02 सम्बन्ध एवं फलन (Relations and Functions)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 2.1

प्रश्न 1. यदि $\left[\frac{x}{3}+1,\ y-\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right]$, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

$$\left[\frac{x}{3}+1,\ y-\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right]$$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}+1=\frac{5}{3}$

तथा $\quad y-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

अब, $\quad \frac{x}{3}+1=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad x=2$

तथा $\quad y-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$\therefore \quad x=2 \quad$ तथा $\quad y=1$ **उत्तर**

प्रश्न 2. यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय B = {3, 4, 5} है तो A × B में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $n(A)=3$ और $B=\{3,\ 4,\ 5\}$

$\Rightarrow \quad n(B)=3$

$\therefore \quad n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

$=3\times 3=9$

$(A\times B)$ में अवयवों की संख्या $=9$ **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि G = {7, 8} और H = {5, 4, 2} तो G × H और H × G ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $G=\{7,8\}$ और $H=\{5,4,2\}$

$\therefore \quad G\times H=\{(7,5),(7,4),(7,2),(8,5),(8,4),(8,2)\}$

और $\quad H\times G=\{(5,7),(5,8),(4,7),(4,8),(2,7),(2,8)\}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. बतलाइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है अथवा असत्य है। यदि कथन असत्य है तो दिए गए कथन को सही बनाकर लिखिए।

(i) यदि P = {m, n} और Q = {n, m} तो P × Q = {(m, n), (n, m)}

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय है तो A × B क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय है, इस प्रकार कि x ∈ B तथा y ∈ A

(iii) यदि A = {1, 2}, B = {3, 4} तो A × (B ∩ φ) = φ.

हल : (i) $\because \quad P=\{m,n\}$ और $Q=\{n,m\}$

$\therefore \quad n(P)=2 \quad$ तथा $\quad n(Q)=2$

$\therefore \quad n(P\times Q)=2\times 2=4$

जबकि प्रश्नानुसार $(P\times Q)=\{(m,n),(n,m)\}$

अर्थात $\quad n(P\times Q)=2$

अत: दिया गया कथन असत्य है।

सही कथन $P\times Q=\{(m,n),(m,m),(n,n),(n,m)\}$ है। **उत्तर**

- **(ii)** यदि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हों तो कार्तीय गुणन की परिभाषा से,

$A\times B=\{(x,y);\ \ x\in A;\ y\in B\}$

$\therefore$ कथन "$A\times B$ क्रमित युग्मों (x,y) का एक अरिक्त समुच्चय है, इस प्रकार कि $x\in B$ तथा $y\in A$" असत्य है।

सत्य कथन है : $A\times B$ क्रमित युग्मों (x,y) का एक अरिक्त समुच्चय है, इस प्रकार कि $x\in A$ तथा $y\in B$ **उत्तर**

- **(iii)** $\because \quad B\cap\phi=$ समुच्चय B एवं रिक्त समुच्चय ϕ के सर्वनिष्ठ अवयवों का समुच्चय $=\phi$

$\therefore \quad A\times(B\cap\phi)=A\times\phi=\phi$

अत: दिया गया कथन सत्य है। **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि A = {–1, 1} तो A × A × A ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \quad A=\{-1,1\}$

$\therefore \quad A\times A=\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$

तब, $A\times A\times A=A\times(A\times A)$

$=\{(-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,1,1)\}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि A × B = {(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)} तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \quad A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y)\}$

तब $A=A\times B$ के क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय $=\{a,a,b,b\}=\{a,b\}$

और $B = A \times B$ के क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का समुच्चय $= \{x, y, x, y\} = \{x, y\}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. मान लीजिए कि A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6} तथा D = {5, 6, 7, 8}, सत्यापित कीजिए कि

(i) A × (B ∩ C) = (A × B) ∩ (A × C).

(ii) A × C, B × D का एक उपसमुच्चय है।

हल : (i) दिया है, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$

और $C = \{5, 6\}$

$\therefore$ $B \cap C =$ समुच्चय B व C के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय $= \phi$

$\therefore$ $A \times (B \cap C) = \phi$ ...(1)

अब, $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

और $A \times C = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

$\therefore$ $(A \times B) \cap (A \times C) = (A \times B)$ व $(A \times C)$ के सर्वनिष्ठ क्रमित-युग्मों का समुच्चय $= \phi$

$\therefore$ $(A \times B) \cap (A \times C) = \phi$ ...(2)

तब, समीकरण (1) व (2) से,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Proved.

- **(ii)** पुन: $A \times C = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$ ...(1)

और $B \times D = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$

स्पष्ट है कि $A \times C$ के सभी (चार) क्रमित युग्म $B \times D$ के अन्तर्गत स्थित हैं।

अत: $A \times C, B \times D$ का एक उपसमुच्चय है। **उत्तर**

प्रश्न 8. मान लीजिए कि A = {1, 2} और B = {3, 4} तब A × B लिखिए। A × B के कितने उपसमुच्चय होंगे? उनकी सूची बनाइए।

हल : $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$

$\therefore$ $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ **उत्तर**

स्पष्ट है कि $n(A \times B) = 4$

$\therefore$ $A \times B$ में उपसमुच्चयों की संख्या $= (2)^4 = 16$

$A \times B$ के उपसमुच्चयों की सूची

$= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}, \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}, \{(2, 3), (2, 4), (1, 3)\}, \{(2, 4), (1, 3), (1, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4)\}\ \{(1, 3), (2, 3)\}, \{(1, 3), (2, 4)\}\ \{(1, 4), (2, 4)\}, \{(1, 4), (2, 3)\}, \{(2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3)\}, \{(1, 4)\}, \{(2, 3)\}, \{(2,4)\}, \phi$ **उत्तर**

प्रश्न 9. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ n (A) = 3 और n (B) = 2 यदि (x, 1), (y, 2), (z, 1), AB में हैं तो A और B को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

हल : यहाँ $n(A) = 3$ और $n(B) = 2$

तब $n(A \times B) = 3 \times 2 = 6$

$\because$ क्रमित युग्म $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ $A \times B$ में हैं।

$\therefore$ $A =$ क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय $= \{x, y, z\}$

और $B =$ क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का समुच्चय $= \{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$

अत: $A = \{x, y, z\}$ तथा $B = \{1, 2\}$ **उत्तर**

प्रश्न 10. कार्तीय गुणन A × A में 9 अवयव हैं, जिनमें (–1, 0) तथा (0, 1) भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा A × A के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ $A \times A$ में 9 अवयव हैं

$\therefore$ A में 3 अवयव हैं।

$\because$ क्रमित युग्म $(-1, 0)$, $A \times A$ में है $\therefore -1, 0 \in A$

इसी प्रकार क्रमित युग्म $(0, 1)$, $A \times A$ में है $\therefore 0, 1 \in A$

$\therefore$ $-1, 0, 1 \in A$

$\Rightarrow$ $A = \{-1, 0, 1\}$ **उत्तर**

तब, $A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$

$= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1) (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

अत: $A \times A$ के शेष अवयव $= (-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 2.2

प्रश्न 1. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3, ... , 14}, R = {(x, y) : 3 x – y = 0, जहाँ x, y ∈ A} द्वारा, A से A का सम्बन्ध R लिखिए। प्रान्त, सहप्रान्त और परिसर लिखिए।

हल : $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$

तथा $R = \{(x, y) : 3x - y = 0,$ जहाँ $x, y \in A\}$

$\because$ $3x - y = 0$

$\Rightarrow$ $y = 3x$

अत: $R = \{(x, 3x),$ जहाँ $x \in A\}$

हम देखते हैं कि केवल $y = 3, 6, 9, 12$ लेने पर क्रमश: $x = 1, 2, 3, 4$ अवयव समुच्चय A में प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ A का A से सम्बन्ध $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

अत: सम्बन्ध R का प्रान्त $= \{1, 2, 3, 4\}$, परिसर $= \{3, 6, 9, 12\}$ और सहप्रान्त $= \{1, 2, 3, 4, ... , 14\}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर R = {(x, y) : y = x + 5, x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, x, y ∈ N} द्वारा एक सम्बन्ध R परिभाषित कीजिए। इस सम्बन्ध को रोस्टर रूप में लिखिए तथा इसके प्रान्त और परिसर लिखिए।

हल : दिया है, $R = \{(x, y): y = x + 5, x$ संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in N\}$

$\because$ x, 4 से छोटा है और एक प्राकृत संख्या है

$\Rightarrow$ $x = 1, 2, 3$

तब $y = x + 5$ में $x = 1, 2, 3$ रखने पर क्रमश: $y = 6, 7$ व 8 प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ रोस्टर रूप में सम्बन्ध $R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

अत: सम्बन्ध R का प्रान्त = $\{1, 2, 3\}$

और परिसर = $\{6, 7, 8\}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. A = {1, 2, 3, 5} और B = {4, 6, 9}। A से B में एक सम्बन्ध R = {x, y} : x और y का अन्तर विषम है, x ∈ A, y ∈ B} द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल : $\because$ $x \in A$ तथा $y \in B$ जबकि x तथा y का अन्तर विषम है।

इससे स्पष्ट है कि हम $1 \in A$ के लिए $4 \in B$ व $6 \in B$ ले सकते हैं।

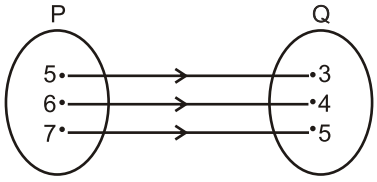
इस प्रकार $(1, 4) \in R$ तथा $(1, 6) \in R$

इसी प्रकार $2, 3, 5 \in A$ के लिए,

रोस्टर रूप में,

$\therefore$ $R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्न आकृति समुच्चय P से Q का एक सम्बन्ध दर्शाती है। इस सम्बन्ध को (i) समुच्चय निर्माण रूप (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रान्त तथा परिसर क्या हैं?



हल : चित्र से स्पष्ट है कि समुच्चय P = {5, 6, 7}

तथा Q = {3, 4, 5}

तथा प्रत्येक $(x, y) \in R$, $x \in P$, $y \in Q$ के लिए $y = x - 2$, अत:

- **(i) समुच्चय निर्माण रूप में**

$R = \{(x, y) : y = x - 2$

तथा $x \in P; y \in Q\}$ **उत्तर**

- **(ii) रोस्टर रूप में**

$R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$ **उत्तर**

सम्बन्ध R का प्रान्त = $\{5, 6, 7\}$

तथा परिसर = $\{3, 4, 5\}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3, 4, 6} तथा समुच्चय A पर एक सम्बन्ध R = {(a, b): a, b ∈ A, संख्या a, संख्या b को यथावत विभाजित करती है} द्वारा परिभाषित है।

(i) R को रोस्टर रूप में लिखिए।

(ii) R का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

(iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, A = {1, 2, 3, 4, 6},

$\because$ $1 \in A$ प्रत्येक $1, 2, 3, 4, 6 \in A$ को विभाजित करता है,

अत: $(1, 1) \in R$, $(1, 2) \in R, (1, 3) \in R$, ..., $(1, 6) \in R$

पुन: $2 \in A$ प्रत्येक $2, 4, 6 \in A$ को विभाजित करता है,

अत: $(2, 2) \in R, (2, 4) \in R$ तथा $(2, 6) \in R$

तथा $3 \in A$ प्रत्येक $3, 6 \in A$ को विभाजित करता है, अत: $(3, 3) \in R, (3, 6) \in R$

इसी प्रकार $(4, 4) \in R$ तथा $(6, 6) \in R$

ध्यान दें कि अन्य कोई $a \in A$ किसी भी अन्य $b \in A$ को विभाजित नहीं करता है।

- **(i)** अत: रोस्टर रूप में $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$ **उत्तर**
- **(ii)** R का प्रान्त = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ **उत्तर**
- **(iii)** R का परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. R = {(x, x + 5) : x ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5}} द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R के प्रान्त और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $R = \{(x, x + 5): x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$

सम्बन्ध R = {(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)}

तब, R का प्रान्त = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

और R का परिसर = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **उत्तर**

प्रश्न 7. सम्बन्ध R = {(x, x^3) : x संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है} को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल : $\because$ x, 10 से कम एक अभाज्य संख्या है

$\therefore$ $2, 3, 5, 7 \in x$

तब, $x^3 = 2^3, 3^3, 5^3, 7^3 = 8, 27, 125, 343$

तब रोस्टर रूप में सम्बन्ध

$R = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. मान लीजिए कि A = {x, y, z} और B = {1, 2} हैं तब A से B के सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ $A = \{x, y, z\}$ ∴ $n(A) = 3$

और $B = \{1, 2\}$ ∴ $n(B) = 2$

∴ $(A \times B)$ में क्रमित युग्मों की संख्या

$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$

अत: A से B में सम्बन्धों की संख्या $= 2^6 = 64$ **उत्तर**

प्रश्न 9. मान लीजिए कि R, Z पर R = {(a, b) : a, b ∈ Z, a − b एक पूर्णांक है}, द्वारा परिभाषित एक सम्बन्ध है। R के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ Z पूर्णांकों का समुच्चय है।

∵ प्रत्येक पूर्णांक $a \in Z$ का प्रत्येक अन्य पूर्णांक $b \in Z$ से अन्तर $a - b$ सदैव ही पूर्णांक है।

अत: R का प्रान्त $= Z$

तथा परिसर $= Z$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 2.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित सम्बन्धों में कौन-से फलन हैं ? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि सम्बन्ध एक फलन है तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए :

(i) {(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)}

(ii) {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)}

(iii) {(1, 3), (1, 5), (2, 5)}

हल : (i) ∵ R में उपस्थित क्रमित-युग्मों का प्रथम अवयव एक और केवल एक ही बार प्रथम अवयव के रूप में प्रयुक्त हुआ है।

अत: सम्बन्ध R एक फलन है। **उत्तर**

R का प्रान्त $= \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$

तथा R का परिसर = क्रमित-युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय $= \{1\}$ **उत्तर**

- **(ii)** ∵ R में उपस्थित क्रमित-युग्मों का प्रत्येक प्रथम एक और केवल एक ही बार प्रथम अवयव के रूप में प्रयुक्त हुआ है।

  अत: सम्बन्ध R एक फलन है। **उत्तर**

  R का प्रान्त $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

तथा R का परिसर = R के क्रमित-युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **उत्तर**

- **(iii)** ∵ अवयव 1, R के दो क्रमित-युग्मों में प्रथम अवयव के रूप में प्रयुक्त हुआ है।

  अत: दिया हुआ सम्बन्ध एक फलन नहीं है। **उत्तर**

ध्यान रखें कि यदि दो क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान हैं, तब यह फलन नहीं होगा।

प्रश्न 2. निम्नलिखित वास्तविक फलनों के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए :

(i) f (x) = −| x |

(ii) f (x) = $\sqrt{9 - x^2}$

हल : (i) दिया हुआ फलन $f(x) = -|x|$

∵ प्रत्येक वास्तविक x के लिए $-|x|$ परिभाषित तथा अद्वितीय है, अत: स्पष्ट है कि दिए गए फलन का

प्रान्त = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

$R = (-\infty, \infty)$ **उत्तर**

∵ $x \in R$ के लिए इसका प्रतिबिम्ब $f(x) = -|x| \leq 0$

अत: फलन $f(x)$ का परिसर $= (-\infty, 0]$ **उत्तर**

- **(ii)** ∵ दिया हुआ फलन $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ वास्तविक है, यदि

  $9 - x^2 \geq 0$ अर्थात $x^2 \leq 9$

  अर्थात $-3 \leq x \leq 3$

  अत: फलन का प्रान्त $\{x : x \in R$ तथा $-3 \leq x \leq 3\}$ **उत्तर**

  पुन: माना कि $y = f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

x के मान -3 से $+3$ तक हो सकते हैं जिनके लिए y के मान 0 से $+3$ तक ही होंगे। [क्योंकि $y(x = -3$ पर$) = 0$ तथा $y(x = 0$ पर$) = 3$]

∴ फलन का परिसर $= \{y : y \in R$ तथा $0 \leq y \leq 3\}$

$= [0, 3]$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक फलन f (x) = 2x − 5 द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए :

(i) f (0) (ii) f (7) (iii) f (−3)

हल : फलन $f(x) = 2x - 5$

- **(i)** $x = 0$ प्रतिस्थापित करने पर,

  $f(0) = 2.(0) - 5 \Rightarrow f(0) = -5$ **उत्तर**

- **(ii)** $x = 7$ प्रतिस्थापित करने पर,

  $f(7) = 2.(7) - 5 = 14 - 5$

⇒ $f(7) = 9$ **उत्तर**

- **(iii)** $x = -3$ प्रतिस्थापित करने पर,

  $f(-3) = 2.(-3) - 5 = -6 - 5$

⇒ $f(-3) = -11$ **उत्तर**

प्रश्न 4. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

(i) t (0) (ii) t (28)

(iii) t (− 10)

(iv) C का मान जब t (C) = 212

हल : दिया है,

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

● **(i)** $C = 0$ रखने पर,

$$t(0) = \frac{9(0)}{5} + 32$$

$$= 0 + 32 = 32°\,\text{F}$$ **उत्तर**

● **(ii)** $C = 28$ रखने पर,

$$t(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32$$

$$= \frac{252}{5} + 32 = \frac{412}{5}$$

$$= 82.4°\,\text{F}$$ **उत्तर**

● **(iii)** $C = -10$ रखने पर,

$$t(-10) = \frac{9 \times (-10)}{5} + 32$$

$$= -18 + 32 = 14°\,\text{F}$$ **उत्तर**

● **(iv)** $\because\ t(C) = 212$

$$\therefore \quad 212 = \frac{9C}{5} + 32$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9C}{5} = 212 - 32$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9C}{5} = 180$$

$$\Rightarrow \quad C = 180 \times \frac{5}{9} = 100°$$

$$\Rightarrow \quad C = 100°\,\text{F}$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in R,\ x > 0$.

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x एक वास्तविक संख्या है।

(iii) $f(x) = x$, x एक वास्तविक संख्या है।

हल : (i) $\because\ f(x) = 2 - 3x,$

जहाँ $x \in R,\ x > 0$

माना कि $y = f(x) = 2 - 3x$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = -3x$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 2 - y$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2 - y}{3}$$

$$\because \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2 - y}{3} > 0$$

$$\Rightarrow \quad 2 - y > 0 \quad \Rightarrow \quad y < 2$$

अत: फलन का परिसर $= (-\infty, 2)$ **उत्तर**

● **(ii)** दिया है,

$f(x) = x^2 + 2, x$ एक वास्तविक संख्या है।

माना कि $y = f(x) = x^2 + 2$

$$\therefore \quad y = x^2 + 2 \ \Rightarrow \ x^2 = y - 2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y - 2}$$

$\because$ x एक वास्तविक संख्या है।

$$\therefore \quad y - 2 \geq 0 \quad \text{या} \quad y \geq 2$$

अत: फलन का परिसर $= [2, \infty)$ **उत्तर**

● **(iii)** दिया है, $f(x) = x,\ x$ एक वास्तविक संख्या है।

माना कि $y = f(x) = x \ \Rightarrow \ y = x$

$\because$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए $y = x =$ एक वास्तविक संख्या

अत: परिसर = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R. **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सम्बन्ध f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 3 \\ 3x, 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

सम्बन्ध g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 2 \\ 3x, 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है।

हल : फलन f की परिभाषा से स्पष्ट है कि $0 \leq x < 3$ के लिए $x \in R$ का प्रतिबिम्ब $f(x) = x^2$ अद्वितीय है।

इसी प्रकार $3 < x \leq 10$ के लिए $x \in R$ का प्रतिबिम्ब $f(x) = 3x$ भी अद्वितीय है।

जबकि $x = 3$ पर $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow \quad f(3) = 3^2 = 9$$

तथा $x = 3$ पर $f(x) = 3x$

$$\Rightarrow \quad f(3) = 3 \times 3 = 9$$

इस प्रकार $x = 3$ का प्रतिबिम्ब भी अद्वितीय है।

$\because$ प्रत्येक $x \in R, 0 \leq x \leq 10$ का प्रतिबिम्ब अद्वितीय है, अत: f एक फलन है। **Proved.**

पुन: g की परिभाषा से $0 \leq x < 2$ के लिए प्रतिबिम्ब $g(x) = x^2$ अद्वितीय है।

इसी प्रकार $2 < x \leq 10$ के लिए प्रतिबिम्ब $g(x) = 3x$ अद्वितीय है।

परन्तु $x = 2$ के लिए $g(x) = x^2$

$$\Rightarrow \quad g(2) = 2^2 = 4$$

तथा $x = 2$ पर $g(x) = 3x \ \Rightarrow \ g(2) = 3 \times 2 = 6$

इससे स्पष्ट है कि g के अधीन अवयव 2 का प्रतिबिम्ब अद्वितीय नहीं है, अत: सम्बन्ध g फलन नहीं है। **Proved.**

प्रश्न 2. यदि $f(x) = x^2$ तो $\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \quad f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = (1)^2 = 1$

और $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

तब, $$\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)} = \frac{(1.21) - (1)}{(1.1 - 1)} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

उत्तर

प्रश्न 3. फलन $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ तभी परिभाषित है जब

$$x^2-8x+12\neq 0$$

$\because$ $x^2-8x+12\neq 0$

$\Rightarrow$ $(x-6)(x-2)\neq 0$ (गुणनखण्ड करने पर)

$\Rightarrow$ $x-6\neq 0$ और $x-2\neq 0$

$\Rightarrow$ $x\neq 2$ तथा $x\neq 6$

इस प्रकार, 2 और 6 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं के लिए फलन परिभाषित है।

अत: $f(x)$ का प्रान्त $=\{x\in R: x\neq 2$ तथा $x\neq 6\}$

$=R-\{2,6\}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $f(x)=\sqrt{(x-1)}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ $f(x)=\sqrt{(x-1)}$ एक वास्तविक फलन है

$\Rightarrow$ $\sqrt{x-1}$ वास्तविक है।

$\Rightarrow$ $x-1\geq 0$ या $x\geq 1$

तब फलन $f(x)$ का प्रान्त $=\{x\in R: x\geq 1\}$

$=[1,\infty)$ **उत्तर**

पुन: माना कि $y=f(x)=\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow$ $y^2=x-1$ या $x=y^2+1$

x का मान $x-1\geq 0$ में रखने पर,

$y^2+1-1\geq 0$

$\Rightarrow$ $-\infty<y<\infty$

किन्तु y कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता क्योंकि फलन $f(x)=\sqrt{x-1}$ कभी भी ऋणात्मक मान नहीं रखता है।

$\therefore$ $y^2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad y\geq 0$

अत: फलन $y=f(x)$ का परिसर

$=\{y: y\in R$ तथा $y\geq 0\}$

$=[0,\infty)$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $f(x)=|x-1|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ प्रत्येक $x\in R$ के लिए x का प्रतिबिम्ब $f(x)=|x-1|$ परिभाषित तथा अद्वितीय है, अत:

फलन f का प्रान्त = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R,

पुन: चूँकि प्रत्येक $x\in R$ के लिए $f(x)=|x-1|\geq 0$ और फलन f का परिसर = सभी ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $=[0,\ \infty)$ **उत्तर**

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $f=\left\{\left(x,\dfrac{x^2}{1+x^2}\right): x\in R\right\}$ R से R में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

हल : दिया गया है कि R से R में फलन $f=\left\{\left(x,\dfrac{x^2}{1+x^2}\right): x\in R\right\}$ द्वारा परिभाषित है।

यहाँ क्रमित युग्म $\left(x,\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$ से स्पष्ट है कि x का प्रतिबिम्ब $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ है।

तब, माना कि $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

$\because$ x के सभी मान के लिए $f(x)$ या y धनात्मक है।

तथा $1+x^2>x^2$

अत: $0\leq y<1$

अत: f का परिसर $=\{y: y\in R$ तथा $0\leq y<1\}$

$=[0,1)$ **उत्तर**

प्रश्न 7. मान लीजिए कि $f, g: R\to R$ क्रमश: $f(x)=x+1$, $g(x)=2x-3$, द्वारा परिभाषित है। $f+g$, $f-g$ और $\dfrac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार, $f: R\to R$ व $g: R\to R$ इस प्रकार हैं कि

$f(x)=x+1$

तथा $g(x)=2x-3$

अत: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(x+1)+(2x-3)=3x-2$ **उत्तर**

इसी प्रकार,

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$=(x+1)-(2x-3)$

$=-x+4$ **उत्तर**

और $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+1}{2x-3}$

$=\dfrac{x+1}{2x-3}; x\neq\dfrac{3}{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. मान लीजिए कि $f=\{(1,\ 1), (2,\ 3), (0,\ -1), (-1,\ -3)\}$ Z से Z में, $f(x)=ax+b$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

हल : $\because$ $f=\{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$

$\therefore$ $f(1)=1$ तथा $f(2)=3$

दिया है, $f(x)=ax+b$

इसलिए $f(1)=1$ तथा $f(2)=3$

$\Rightarrow$ $a\times 1+b=1$ तथा $a\times 2+b=3$

$\Rightarrow$ $a+b=1$ तथा $2a+b=3$

उक्त समीकरणों को हल करने पर,

$a=2$ एवं $b=-1$

इस प्रकार, $f(x)=2x-1$

स्पष्ट है कि $f(0)=-1$ तथा $f(-1)=-3$

अत: $a=2$ एवं $b=-1$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित N से N में, एक सम्बन्ध R है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) $(a, a) \in R$, सभी $a \in N$,

(ii) $(a, b) \in R$, का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$

(iii) $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$?

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

हल : (i) दिया है,

सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$

अब, $(a, a) \in R$

$\Rightarrow$ $a = a^2$ (R की परिभाषा से)

जो कि केवल तभी सत्य है जब $a = 1$

अत: दिया हुआ कथन सभी $a \in N$ के लिए सत्य नहीं है। **उत्तर**

- **(ii)** $\because R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$

दिया गया कथन

$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\Rightarrow$ $a = b^2$ तथा $b = a^2$

$\Rightarrow$ $b^2 = a$ तथा $b = a^2$

$\Rightarrow$ $b^2 \times b = a \times a^2$

या $b^3 = a^3 \Rightarrow a = b$

अर्थात $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

केवल तभी सत्य है जबकि $a = b$

अत: दिया हुआ कथन सत्य नहीं है। **उत्तर**

- **(iii)** अब $2 \in N$, $4 \in N$ तथा $16 \in N$ पर विचार कीजिए।

स्पष्ट है कि

$16 = 4^2 \Rightarrow (16, 4) \in R$

$4 = 2^2 \Rightarrow (4, 2) \in R$

परन्तु $16 \neq 2^2 \Rightarrow (16, 2) \notin R$

अत: दिया हुआ कथन सत्य नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 10. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$ और $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) f, A से B में एक सम्बन्ध है।

(ii) f, A से B में एक फलन है।

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बतलाइए।

हल : (i) दिया है,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

तथा $B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$

$f = \{(1,5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$

$\because$ f के क्रमित-युग्मों के सभी प्रथम अवयव समुच्चय A के अवयव हैं तथा सभी द्वितीय अवयव समुच्चय B के अवयव हैं,

अत: 'कथन f, A से B में एक सम्बन्ध है', सत्य है। **उत्तर**

- **(ii)** $\because 2 \in A$ अवयव, सम्बन्ध f के दो क्रमित युग्म $(2, 9)$ व $(2, 11)$ में प्रथम घटक के रूप में आया है अर्थात f के अधीन $2 \in A$ के दो विभिन्न प्रतिबिम्ब 9 व 11 हैं। अत: "कथन f, A से B में एक फलन है" सत्य नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 11. मान लीजिए कि f, $f = \{(ab, x+b) : a, b \in Z\}$ द्वारा परिभाषित $Z \times Z$ का एक उपसमुच्चय है। क्या f, Z से Z में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

हल : दिया है,

$f = \{(ab, a+b) : a, b \in Z\}$ द्वारा परिभाषित है।

माना $a = 2$ तथा $b = 6$ तब $ab = 2 \times 6 = 12$ और $a + b = 2 + 6 = 8$

$\therefore$ $(12, 8) \in f$

पुन: माना $a = 3$ तथा $b = 4$ तब $ab = 3 \times 4 = 12$ और $a + b = 3 + 4 = 7$

$\therefore$ $(12, 7) \in f$

$\because$ f के लिए प्रान्त के एक ही अवयव 12 के दो प्रतिबिम्ब 8 व 7 प्राप्त होते हैं।

अत: सम्बन्ध f, Z से Z में एक फलन नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ तथा $f : A \to N$, $f(n) = n$ का महत्तम अभाज्य गुणक (गुणनखण्ड) द्वारा, परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार फलन $f: A \to N$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$f = \{n, f(n) : f(n), n$ का महत्तम अभाज्य गुणक है$\}$

तथा $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$

अब, $9 = 1 \times 9 = 3 \times 3$

$\Rightarrow$ 9 का महत्तम अभाज्य गुणक $= 3$

$\therefore$ $(9, 3) \in f$

$10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$

$\Rightarrow$ 10 का महत्तम अभाज्य गुणक $= 5$

$\therefore$ $(10, 5) \in f$

$11 = 1 \times 11$

$\Rightarrow$ 11 का महत्तम अभाज्य गुणक $= 11$

$\therefore$ $(11, 11) \in f$

$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$

$\Rightarrow$ 12 का महत्तम अभाज्य गुणक $= 3$

$\therefore$ $(12, 3) \in f$

$13 = 1 \times 13$

$\Rightarrow$ 13 का महत्तम अभाज्य गुणक $= 13$

$\therefore$ $(13, 13) \in f$

तब, f का परिसर $= \{3, 5, 11, 3, 13\} = \{3, 5, 11, 13\}$ **उत्तर**

❐