02 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन
(Inverse Trigonometric Functions)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 2.1

● **निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए—**

प्रश्न 1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

हल : माना $y = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\sin y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = -\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \sin y = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$[\because \sin(-y) = -\sin y]$

फलन $\sin^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है।

अत: $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 2. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

हल : माना $y = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

फलन $\cos^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi]$ है।

अत: $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 3. $\text{cosec}^{-1}(2)$

हल : माना $y = \text{cosec}^{-1}(2)$

$$\text{cosec}\, y = 2 = \text{cosec}\frac{\pi}{6}$$

फलन $\text{cosec}^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

अत: $\text{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

हल : माना $y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

$$\tan y = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3}$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$[\because \tan(-y) = -\tan y]$

फलन $\tan^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

अत: $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 5. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **[2017, 20]**

हल : माना $y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$[\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}$$

फलन $\cos^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi]$ है। $[\because \cos(-\theta) \neq -\cos\theta]$

अत: $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 6. $\tan^{-1}(-1)$

हल : माना $y = \tan^{-1}(-1)$

$$\Rightarrow \quad \tan y = -1 = -\tan\frac{\pi}{4}$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

फलन $\tan^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

अत: $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

हल : माना $y = \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow \quad \sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\frac{\pi}{6}$

फलन $\sec^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ है।

अत: $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$

हल : माना $y = \cot^{-1}(\sqrt{3})$

$\Rightarrow \quad \cot y = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6}$

फलन $\cot^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $(0, \pi)$ है।

अत: $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **[2018]**

हल : माना $y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow \quad \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$[\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$\therefore \quad \cos y = \cos\frac{3\pi}{4}$

फलन $\cos^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi]$ है। $[\because \cos(-\theta) \neq -\cos\theta]$

अत : $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान $\frac{3\pi}{4}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 10. $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ **[2019]**

हल : माना $y = \operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec} y = -\sqrt{2} = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

$= \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

फलन $\operatorname{cosec}^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ है।

अत: $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है। **उत्तर**

- **निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—**

प्रश्न 11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

हल : माना $x = \tan^{-1}(1)$

$\Rightarrow \quad \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$

जहाँ x का मुख्य मान $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

माना $\quad y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$[\because \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$\Rightarrow \quad y = \frac{2\pi}{3}$

जहाँ y का मुख्य मान $\in [0, \pi]$

$\therefore \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

माना $\quad z = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \sin z = -\frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \quad z = -\frac{\pi}{6}$

जहाँ z का मुख्य मान $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

अत: $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= x + y + z = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12}$

$= \frac{11\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

हल : माना $x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{3} \qquad \because x \in [0, \pi]$

माना $\quad y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \quad y = \frac{\pi}{6} \qquad \left[\because y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right]$

$$\therefore \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= x + 2y$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$ **उत्तर**

प्रश्न 13. यदि $\sin^{-1} x = y$ तो

(A) $0 \le y \le \pi$ **(B)** $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ **(D)** $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

हल : फलन $y = \sin^{-1} x$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है।

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

अत: विकल्प **(B)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है— **[2021, 22]**

(A) π **(B)** $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ **(D)** $\frac{2\pi}{3}$

हल : माना $x = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \left[\because x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

माना $y = \sec^{-1}(-2)$

$$\Rightarrow \quad \sec y = -2 = -\sec\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sec y = \sec\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2\pi}{3}\left[\because y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right]$$

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$$

$$= x - y = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

अत: विकल्प **(B)** सही है। **उत्तर**

? प्रश्नावली | 2.2

● **निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए—**

प्रश्न 1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. **[2018]**

हल : माना $\sin^{-1} x = \theta$

$$\therefore \quad \sin\theta = x$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \text{ से,}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 3\theta = 3x - 4x^3$$

$$\Rightarrow \quad 3\theta = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

$$\therefore \quad 3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

Proved.

प्रश्न 2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

हल : माना $\cos^{-1} x = \theta$

$$\therefore \quad \cos\theta = x$$

हम जानते हैं कि

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos 3\theta = 4x^3 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad 3\theta = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$

$$\therefore \quad 3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$

Proved.

● **निम्नलिखित फलनों को सरलतम रूप में लिखिए—**

प्रश्न 3. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}, x \ne 0$ **[2017, 18]**

हल : माना $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$

तथा $x = \tan\theta$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta} - 1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sec^2\theta} - 1}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{(\sec\theta - 1)}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\left[\frac{1}{\cos\theta} - 1\right]}{\tan\theta}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\left[\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right]}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\left[\because \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right.$$

$$\left.\text{तथा } \cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \tan^{-1} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1} \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\times\theta$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1} x$$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x|>1.$

हल : माना $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

माना $x = \sec\theta$

$\Rightarrow \quad \theta = \sec^{-1} x$

$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\right)$

$[\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta]$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\cot\theta$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\left[\because \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$$

$\therefore \quad \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), x<\pi$

हल : माना $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}}\right)$$

$$\left[\because \cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}\right.$$

$$\left.\text{तथा } \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

हल : माना $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

अंश तथा हर में $\cos x$ का भाग देने पर,

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)$$

$$\left[\because \tan\frac{\pi}{4} = 1\right]$$

$$y = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - x$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x|<a$

हल : माना $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

माना $x=a\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{x}{a} \Rightarrow \theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\therefore y=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\right)$

$y=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}\right)$

$y=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sin\theta}{a\cos\theta}\right)=\tan^{-1}\tan\theta$

$y=\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\left[\because \theta=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right]$ उत्तर

प्रश्न 8. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0, -\dfrac{a}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

हल : माना $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right)$

माना $x=a\tan\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{x}{a} \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\therefore y=\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2.a\tan\theta-a^3\tan^3\theta}{a^3-3a.a^2\tan^2\theta}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^3\tan\theta-a^3\tan^3\theta}{a^3-3a^3\tan^2\theta}\right)$

$=\tan^{-1}\left[\dfrac{a^3(3\tan\theta-\tan^3\theta)}{a^3(1-3\tan^2\theta)}\right]$

$=\tan^{-1}\left(\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$=\tan^{-1}\tan 3\theta$

$\left[\because \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\right]$

$=3\theta=3\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ उत्तर

प्रश्न 9. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y=\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)\right]$

हम जानते हैं,

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

$y=\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\tan^{-1}\left[2\cos\dfrac{\pi}{3}\right]$

$=\tan^{-1}[2\cos 60°]$

$=\tan^{-1}\left[2\times\dfrac{1}{2}\right] \left[\because \cos 60°=\dfrac{1}{2}\right]$

$=\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}\left[\because \tan\dfrac{\pi}{4}=1\right]$ उत्तर

● **प्रश्न संख्या 10 से 11 में दिए प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए—**

प्रश्न 10. $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

हल : माना $y=\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

माना $\sin^{-1}$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ है।

$\therefore y=\sin^{-1}\left[\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sin^{-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

$[\because \sin(\pi-\theta)=\sin\theta]$ उत्तर

प्रश्न 11. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

हल : माना $y=\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ है।

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$[\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \text{ तथा } \tan(-\theta) = -\tan\theta]$$

$$= \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan^{-1}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ **का मान बराबर है—**

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$

हल : दिया है : $\cos^{-1}\left[\cos\frac{7\pi}{6}\right]$

$\cos^{-1}$ परिसर मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi]$ है।

$$\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$[\because \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

अत: विकल्प **(B)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 13. $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **का मान है—** **[2016]**

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$ **(D)** 1

हल : दिया है : $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\left(\because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right\}\right]$$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sin\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

अत: विकल्प **(D)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ **का मान है—** **[2020]**

(A) π **(B)** $-\frac{\pi}{2}$

(C) 0 **(D)** $2\sqrt{3}$

हल : $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$

$$= \frac{\pi}{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$\left[\because \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\right]$$

$\cot^{-1}$ मुख्य मान शाखा का परिसर $(0, \pi)$ है।

$$\therefore \quad \cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \cot^{-1}\left(-\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left[\cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$[\because \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta]$$

$$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

अत: विकल्प **(B)** सही है। **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

● **निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

हल : माना $y = \cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

$\cos^{-1}$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $[0, \pi]$ है।

$$y = \cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$[\because \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta]$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{6}$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

हल : माना $y = \tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

$\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ है।

$$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left[\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\left[\because \tan(\pi + \theta) = \tan\theta\right]$$

$$= \tan^{-1}\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए :

$$\mathbf{\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}} \qquad \textbf{[2017, 21]}$$

हल : माना $\sin^{-1}\frac{8}{17} = \theta$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{8}{17}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\frac{8}{17}}{\sqrt{1-\frac{64}{289}}} = \frac{\frac{8}{17}}{\sqrt{\frac{225}{289}}}$$

$$= \frac{8/17}{15/17} = \frac{8}{17}\times\frac{17}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{15} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{8}{17} = \tan^{-1}\frac{8}{15}$$

माना $\quad \sin^{-1}\frac{3}{5} = \phi \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = \frac{3}{5}$

$$\therefore \quad \tan\phi = \frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{3/5}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{3/5}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{3/5}{4/5}$$

$$\tan\phi = \frac{3}{5}\times\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \textbf{L.H.S.} = \sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$$= \tan^{-1}\frac{8}{15} + \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{8}{15}+\frac{3}{4}}{1-\frac{8}{15}\times\frac{3}{4}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{32+45}{60}}{\frac{60-24}{60}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{77}{36} = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए :

$$\mathbf{\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}}$$

हल: माना $\quad \cos^{-1}\frac{4}{5} = \theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{4}{5}$

$$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

माना $\quad \cos^{-1}\frac{12}{13} = \phi \quad \Rightarrow \cos\phi = \frac{12}{13}$

$$\therefore \quad \sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}}$$

$$= \sqrt{\frac{169-144}{169}}$$

$$\sin\phi = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$\because$ सूत्र $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ से,

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$= \frac{48}{65} - \frac{15}{65}$$

$$= \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta+\phi) = \frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow \quad \theta+\phi = \cos^{-1}\frac{33}{65}$$

अत: $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$ **Proved.**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए :

$$\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{56}{65}$$

हल : माना $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{12}{13}$

$\therefore \quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{169-144}{169}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13} \quad ...(1)$$

माना $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\phi \Rightarrow \sin\phi=\frac{3}{5}$

$\therefore \quad \cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}$$

$$\cos\phi=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5} \quad ...(2)$$

$\because$ सूत्र $\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi$ से,

$$\sin(\theta+\phi)=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{20}{65}+\frac{36}{65}=\frac{20+36}{65}$$

$\Rightarrow \quad \sin(\theta+\phi)=\frac{56}{65}$

$\therefore \quad \theta+\phi=\sin^{-1}\frac{56}{65}$

अत: $\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{56}{65}$ **Proved.**

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{63}{16}=\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$$

हल : माना $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta=\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}=\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{\frac{169-25}{169}}}=\frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{\frac{144}{169}}}$$

$$\tan\theta=\frac{5/13}{12/13}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}$$

$\Rightarrow \quad \tan\theta=\frac{5}{12}$

$\Rightarrow \quad \theta=\tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{5}{12}$

माना $\cos^{-1}\frac{3}{5}=\phi \Rightarrow \cos\phi=\frac{3}{5}$

$\sin\phi=\sqrt{1-\cos^2\phi}$

$\Rightarrow \quad \sin\phi=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}$

$$=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow \quad \sin\phi=\frac{4}{5}$

अत: $\tan\phi=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{4/5}{3/5}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad \phi=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

$\therefore \quad \cos^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$

R.H.S. $=\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

$$=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{5}{12}+\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}}$$

$\left[\because \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{5+16}{12}}{\frac{36-20}{36}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{21}{12}}{\frac{16}{36}}=\tan^{-1}\frac{21}{12}\times\frac{36}{16}$$

$$= \tan^{-1}\frac{63}{16} = \textbf{L.H.S.}$$

अत: **L.H.S. = R.H.S.**

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ x \in [0,\ 1].$$

हल : $\textbf{R.H.S.} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

माना $x = \tan^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$\left[\because \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\theta = \theta = \tan^{-1}\sqrt{x}$$

$$= \textbf{L.H.S.}$$

अत: **L.H.S. = R.H.S.**

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए :

$$\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right] = \frac{x}{2},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

हल : L.H.S.

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\right.$$

$$\left.\frac{+\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{-\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\right]$$

$$\left[\because 1 = \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} \text{ तथा } \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}}\right.$$

$$\left.\frac{+\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right]$$

$$\left[\because x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right] = \cot^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$$ **[2020, 22]**

हल : $\textbf{L.H.S.} = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]$

माना $x = \cos 2\theta$

$\Rightarrow 2\theta = \cos^{-1}x$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+2\cos^2\theta-1}}{\sqrt{1+2\cos^2\theta-1}}\right.$$

$$\left.\frac{-\sqrt{1-(1-2\sin^2\theta)}}{+\sqrt{1-(1-2\sin^2\theta)}}\right]$$

$[\because \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1]$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2\cos^2\theta} - \sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta} + \sqrt{2\sin^2\theta}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}(\cos\theta - \sin\theta)}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right]$$

[अंश तथा हर में $\cos\theta$ से भाग देने पर]

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]$$

$$\left[\because 1 = \tan\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\left[\because \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \tan(x - y)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x = \textbf{R.H.S.}$$

❐