2

अब दूसरे व तीसरे पत्रों को गलत लिफाफे में डालने की केवल एक विधि बचती है।

$\therefore$ तीनों पत्रों को गलत लिफाफों में डालने की विधियों की संख्या $= 2 \times 1 = 2$

$\therefore$ सभी पत्रों को गलत लिफाफों में रखने की प्रायिकता

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ कम-से-कम एक पत्र को सही लिफाफे में रखने की प्रायिकता $= 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

अतः कम-से-कम एक पत्र सही (संगत पते के) लिफाफे में होने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ और $P(A \cap B) = 0.35$, ज्ञात कीजिए :

(i) $P(A \cup B)$

(ii) $P(A' \cap B')$

(iii) $P(A \cap B')$

(iv) $P(B \cap A')$

हल : दो घटनाओं A तथा B के लिए,

$P(A) = 0.54;\ P(B) = 0.69$

और $P(A \cap B) = 0.35$

- **(i)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $= 0.54 + 0.69 - 0.35 = 0.88$

  अतः $P(A \cup B) = 0.88$ **उत्तर**

- **(ii)** $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$
  $= 1 - P(A \cup B)$
  $= 1 - 0.88 = 0.12$

  अतः $P(A' \cap B') = 0.12$ **उत्तर**

- **(iii)** $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
  $= 0.54 - 0.35 = 0.19$

  अतः $P(A \cap B') = 0.19$ **उत्तर**

- **(iv)** $P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B)$
  $= 0.69 - 0.35 = 0.34$

  अतः $P(B \cap A') = 0.34$ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक संस्था के कर्मचारियों में से 5 कर्मचारियों का चयन प्रबन्ध समिति के लिए किया गया है। पाँच कर्मचारियों का ब्योरा निम्नलिखित है :

क्रम नाम	लिंग	आयु (वर्षों में)
1. हरीश	**M**	**30**
2. रोहन	**M**	**33**
3. शीतल	**F**	**46**
4. ऐलिस	**F**	**28**
5. सलीम	**M**	**41**

इस समूह से प्रवक्ता पद के लिए यादृच्छया एक व्यक्ति का चयन किया गया। प्रवक्ता के पुरुष या 35 वर्ष से अधिक आयु का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ प्रबन्ध समिति के सदस्यों की संख्या = 5

पुरुष कर्मचारियों की संख्या = 3

35 वर्ष से अधिक आयु वालों की संख्या = 2

उक्त समिति से प्रवक्ता पद के लिए एक व्यक्ति चुनने की विधियाँ $n(S) = 5$

चयनित प्रवक्ता के पुरुष होने के सम्भावित परिणाम

$$n(M) = {}^3C_1 = 3$$

$\therefore$ चयनित प्रवक्ता के पुरुष होने की प्रायिकता

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{3}{5}$$

ऐसे ही चयनित प्रवक्ता के 35 वर्ष से अधिक होने के सम्भव परिणाम

$$n(35) = 2$$

$\therefore$ चयनित प्रवक्ता के 35 वर्ष से अधिक होने की प्रायिकता

$$P(35) = \frac{n(35)}{n(S)} = \frac{2}{5}$$

सूची को देखने से स्पष्ट है कि

ऐसे व्यक्तियों की संख्या जो 35 वर्ष से अधिक भी हों और पुरुष भी हों = 1

$\therefore$ चयनित व्यक्ति के पुरुष और 35 वर्ष से अधिक होने की प्रायिकता

$$P(M \cap 35) = \frac{1}{5}$$

तब, चयनित व्यक्ति के पुरुष या 35 वर्ष से अधिक होने की प्रायिकता

$$P(M \cup 35) = P(M) + P(35) - P(M \cap 35)$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{4}{5}$$ उत्तर

प्रश्न 9. यदि 0, 1, 3, 5 और 7 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या का यादृच्छया निर्माण किया गया हो तो पाँच से भाज्य संख्या के निर्माण की क्या प्रायिकता है जब

(i) अंकों की पुनरावृत्ति की जाए?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं की जाए?

हल : (i) यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है तो 5000 से बड़ी चार अंकीय संख्याएँ $= 2! \times (5)^3 = 250$

यदि संख्याएँ 5 से भाज्य हों तो उनकी संख्या

$$= 2! \times (5)^2 \times 2!$$
$$= 100$$

अत: अंकों की पुनरावृत्ति होने पर 5 से भाज्य चार अंकीय संख्या के निर्माण की प्रायिकता $= \frac{100}{250} = \frac{2}{5}$ उत्तर

● **(ii)** दिए गए अंक = 0, 1, 3, 5 और 7

चार अंकीय संख्याएँ 5000 से बड़ी तब होंगी जब हजार के स्थान पर अंक 5 या 7 चुना जाए।

इस हजार के स्थान को भरने की विधियों की संख्या = 2

हजार का स्थान भरने के बाद शेष तीन स्थानों को चार अंकों में से 3 के द्वारा भरा जा सकता है

जिनकी विधियाँ $^4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!}$

$$= 4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

दिए गए अंकों द्वारा बनने वाली 5000 से बड़ी

कुल संख्याएँ $= 2 \times 24 = 48$

उक्त संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी यदि इकाई के स्थान पर अंक 5 अथवा शून्य हो।

अत: उक्त अंकों में से चार अंकीय एवं 5 से भाज्य संख्याएँ निम्नलिखित पैटर्न पर बनाई जा सकती हैं :

(i) **7 _ _ 0 अथवा 5 ,**

इन संख्याओं की संख्या $= 1 \times {}^3P_2 \times 2$

(ii) **5 _ _ 0 ,**

इन संख्याओं की संख्या $= 1 \times {}^3P_2 \times 1$

∴ 5000 से बड़ी तथा 5 से विभाज्य संख्याओं की संख्या

$$= 1 \times {}^3P_2 \times 2 + 1 \times {}^3P_2 \times 1$$
$$= 3! \times 2 + 3! = 12 + 6 = 18$$

अत: अंकों की पुनरावृत्ति न होने पर 5000 से बड़ी तथा 5 से भाज्य चार अंकीय संख्या के निर्माण की प्रायिकता

$$= \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$ उत्तर

प्रश्न 10. किसी अटैची के ताले में चार चक्र लगे हैं जिनमें प्रत्येक पर 0 से 9 तक 10 अंक अंकित हैं। ताला चार अंकों के एक विशेष क्रम (अंकों की पुनरावृत्ति नहीं) द्वारा ही खुलता है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई व्यक्ति अटैची खोलने के लिए सही क्रम का पता लगा ले?

हल : ∵ ताले में चार चक्र हैं और प्रत्येक चक्र पर (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) 10 अंक अंकित हैं। ताला खोलने के लिए इन चक्रों पर अंकित अंकों से 4 अंकीय विशेष क्रम बनाना पड़ता है।

तब, सभी सम्भव क्रम की संख्या $= {}^{10}P_4$

$$= \frac{10!}{(10-4)!}$$

(∵ अंकों की पुनरावृत्ति नहीं है।)

$$= \frac{10!}{6!}$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$
$$= 5040$$

∵ ताला एक ही विशेष क्रम से खुल सकता है।

अत: कोई व्यक्ति ताला खोलने के सही क्रम का पता लगा ले, तो इसकी प्रायिकता $= \frac{1}{5040}$ उत्तर

❒