03 त्रिकोणमितीय फलन
(Trigonometric Functions)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 3.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए :

(i) $25°$ **(ii)** $-47°30'$

(iii) $240°$ **(iv)** $520°$

हल : (i) $\because$ डिग्री माप $= 25°$

$\therefore$ रेडियन माप $= \frac{\pi}{180°} \times$ डिग्री माप

$= \frac{\pi}{180°} \times 25° = \frac{5\pi}{36}$

अत: $25°$ की रेडियन माप $= \frac{5\pi}{36}$ रेडियन **उत्तर**

● **(ii)** $\because$ डिग्री माप $= -47°30' = -47°\left(\frac{30}{60}\right)^\circ$

$= -47\frac{1°}{2} = -\frac{95°}{2}$

$\therefore$ रेडियन माप $= \frac{\pi}{180°} \times$ डिग्री माप

$= \frac{\pi}{180°} \times \left(-\frac{95°}{2}\right) = -\frac{19\pi}{72}$

अत: $-47°30'$ की रेडियन माप $= -\frac{19\pi}{72}$ रेडियन **उत्तर**

● **(iii)** $\because$ डिग्री माप $= 240°$

$\therefore$ रेडियन माप $= \frac{\pi}{180°} \times$ डिग्री माप

$= \frac{\pi}{180°} \times 240° = \frac{4\pi}{3}$

अत: $240°$ की रेडियन माप $= \frac{4\pi}{3}$ रेडियन **उत्तर**

● **(iv)** $\because$ डिग्री माप $= 520°$

$\therefore$ रेडियन माप $= \frac{\pi}{180°} \times$ डिग्री माप

$= \frac{\pi}{180°} \times 520° = \frac{26\pi}{9}$

अत: $520°$ की रेडियन माप $= \frac{26\pi}{9}$ रेडियन **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ का प्रयोग करें$\left.\right)$:

(i) $\frac{11}{16}$ **(ii)** -4

(iii) $\frac{5\pi}{3}$ **(iv)** $\frac{7\pi}{6}$

हल : (i) $\because$ रेडियन माप $= \frac{11}{16}$

$\therefore$ डिग्री माप $= \frac{180°}{\pi} \times$ रेडियन माप

$= \frac{180°}{\pi} \times \frac{11}{16} = \frac{180° \times 11}{\frac{22}{7} \times 16}$

$= \frac{180° \times 11 \times 7}{22 \times 16} = \frac{315°}{8}$

$= 39\frac{3°}{8} = 39° \frac{3}{8} \times 60'$

$= 39° 22\frac{1'}{2} = 39° 22' 30''$

अत: $\frac{11}{16}$ रेडियन की डिग्री माप $= 39° 22' 30''$ **उत्तर**

● **(ii)** $\because$ रेडियन माप $= -4$

$\therefore$ डिग्री माप $= \frac{180°}{\pi} \times$ रेडियन माप

$= \frac{180°}{\pi} \times (-4) = \frac{180° \times (-4) \times 7}{22}$

$= \frac{-2520}{11} = -229\frac{1°}{11}$

$= -229° \frac{1}{11} \times 60' = -229° 5\frac{5'}{11}$

$= -229° 5' \frac{5}{11} \times 60''$

$= -229° 5' \frac{300''}{11}$

$= -229°\ 5'\ 27.27''$ लगभग

$= -229°\ 5'\ 27.3''$ लगभग

अत: -4 रेडियन की डिग्री माप

$= -229° 5' 27.3''$ लगभग **उत्तर**

● **(iii)** $\because$ रेडियन माप $= \dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore$ डिग्री माप $= \dfrac{180°}{\pi} \times$ रेडियन माप

$= \dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{5\pi}{3} = 300°$

अतः $\dfrac{5\pi}{6}$ रेडियन की डिग्री माप $= 300°$ **उत्तर**

● **(iv)** $\because$ रेडियन माप $= \dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore$ डिग्री माप $= \dfrac{180°}{\pi} \times$ रेडियन माप

$= \dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{7\pi}{6} = 210°$

अतः $\dfrac{7\pi}{6}$ रेडियन की डिग्री माप $= 210°$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक पहिया एक मिनट में 360 परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

हल : $\because$ पहिया 1 मिनट या 60 सेकण्ड में परिक्रमण (चक्कर) करता है = 360

$\therefore$ पहिया 1 सेकण्ड में परिक्रमण करेगा

$= \dfrac{360}{60} = 6$

$\because$ 1 परिक्रमण या चक्कर में बनाया गया कोण

$= 2\pi$ रेडियन

$\therefore$ 6 परिक्रमण में बनाया गया कोण

$= 6 \times 2\pi$ रेडियन $= 12\pi$ रेडियन

अतः एक सेकण्ड में पहिए द्वारा बनाया गया कोण $= 12\pi$ रेडियन। **उत्तर**

प्रश्न 4. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लम्बाई की चाप वृत्त के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी? ($\pi = \dfrac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)

हल : वृत्त की त्रिज्या $(r) = 100$ सेमी,
चाप की लम्बाई $(l) = 22$ सेमी

$\therefore$ चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण

$(\theta) = \dfrac{\text{चाप } (l)}{\text{त्रिज्या } (r)} = \dfrac{22}{100}$ रेडियन

$\because$ **डिग्री माप $= \dfrac{180°}{\pi} \times$ रेडियन माप**

$\therefore \theta = \dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{22}{100}$

$= \dfrac{180° \times 22}{\frac{22}{7} \times 100} = \dfrac{180 \times 7 \times 22}{22 \times 100}$

$= 12.6°$

$\therefore \theta = 12.6°$

या $12° + 0.6 \times 60' = 12°36'$

अतः दिए गए चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण

$= 12°36'$ **उत्तर**

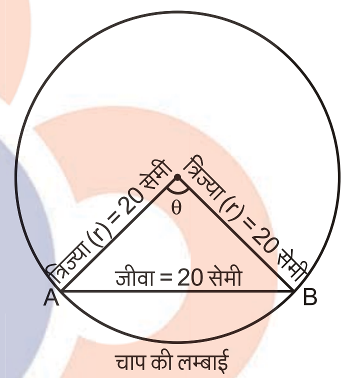
प्रश्न 5. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लम्बाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना जीवा के संगत चाप की लम्बाई l और जीवा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण θ है।

$\because$ वृत्त का व्यास = 40 सेमी

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $(r) = 20$ सेमी और जीवा की लम्बाई $(c) = 20$ सेमी

तब जीवा (AB) और वृत्त की त्रिज्याएँ $(OA$ व $OB)$ मिलकर समबाहु त्रिभुज बनाएँगी जिसका कोण $AOB = \theta = 60°$ होगा।



$\therefore \theta = 60° = \dfrac{\pi}{180°} \times 60° = \dfrac{\pi}{3}$ रेडियन

$\because$ जीवा के संगत चाप AB की लम्बाई l है

और $l = r\,\theta$

$\therefore l = 20 \times \dfrac{\pi}{3} = 20 \times \dfrac{22}{7 \times 3}$

$= \dfrac{440}{21} = 20.95$ सेमी

अतः चाप की लम्बाई $= 20.95$ सेमी। **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि दो वृत्तों के समान लम्बाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना एक वृत्त की त्रिज्या r_1 तथा दूसरे वृत्त की त्रिज्या r_2 सेमी है।

एक वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $\theta_1 = 60°$

$= 60 \times \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{3}$ रेडियन

तब चाप की लम्बाई $l_1 = r_1\theta_1$

$= r_1 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi r_1}{3}$ सेमी

दूसरे वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण

$\theta_2 = 75°$

$= 75 \times \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{12}$ रेडियन

तब चाप की लम्बाई $l_2 = r_2\theta_2 = r_2 \times \frac{5\pi}{12}$

$= \frac{5\pi r_2}{12}$ सेमी

$\because$ प्रश्न के अनुसार चापों की लम्बाई समान है।

$\therefore \quad \frac{\pi r_1}{3} = \frac{5\pi r_2}{12}$

$\Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{5\pi}{12} \times \frac{3}{\pi} = \frac{5}{4}$

अत: वृत्त की त्रिज्याओं में अनुपात $r_1 : r_2 = 5 : 4$ **उत्तर**

प्रश्न 7. 75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्नलिखित हैं :

(i) 10 सेमी **(ii) 15 सेमी**

(iii) 21 सेमी

हल : (i) दोलक की लम्बाई $(r) = 75$ सेमी,

दोलक की नोक द्वारा बने चाप की लम्बाई $(l) = 10$ सेमी।

माना दोलन कोण θ है।

तब $\quad \theta = \frac{l}{r}$

या $\quad \theta = \frac{10}{75}$ रेडियन $= \frac{2}{15}$ रेडियन

अत: दोलायमान दोलक के दोलन से बना कोण $= \frac{2}{15}$ रेडियन। **उत्तर**

- **(ii)** दोलक की लम्बाई $(r) = 75$ सेमी,
  दोलक की नोक द्वारा बने चाप की लम्बाई $(l) = 15$ सेमी।
  माना दोलन कोण θ है।

तब $\because \quad \theta = \frac{l}{r}$

या $\quad \theta = \frac{15}{75}$ रेडियन $= \frac{1}{5}$ रेडियन।

अत: दोलायमान दोलक के दोलन से बना कोण

$= \frac{1}{5}$ रेडियन। **उत्तर**

- **(iii)** दोलक की लम्बाई $(r) = 75$ सेमी,
  दोलक की नोक द्वारा बने चाप की लम्बाई $(l) = 21$ सेमी।
  माना दोलन कोण θ है।

तब $\because \quad \theta = \frac{l}{r}$

या $\quad \theta = \frac{21}{75}$ रेडियन $= \frac{7}{25}$ रेडियन।

अत: दोलायमान दोलक के दोलन से बना कोण

$= \frac{7}{25}$ रेडियन। **उत्तर**

प्रश्नावली | 3.2

- **निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल : ज्ञात है कि $\cos x = -\frac{1}{2}$ और x तीसरे चतुर्थांश में है।

$\because \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\therefore \quad \sin^2 x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \quad \sin^2 x + \frac{1}{4} = 1$

$\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

परन्तु x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है,

अत: $\quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

तब $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{2}{1}\right) = \sqrt{3}$

$\therefore \quad \tan x = \sqrt{3}$

$\because \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\therefore \quad \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\therefore \quad \sec x = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 \times -\frac{2}{1} = -2$

$\therefore \quad \sec x = -2$

$\because \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

अत: $\quad \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sec x = -2$$

और $\quad \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. **उत्तर**

प्रश्न 2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल : ज्ञात है कि $\sin x = \frac{3}{5}$ तथा x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

$\because \quad \sin x = \frac{3}{5}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{3/5} = 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

अब $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

या $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$ या $\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$

या $\quad \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$ या $\cos^2 x = \frac{16}{25}$

या $\quad \cos x = \pm \frac{4}{5}$

परन्तु x द्वितीय चतुर्थांश में है।

अतः $\quad \cos x = -\frac{4}{5}$

तब $\because \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\therefore \quad \sec x = \frac{1}{-4/5} = 1 \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{-5}{4}$

और $\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3/5}{-4/5} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-5}{4}\right)$

$= -\frac{3}{4}$ तब $\cot x = -\frac{4}{3}$

अतः $\quad \operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}$,

$\sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}$

व $\quad \cot x = -\frac{4}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि $\cot x = \frac{3}{4}$ तथा x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

हल : दिया है कि $\cot x = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad \tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{4}{3}$

तथा $\quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

$= 1 + \left[\frac{3}{4}\right]^2 = 1 + \frac{9}{16}$

$= \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}$

$\operatorname{cosec} x = \pm \frac{5}{4}$

परन्तु x तृतीय चतुर्थांश में है। इसलिए cosec x ऋणात्मक होगा।

अतः $\quad \operatorname{cosec} x = \frac{-5}{4}$

$\therefore \quad \sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{-4}{5}$

अब, $\quad \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x = \cot x \times \sin x$

$= \frac{3}{4} \times \left[\frac{-4}{5}\right] = \frac{-3}{5}$

तथा $\quad \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{-5}{3}$

अतः $\tan x = \frac{4}{3}, \operatorname{cosec} x = \frac{-5}{4}, \sin x = \frac{-4}{5}$,

$\cos x = \frac{-3}{5}$ और $\sec x = \frac{-5}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि $\sec x = \frac{13}{5}$ तथा x चतुर्थ चतुर्थांश में है।

हल : दिया है कि $\sec x = \frac{13}{5}$

$\therefore \quad \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{5}{13}$

तथा $\quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$= \left[\frac{13}{5}\right]^2 - 1 = \frac{169}{25} - 1$

$= \frac{169-25}{25} = \frac{144}{25}$

परन्तु x चतुर्थ चतुर्थांश में है। इसलिए tan x ऋणात्मक होगा।

अतः $\quad \tan x = -\sqrt{\frac{144}{25}} = -\frac{12}{5}$

$\therefore \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{5}{12}$

तथा $\quad \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x = \tan x \times \cos x$

$= -\frac{12}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{12}{13}$

तथा $\quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{13}{12}$

अतः $\quad \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}$,

$\cot x = -\frac{5}{12}, \sin x = -\frac{12}{13}$

तथा $\quad \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि $\tan x = -\frac{5}{12}$ तथा x द्वितीय चतुर्थांश में है।

हल : दिया है कि $\tan x = -\frac{5}{12}$

$\therefore \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{12}{5}$

तथा $\quad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$= 1 + \left[-\frac{5}{12}\right]^2 = 1 + \frac{25}{144}$

$= \frac{144 + 25}{144} = \frac{169}{144}$

परन्तु x द्वितीय चतुर्थांश में है। इसलिए $\sec x$ ऋणात्मक होगा।

अत: $\quad \sec x = -\sqrt{\frac{169}{144}} = -\frac{13}{12}$

अब $\quad \cos x = \frac{1}{\sec x} = -\frac{12}{13}$

तथा $\quad \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x$

$= \tan x \times \cos x$

$= \left[-\frac{5}{12}\right] \times \left[-\frac{12}{13}\right] = \frac{5}{13}$

$\therefore \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{5}$

अत: $\quad \cot x = -\frac{12}{5}, \sec x = -\frac{13}{12},$

$\cos x = -\frac{12}{13}, \sin x = \frac{5}{13}$

तथा $\quad \text{cosec}\, x = \frac{13}{5}$ उत्तर

● **प्रश्न संख्या 6 से 10 के मान ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 6. sin 765°

हल : $\sin 765° = \sin(720° + 45°)$

$= \sin(2 \times 360° + 45°)$

$= \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ उत्तर

प्रश्न 7. cosec (– 1410°)

हल : $\text{cosec}(-1410°)$

$= -\text{cosec}\, 1410°$

$= -\text{cosec}(1440° - 30°)$

$= -\text{cosec}(4 \times 360° - 30°)$

$= -(-\text{cosec}\, 30°)$

$= \text{cosec}\, 30° = 2$ उत्तर

प्रश्न 8. $\tan \frac{19\pi}{3}$

हल : $\tan \frac{19\pi}{3} = \tan\left[6\pi + \frac{\pi}{3}\right]$

$= \tan\left[3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right]$

$= \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ उत्तर

प्रश्न 9. $\sin\left[-\frac{11\pi}{3}\right]$

हल : $\sin\left[-\frac{11\pi}{3}\right]$

$= -\sin \frac{11\pi}{3} = -\sin\left[4\pi - \frac{\pi}{3}\right]$

$= -\sin\left[2 \times 2\pi - \frac{\pi}{3}\right]$

$= -\left[-\sin \frac{\pi}{3}\right] = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर

प्रश्न 10. $\cot\left[-\frac{15\pi}{4}\right]$

हल : $\cot\left[-\frac{15\pi}{4}\right]$

$= -\cot \frac{15\pi}{4} = -\cot\left[4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$

$= -\cot\left[2 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$

$= -\left[-\cot \frac{\pi}{4}\right] = \cot \frac{\pi}{4} = 1$ उत्तर

? प्रश्नावली | 3.3

● **सिद्ध कीजिए :**

प्रश्न 1. $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$

हल : L.H.S.

$= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4}$

$= \sin^2 \frac{180°}{6} + \cos^2 \frac{180°}{3} - \tan^2 \frac{180°}{4}$

(क्योंकि $\pi = 180°$)

$= (\sin 30°)^2 + (\cos 60°)^2 - (\tan 45°)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

= R.H.S.

प्रश्न 2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

हल : L.H.S.

$= 2\sin^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}$

$= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2+\left[\text{cosec}\frac{7\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\right]^2$

$= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2+\left[\text{cosec}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3}\right]^2$

$= 2\left(\sin\frac{180^\circ}{6}\right)^2+\left[-\text{cosec}\frac{\pi}{6}\cos\frac{180^\circ}{3}\right]^2$

(क्योंकि $\pi = 180^\circ$)

$= 2(\sin 30^\circ)^2+[-\text{cosec } 30^\circ\cos 60^\circ]^2$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left[-2\times\frac{1}{2}\right]^2 = 2\times\frac{1}{4}+(-1)^2$

$= \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

= R.H.S.

प्रश्न 3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

हल : L.H.S.

$= \cot^2\frac{\pi}{6}+\text{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}$

$= \cot^2\frac{\pi}{6}+\left[\text{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]+3\tan^2\frac{\pi}{6}$

$= \left(\cot\frac{\pi}{6}\right)^2+\text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)+3\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2$

$= \left(\cot\frac{180^\circ}{6}\right)^2+\text{cosec}\left(\frac{180^\circ}{6}\right)+3\left(\tan\frac{180^\circ}{6}\right)^2$

(क्योंकि $\pi = 180^\circ$)

$= (\cot 30^\circ)^2+\text{cosec } 30^\circ+3(\tan 30^\circ)^2$

$= (\sqrt{3})^2+2+3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3+2+1=6$

= R.H.S.

प्रश्न 4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

हल : L.H.S.

$= 2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}$

$= 2\left[\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}\right]$

$= 2\left[\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}\right]$

$= 2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}\right)+\sec^2\frac{\pi}{3}\right]$

$= 2\left[1+\left(\sec\frac{180^\circ}{3}\right)^2\right]$

(क्योंकि $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ तथा $\pi = 180^\circ$)

$= 2[1+(\sec 60^\circ)^2] = 2[1+(2)^2]$

$= 2[1+4] = 10$

= R.H.S.

प्रश्न 5. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 75^\circ$ **(ii)** $\tan 15^\circ$

हल : (i) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ)$

(क्योंकि $75^\circ = 45^\circ+30^\circ$)

$= \sin(A+B)$ जहाँ $A = 45^\circ, B = 30^\circ$

$= \sin A\cos B+\cos A\sin B$

$= \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

(क्योंकि $A = 45^\circ, B = 30^\circ$)

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ उत्तर

- **(ii)** $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ-30^\circ)$

$= \frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}$

$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3}$ उत्तर

- **निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :**

प्रश्न 6. $\cos\left[\frac{\pi}{4}-x\right].\cos\left[\frac{\pi}{4}-y\right]-\sin\left[\frac{\pi}{4}-x\right].\sin\left[\frac{\pi}{4}-y\right]=\sin(x+y)$

हल : हम जानते हैं कि

$\cos A.\cos B-\sin A.\sin B=\cos(A+B)$

$\therefore$ L.H.S. $= \cos\left[\frac{\pi}{4}-x\right].\cos\left[\frac{\pi}{4}-y\right]-$

$\sin\left[\frac{\pi}{4}-x\right].\sin\left[\frac{\pi}{4}-y\right]$

$$= \cos\left[\left\{\frac{\pi}{4} - x\right\} + \left\{\frac{\pi}{4} - y\right\}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right]$$

$$= \sin(x + y) = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$

हल : $\because \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}.\tan x}$

$\left[\text{सूत्र } \tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} \text{ से}\right]$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \quad ...(1)$$

इसी प्रकार, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ ...(2)

समीकरण (1) को समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\therefore \textbf{L.H.S.} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}{\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}}$$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \times \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$= \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2 = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 8. $\dfrac{\cos(\pi + x).\cos(-x)}{\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x$

हल : $\textbf{L.H.S.} = \dfrac{\cos(\pi + x).\cos(-x)}{\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$

$$= \frac{-\cos x.\cos x}{\sin x.(-\sin x)}$$

$[\because \cos(-x) = \cos x$ तथा $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

तथा $\cos(\pi + x) = -\cos x$ और $\sin(\pi - x) = \sin x]$

$$= \frac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x}$$

$$= \cot^2 x = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right] = 1$

हल : **L.H.S.**

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right]$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right)\cos(2\pi + x)\left[\cot\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x)\right]$$

$\left(\text{क्योंकि } \frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x\left[\cot\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot x\right]$$

[क्योंकि किसी भी अनुपात के लिए $(2\pi \pm x) = (\pm x)$]

$$= \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}\cos x\left[\cot\left\{-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right\} + \cot x\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\left[-\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cot x\right]$$

(क्योंकि $\cot(-\theta) = -\cot\theta$)

$$= \sin x\cos x[-(-\tan x) + \cot x]$$

$\left[\text{क्योंकि } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ और } \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x\right]$

$$= \sin x\cos x[\tan x + \cot x]$$

$$= \sin x\cos x.\tan x + \sin x\cos x.\cot x$$

$$= \sin x\cos x.\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x\cos x.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1 = \textbf{R.H.S.}$$

प्रश्न 10. $\sin(n + 1)x\sin(n + 2)x + \cos(n + 1)x\cos(n + 2)x = \cos x$

हल : L.H.S.

$= \cos(n+1)x \cos(n+2)x + \sin(n+1)x \sin(n+2)x$

$= \cos(n+2)x \cos(n+1)x + \sin(n+2)x \sin(n+1)x$ **[Note]**

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

जहाँ $(n+2)x = A$ तथा $(n+1)x = B$

$= \cos(A - B)$

$= \cos\{(n+2)x - (n+1)x\}$

$= \cos x =$ **R.H.S.**

प्रश्न 11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$

हल : L.H.S.

$= \cos\left[\frac{3\pi}{4}+x\right] - \cos\left[\frac{3\pi}{4}-x\right]$

$= \left[\cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x\right] - \left[\cos\frac{3\pi}{4}.\ \cos x + \sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin x\right]$

$= -2\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin x = -2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x$

$= -\sqrt{2}\ \sin x =$ **R.H.S.**

प्रश्न 12. $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

हल : L.H.S. $= \sin^2 6x - \sin^2 4x$

$= (1-\cos^2 6x) - (1-\cos^2 4x)$

$= \cos^2 4x - \cos^2 6x$

$= \sin(6x+4x)\sin(6x-4x)$

$[\because \cos^2 A - \cos^2 B = \sin(B+A)\sin(B-A)]$

$= \sin 10x \sin 2x$

$= \sin 2x \sin 10x$

= **R.H.S.**

प्रश्न 13. $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

हल : L.H.S. $= \cos^2 2x - \cos^2 6x$

$= \sin(6x+2x)\sin(6x-2x)$

(प्रश्न 12 की भाँति)

$= \sin 8x \sin 4x = \sin 4x \sin 8x$

= **R.H.S.**

प्रश्न 14. $\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \sin 4x$

हल : L.H.S.

$= \sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x$

$= 2\sin 4x + (\sin 6x + \sin 2x)$

$= 2\sin 4x + \left[2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}\right]$

(सूत्र : $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ से)

$= 2\sin 4x + 2\sin 4x\cos 2x$

$= 2\sin 4x[1+\cos 2x]$

$= 2\sin 4x[1+2\cos^2 x - 1]$

$= 2\sin 4x.2\cos^2 x = 4\cos^2 x.\sin 4x$

= **R.H.S.**

प्रश्न 15. $\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

हल : L.H.S.

$= \cot 4x(\sin 5x + \sin 3x)$

$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}.(\sin 5x + \sin 3x)$

$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}\left(2.\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}\right)$

$= \frac{\cos 4x}{\sin 4x}.2\sin 4x.\cos x$

$= 2\cos 4x\cos x$ ...(1)

अब **R.H.S.**

$= \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x}\cdot(\sin 5x - \sin 3x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x}\left(2.\cos\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}\right)$

$= \frac{\cos x}{\sin x}.2\cos 4x.\sin x$

$= 2\cos 4x\cos x$ ...(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) से,

L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 16. $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

हल : L.H.S.

$= \frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{9x+5x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-9x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{17x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{17x-3x}{2}\right)}$

(सूत्र: $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$ और $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ से)

$= \frac{2\sin 7x \sin(-2x)}{2\cos 10x \sin 7x} = \frac{\sin(-2x)}{\cos 10x}$

$= \frac{-\sin 2x}{\cos 10x}$ [सूत्र: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ से]

= R.H.S.

प्रश्न 17. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$

हल : L.H.S.

$= \frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}$

(सूत्र : $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ व $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ से)

$= \frac{2\sin 4x \cos x}{2\cos 4x \cos x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$

= R.H.S.

प्रश्न 18. $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{x-y}{2}$

हल : L.H.S. $= \frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y}$

$= \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)$

= R.H.S.

प्रश्न 19. $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$

हल : L.H.S. $= \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$

$= \frac{2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)}$

$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$

= R.H.S.

प्रश्न 20. $\frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2\sin x$

हल : L.H.S.

$= \frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

$= \frac{2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-3x}{2}\right)}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$\left(\text{सूत्र} : \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\ \text{से}\right)$

$= \frac{2\cos 2x \sin(-x)}{-\cos 2x}$

(सूत्र : $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ से)

$= \frac{-2\cos 2x \sin x}{-\cos 2x}$ [क्योंकि $= \sin(-x) = -\sin x$]

$= 2\sin x$

= R.H.S.

प्रश्न 21. $\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

हल : L.H.S. $= \frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x}$

$= \frac{\cos 3x + (\cos 4x + \cos 2x)}{\sin 3x + (\sin 4x + \sin 2x)}$

$= \frac{\cos 3x + 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{\sin 3x + 2\sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}$

$= \frac{\cos 3x + 2\cos 3x \cos x}{\sin 3x + 2\sin 3x \cos x}$

$= \frac{\cos 3x(1 + 2\cos x)}{\sin 3x(1 + 2\cos x)}$

(अंश से $\cos 3x$ और हर से $\sin 3x$ सार्व लेने पर)

$$= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot 3x$$

$=$ **R.H.S.**

प्रश्न 22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

हल : $\because \cot 3x = \cot(2x + x)$

या $\cot 3x = \dfrac{\cot x \cot 2x - 1}{\cot 2x + \cot x}$

या $\cot 3x(\cot 2x + \cot x) = \cot x \cot 2x - 1$ (वज्रगुणन से)

या $\cot 2x \cot 3x + \cot 3x \cot x = \cot x \cot 2x - 1$

या $-\cot x \cot 2x + \cot 2x \cot 3x + \cot 3x \cot x = -1$

या $-(\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x) = -1$

अत: $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

Proved.

प्रश्न 23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$

हल : $\because \tan 4x = \tan 2 . (2x)$

$= \tan 2A$ माना $2x = A$

$$= \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \left(\text{सूत्र: } \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \text{ से}\right)$$

$$= \frac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x} \quad (A = 2x \text{ रखने पर})$$

$$= \frac{2 . \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}{1 - (\tan 2x)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{4\tan x}{(1 - \tan^2 x)}}{1 - \left(\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{4\tan x}{(1 - \tan^2 x)}}{1 - \dfrac{4\tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{4\tan x}{(1 - \tan^2 x)}}{\dfrac{(1 - \tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{4\tan x}{(1 - \tan^2 x)} \times \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{(1 - \tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x(1 - \tan^2 x)}{(1 - 2\tan^2 x + \tan^4 x) - 4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$$

अत: $\tan 4x = \dfrac{4\tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$

प्रश्न 24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

हल : **L.H.S.** $= \cos 4x$

$= 1 - 2\sin^2(2x)$

$= 1 - 2[\sin 2x]^2$

$= 1 - 2[2\sin x \cos x]^2$

$= 1 - 2(4\sin^2 x \cos^2 x)$

$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

$=$ **R.H.S.**

प्रश्न 25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

हल : **L.H.S.**

$= \cos 6x = \cos 3(2x)$

$= \cos 3A$ (माना $2x = A$)

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= \cos A(4\cos^2 A - 3)$

$= \cos A[4(\cos 2x)^2 - 3]$ (क्योंकि $A = 2x$)

$= \cos A[4(2\cos^2 x - 1)^2 - 3]$ (क्योंकि $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

$= \cos A[4(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 3]$

$= \cos A[16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1]$

$= \cos 2x[16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1]$ $(\because A = 2x)$

$= (2\cos^2 x - 1)(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1)$

$= 32\cos^6 x - 32\cos^4 x + 2\cos^2 x - 16\cos^4 x + 16\cos^2 x - 1$

$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

$=$ **R.H.S.**

विविध प्रश्नावली

● सिद्ध कीजिए :

प्रश्न 1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$

हल : L.H.S.

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{13}+\frac{3\pi}{13}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{13}-\frac{3\pi}{13}}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+2\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\left(\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\left[2\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{13}+\frac{4\pi}{13}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{13}-\frac{4\pi}{13}}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{\pi}{13}\left[2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{26}\right]$$

$$=4\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{26}\times\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=4\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{26}\times 0 \qquad \left(\because \cos\frac{\pi}{2}=0\right)$$

$= 0$

= **R.H.S.**

प्रश्न 2. $(\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x=0$

हल : L.H.S. $=(\sin 3x+\sin x)\sin x+(\cos 3x-\cos x)\cos x$

$$=\left[2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)\right]\sin x+\left[2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-3x}{2}\right)\right]\cos x$$

$$=[2\sin 2x\cos x]\sin x+[2\sin 2x\sin(-x)]\cos x$$

$$=2\sin 2x\sin x\cos x+[-2\sin 2x\sin x]\cos x$$

[क्योंकि $\sin(-x)=-\sin x$]

$$=2\sin 2x\sin x\cos x-2\sin 2x\sin x\cos x$$

$= 0$

= **R.H.S.**

प्रश्न 3. $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}$

हल : L.H.S.

$$=(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2$$

$$=\left(2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$=4\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+4\cos^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{x+y}{2}\left[\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

$$=4\cos^2\frac{x+y}{2}\,[1] \quad (\text{क्योंकि } \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$=4\cos^2\frac{x+y}{2}$$

= **R.H.S.**

प्रश्न 4. $(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\sin^2\frac{x-y}{2}$

हल : L.H.S.

$$=(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2$$

$$=\left(2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$=\left(-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$=4\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2}+4\cos^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2}$$

$$=4\sin^2\frac{x-y}{2}\left[\sin^2\frac{x+y}{2}+\cos^2\frac{x+y}{2}\right]$$

$= 4\sin^2\dfrac{x-y}{2}$ [1] (क्योंकि $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

$= 4\sin^2\dfrac{x-y}{2}$

= R.H.S.

प्रश्न 5. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x = 4\cos x\cos 2x\sin 4x$

हल : L.H.S. $= \sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x$

$= (\sin 7x+\sin x)+(\sin 5x+\sin 3x)$

$= 2\sin\dfrac{7x+x}{2}\cos\dfrac{7x-x}{2} + 2\sin\dfrac{5x+3x}{2}\cos\dfrac{5x-3x}{2}$

$= 2\sin 4x\cos 3x+2\sin 4x\cos x$

$= 2\sin 4x\,[\cos 3x+\cos x]$

$= 2\sin 4x\left[2\cos\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}\right]$

$= 2\sin 4x\,[2\cos 2x\cos x]$

$= 4\cos x\cos 2x\sin 4x$

= R.H.S.

प्रश्न 6. $\dfrac{(\sin 7x+\sin 5x)+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 9x+\cos 3x)} = \tan 6x$

हल : L.H.S.

$= \dfrac{(\sin 7x+\sin 5x)+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 9x+\cos 3x)}$

$= \dfrac{2\sin\dfrac{7x+5x}{2}\cos\dfrac{7x-5x}{2}+2\sin\dfrac{9x+3x}{2}\cos\dfrac{9x-3x}{2}}{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\cos\dfrac{7x-5x}{2}+2\cos\dfrac{9x+3x}{2}\cos\dfrac{9x-3x}{2}}$

$= \dfrac{2\sin 6x\cos x+2\sin 6x\cos 3x}{2\cos 6x\cos x+2\cos 6x\cos 3x}$

$= \dfrac{2\sin 6x(\cos x+\cos 3x)}{2\cos 6x(\cos x+\cos 3x)} = \dfrac{\sin 6x}{\cos 6x}$

$= \tan 6x$

= R.H.S.

प्रश्न 7. $\sin 3x+\sin 2x-\sin x = 4\sin x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

हल : L.H.S.

$= \sin 3x+\sin 2x-\sin x$

$= \sin 3x+2\cos\dfrac{2x+x}{2}\sin\dfrac{2x-x}{2}$

$= 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}+2\cos\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$

$= 2\cos\dfrac{3x}{2}\left[\sin\dfrac{3x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}\right]$

$= 2\cos\dfrac{3x}{2}\left[2\sin\dfrac{\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)}{2}.\cos\dfrac{\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{x}{2}\right)}{2}\right]$

$= 2\cos\dfrac{3x}{2}\left[2\sin\dfrac{2x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right]$

$= 2\cos\dfrac{3x}{2}\left[2\sin x\cos\dfrac{x}{2}\right]$

$= 4\sin x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

= R.H.S.

- **निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\sin\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$ तथा $\tan\dfrac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 8. $\tan x = -\dfrac{4}{3}$, **x द्वितीय चतुर्थांश में है।**

हल : $\because \quad \tan x = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore \quad \dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}} = -\dfrac{4}{3}$

या $\quad -4+4\tan^2\dfrac{x}{2} = 6\tan\dfrac{x}{2}$ (वज्रगुणन से)

या $\quad 4\tan^2\dfrac{x}{2}-6\tan\dfrac{x}{2}-4=0,$ (पक्षान्तरण से)

या $\quad 2\tan^2\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{2}-2=0,$

या $\quad 2\tan^2\dfrac{x}{2}-4\tan\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}-2=0,$

या $\quad 2\tan\dfrac{x}{2}\left(\tan\dfrac{x}{2}-2\right)+1\left(\tan\dfrac{x}{2}-2\right)=0$

या $\quad \left(2\tan\dfrac{x}{2}+1\right)\left(\tan\dfrac{x}{2}-2\right)=0$

तब या तो $\left(2\tan\dfrac{x}{2}+1\right)=0$ या फिर $\left(\tan\dfrac{x}{2}-2\right)=0$

यदि $2\tan\frac{x}{2}+1=0$ तो $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$;

और यदि $\tan\frac{x}{2}-2=0$ तो $\tan\frac{x}{2}=2$

अब चूँकि x द्वितीय चतुर्थांश में है

अर्थात् $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

2 से भाग करने पर $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$

अत: $\frac{x}{2}$ प्रथम चतुर्थांश में होगा और इसीलिए $\frac{x}{2}$ के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होंगे।

$\therefore$ $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$ अमान्य है अत: $\tan\frac{x}{2}=2$

अब $\sec^2\frac{x}{2}=1+\tan^2\frac{x}{2}$

$$=1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2=1+(2)^2=5$$

$\Rightarrow$ $\sec\frac{x}{2}=\sqrt{5}$ (धनात्मक मान होगा)

$\Rightarrow$ $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

तथा $\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ $\sin\frac{x}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

अत: $\sin\frac{x}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

तथा $\tan\frac{x}{2}=2$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\cos x=-\frac{1}{3}$, x तृतीय चतुर्थांश में है।

हल : $\because$ $\cos x=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ $2\cos^2\frac{x}{2}-1=-\frac{1}{3}$

या $2\cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

या $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$

या $\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\because$ x तृतीय चतुर्थांश में है।

$\Rightarrow$ x का मान π व $\frac{3\pi}{2}$ के बीच होगा

अर्थात $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

तब 2 से भाग करने पर

$$\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$$

तब $\frac{x}{2}$ दूसरे चतुर्थांश में पड़ेगा जिससे $\sin\frac{x}{2}$ धनात्मक होगा जबकि $\cos\frac{x}{2}$ व $\tan\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होंगे।

अत: $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

तथा $\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos^2\frac{x}{2}$

$$=1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

तथा $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}}{-\sqrt{3}/3}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=-\sqrt{2}$$

अत: $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

व $\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $\sin x=\frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

हल : $\sin x=\frac{1}{4}$ और $\sin^2x+\cos^2x=1$

$\therefore$ $\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cos^2x=1$

$\therefore$ $\cos^2x=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$\therefore$ $\cos x=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

(क्योंकि x दूसरे चतुर्थांश में है।)

अत: $\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow$ $2\cos^2\frac{x}{2}-1=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow$ $2\cos^2\frac{x}{2}=1-\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{4-\sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow$ $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{4-\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}} = \pm\sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{16}}$

$\Rightarrow \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$

$\because$ x द्वितीय चतुर्थांश में है। $\Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\therefore$ 2 से भाग करने पर, $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

तब $\frac{x}{2}$ पहले चतुर्थांश में होगा जिससे सभी अनुपात सदैव धनात्मक होंगे।

$\therefore \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$

$\therefore \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{8-2\sqrt{15}}{16}$

तब $\quad \sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos^2\frac{x}{2}$

या $\quad \sin^2\frac{x}{2} = 1-\frac{8-2\sqrt{15}}{16}$

या $\quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{8+2\sqrt{15}}{16}$

या $\quad \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{16}}$

या $\quad \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

अब $\quad \tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}}{\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$

$= \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} \times \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$

$= \frac{(\sqrt{8+2\sqrt{15}})^2}{\sqrt{(8)^2-(2\sqrt{15})^2}}$

$= \frac{8+2\sqrt{15}}{\sqrt{64-60}}$

$= \frac{8+2\sqrt{15}}{2}$

$= 4+\sqrt{15}$

अत: $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$

तथा $\tan\frac{x}{2} = 4+\sqrt{15}$ **उत्तर**

❐