इकाई 2 : बीजगणित

04 सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण
(Complex Numbers and Quadratic Equations)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 4.1

● निम्नांकित संख्याओं में से प्रत्येक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए :

प्रश्न 1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$

हल : $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right) = \left(5\times -\frac{3}{5}\right)i^2$

$= -3i^2 = -3\times -1$

$(\because\ i^2 = -1)$

$= 3 = 3 + 0\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $i^9 + i^{19}$

हल : $i^9 + i^{19} = i^{8+1} + i^{16+3}$

$= i^{4.2}.i + i^{4.4}.i^3$

$= 1\,.\,i + 1\,i^3 \qquad (\because\ i^{4k} = 1)$

$= i + (-i) = 0 = 0 + 0\,i$

$(\because\ i^3 = -i)$ **उत्तर**

प्रश्न 3. i^{-39}

हल : $i^{-39} = i^{1-40} = \frac{i}{i^{40}} = i$

$(\because\ i^{40} = i^{4\times 10} = 1)$

$= 0 + i$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $3(7 + i\,7) + i(7 + i\,7)$

हल : $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

$= 21 + 21\,i + 7\,i + 7\,i^2$

$= 21 + 28\,i + 7(-1)(\because\ i^2 = -1)$

$= 14 + 28\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $(1 - i) - (-1 + i\,6)$

हल : $(1 - i) - (-1 + i\,6)$

$= 1 - i + 1 - 6\,i$

$= (1 + 1) - (6\,i + i)$

$= 2 - 7i$ **उत्तर**

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$

हल : $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{1}{5} + i\,.\,\frac{2}{5} - 4 - i\,\frac{5}{2}$

$= \left(-4 + \frac{1}{5}\right) + i\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right)$

$= \frac{-19}{5} + i\left(\frac{4-25}{10}\right)$

$= -\frac{19}{5} - \frac{21}{10}i$ **उत्तर**

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3} + i\,\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\,\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

हल : $\left[\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

$= \left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

$= \frac{1}{3} + i\,\frac{7}{3} + 4 + i\,.\,\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - i$

$= \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3} - 1\right)$

$= \frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. $(1 - i)^4$

हल : $(1 - i)^4 = 1 - {}^4C_1 i + {}^4C_2 i^2$

$- {}^4C_3 i^3 + i^4$

$= 1 - 4\,i + 6(-1) - 4(-i) + 1$

$\left(\because\ {}^4C_1 = {}^4C_3 = 4,\ {}^4C_2 = \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2} = 6,\right.$

$\left. i^3 = -i, i^2 = -1\right)$

$= -4 = -4 + 0\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\left(\frac{1}{3}+3\,i\right)^3$

हल : $\left(\frac{1}{3}+3\,i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}^3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2 . 3\,i + {}^3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\cdot(3\,i)^2 + (3\,i)^3$

$= \frac{1}{27} + 3 . \frac{1}{9} . 3\,i + 3 . \frac{1}{3} . 9\,i^2 + 27\,i^3$

$= \frac{1}{27} + i + 9(-1) + 27(-i)$

$= \left(\frac{1}{27} - 9\right) + (i - 27\,i) = -\frac{242}{27} - 26\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $\left(-2-\frac{1}{3}\,i\right)^3$

हल : $\left(-2-\frac{1}{3}\,i\right)^3 = (-1)^3\left(2+\frac{1}{3}\,i\right)^3$

$= -\left[2^3 + {}^3C_1 . 2^2 . \frac{1}{3}\,i + {}^3C_2 . 2 . \left(\frac{1}{3}\,i\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\,i\right)^3\right]$

$= -\left[8 + 3.4\frac{1}{3}.i + 3.2.\frac{1}{9}i^2 + \frac{1}{27}i^3\right]$

$= -\left[8 + 4i - \frac{2}{3} - \frac{1}{27}i\right] = -\frac{22}{3} - \frac{107}{27}\,i$ **उत्तर**

- **दी गयी सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 11. $4 - 3\,i$

हल : $4 - 3\,i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम

$= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{4+3\,i}{(4-3\,i)(4+3\,i)}$ (जहाँ $z = 4 - 3\,i$)

$= \frac{4+3\,i}{(4)^2 - 9\,i^2} = \frac{4+3\,i}{16-9(-1)}$

$= \frac{4+3\,i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $\sqrt{5} + 3\,i$

हल : $\sqrt{5} + 3\,i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम

जहाँ $z = \sqrt{5} + 3i$

$= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{5}+3\,i} \times \frac{\sqrt{5}-3\,i}{\sqrt{5}-3\,i}$

$= \frac{\sqrt{5}-3\,i}{(\sqrt{5})^2 - (3\,i)^2} = \frac{\sqrt{5}-3\,i}{5-9\,i^2}$

$= \frac{\sqrt{5}-3\,i}{5-9\times(-1)} = \frac{\sqrt{5}-3\,i}{14}$

$= \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3}{14}\,i$ **उत्तर**

प्रश्न 13. $-\,i$

हल : $-\,i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम $= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

$= \frac{\overline{(-i)}}{(-i)\,\overline{(-i)}} = \frac{i}{-i\times i}$

$= \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = i$ **उत्तर**

प्रश्न 14. निम्नलिखित व्यंजक को a + ib के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{(3+i\sqrt{5})\,(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i) - (\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

हल : दिया हुआ व्यंजक

$= \frac{(3+i\sqrt{5})\,(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i) - (\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$

$= \frac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i - \sqrt{3} + \sqrt{2}\,i}$

$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \frac{9 - 5\,i^2}{2\sqrt{2}\,i} = \frac{9-5(-1)}{2\sqrt{2}\,i}$

$= \frac{9+5}{2\sqrt{2}\,i} = \frac{14}{2\sqrt{2}\,i}$

$= \frac{7}{\sqrt{2}\,i} = \frac{7i}{i^2\sqrt{2}} = -\frac{7}{\sqrt{2}}\,i$

$= -\frac{7\sqrt{2}}{2}\,i = 0 + i\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल : $i^{18} = i^{16} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

तथा $\left(\frac{1}{i}\right)^{25} = \frac{1}{i^{24}\times i} = \frac{i}{1\times i^2} = -\,i$

$\Rightarrow \left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3 = (-1-i)^3$

$= -\,[1 + 3\,i + 3\,i^2 + i^3]$

$= -[1 + 3i - 3 - i]$

$= 2 - 2i$ उत्तर

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए सिद्ध कीजिए :

$$\mathbf{Re}(z_1 z_2) = \mathbf{Re}(z_1)\,\mathbf{Re}(z_2) - \mathbf{Im}(z_1)\,\mathbf{Im}(z_2)$$

हल : माना $z_1 = x_1 + i y_1$

तथा $z_2 = x_2 + i y_2$

तब, $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$

$= \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$

Proved.

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

हल : $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$

$= \frac{1+i-2(1-4i)}{(1-4i)(1+i)} \cdot \frac{(3-4i)}{(5+i)}$

$= \frac{1+i-2+8i}{1+i-4i-4i^2} \cdot \frac{3-4i}{5+i}$

$= \frac{-1+9i}{1-3i-4(-1)} \cdot \frac{3-4i}{5+i}$

$= \frac{(-1+9i)}{(5-3i)} \cdot \frac{(3-4i)}{(5+i)}$

$= \frac{-3+4i+27i-36i^2}{25+5i-15i-3i^2}$

$= \frac{-3+31i-36(-1)}{25-10i-3(-1)}$

$= \frac{33+31i}{28-10i}$

$= \frac{(33+31i)(28+10i)}{(28)^2 - 10^2 i^2}$

$= \frac{307+599i}{442} = \frac{307}{442} + i\left(\frac{599}{442}\right)$

(सरल करने पर) उत्तर

प्रश्न 4. यदि $\mathbf{x - i\,y = \sqrt{\frac{a - i\,b}{c - i\,d}}}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\mathbf{(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

हल : दिया है :

$x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$

$\Rightarrow$ $|x - iy| = \left|\sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}\right|$

$\Rightarrow$ $|x - iy|^2 = \left|\sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}\right|^2$ $(\because |z|^2 = z\bar{z})$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{x^2+y^2})^2 = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}} \cdot \sqrt{\frac{a+ib}{c+id}}$

या $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{(a-ib)(a+ib)}{(c-id)(c+id)}}$

$= \sqrt{\frac{a^2 - i^2 b^2}{c^2 - i^2 d^2}}$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$

या $(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ **Proved.**

प्रश्न 5. यदि $\mathbf{z_1 = 2 - i,\ z_2 = 1 + i}$, $\left|\frac{\mathbf{z_1 + z_2 + 1}}{\mathbf{z_1 - z_2 + i}}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i} = \frac{(2-i) + (1+i) + 1}{(2-i) - (1+i) + i}$

$= \frac{4}{2 - i - 1 - i + i} = \frac{4}{1-i}$

$= \frac{4}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{4(1+i)}{1-i^2}$

$= \frac{4(1+i)}{1-(-1)} = \frac{4(1+i)}{1+1}$

$= \frac{4(1+i)}{2} = 2(1+i)$

अतः $\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right| = |2(1+i)|$

$= 2|1+i| = 2\sqrt{1^2 + 1^2}$

$= 2\sqrt{2}$ उत्तर

प्रश्न 6. यदि $\mathbf{a + i\,b = \frac{(x+i)^2}{2x^2 + 1}}$, सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}}$

हल : दिया है, $a + i\,b = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$ ...(1)

संयुग्मी लेने पर, $a - i\,b = \dfrac{(x-i)^2}{2x^2+1}$ ...(2)

अब दोनों समीकरणों की गुणा करने पर,

$$(a+i\,b)(a-i\,b) = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1} \times \frac{(x-i)^2}{2x^2+1}$$

$$= \frac{[(x+i)(x-i)]^2}{(2x^2+1)^2}$$

या $$a^2 - i^2 b^2 = \frac{[x^2 - i^2]^2}{(2x^2+1)^2}$$

⇒ $$a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$$ **Proved.**

प्रश्न 7. माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, निम्न का मान निकालिए :

(i) $\mathbf{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ **(ii)** $\mathbf{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

हल : ∵ $z_1 = 2 - i \Rightarrow \bar{z}_1 = 2 + i$

● **(i)** तब $\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} = \dfrac{(2-i)(-2+i)}{2+i}$

$$= \frac{(2-i)(-2+i)}{(2+i)} \times \frac{(2-i)}{(2-i)}$$

$$= \frac{-(2-i)^3}{(2)^2 - i^2}$$

$$= \frac{-[2^3 - {}^3C_1 2^2 . i + {}^3C_2 . 2 . i^2 - i^3]}{4-(-1)}$$

$$= \frac{-[8 - 3 . 4\,i + 3 . 2 . (-1) + i]}{5}$$

$$= \frac{-[2 - 11\,i]}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5} i$$

अत: $\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}$ का वास्तविक भाग अथवा $\mathbf{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) = -\dfrac{2}{5}$

उत्तर

● **(ii)** ∵ $\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1} = \dfrac{1}{(2-i)(2+i)}$

⇒ $$\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{2^2 - i^2} = \frac{1}{4-(-1)}$$

$$= \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + i . 0$$

अत: $\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}$ का काल्पनिक भाग अथवा $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right) = 0$

उत्तर

प्रश्न 8. यदि $(x - i\,y)(3 + 5\,i)$, $-6 - 24\,i$ की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

संकेत : $(x - i\,y)(3 + 5\,i)$

$$= (3x + 5y) + i(5x - 3y)$$

प्रश्नानुसार, $-6 - 24\,i$ की संयुग्मी

$$= (x - i\,y)(3 + 5\,i)$$

अर्थात $$-6 + 24\,i$$

$$= (3x + 5y) + i(5x - 3y)$$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

⇒ $3x + 5y = -6$ तथा $5x - 3y = 24$

उक्त दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$x = 3$ तथा $y = -3$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ **का मापांक ज्ञात कीजिए।**

हल : ∵ $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$

$$= \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{(1 + i^2 + 2i) - (1 + i^2 - 2i)}{1 - i^2}$$

$$= \frac{1 + i^2 + 2i - 1 - i^2 + 2i}{1 - (-1)}$$

$$= \frac{4i}{2} = 2i$$

∴ $$\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = 0 + 2i$$ ...(1)

∴ दी गई सम्मिश्र संख्या का मापांक $= \sqrt{0 + (2)^2} = 2$

उत्तर

प्रश्न 10. यदि $(x + i\,y)^3 = u + i\,v$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

संकेत : दिया है, $(x + i\,y)^3 = u + i\,v$

⇒ $x^3 + 3x^2 i\,y + 3x . i^2 y^2 + i^3 y^3 = u + i\,v$

या $x^3 + 3i\,x^2 y - 3x\,y^2 - i\,y^3 = u + i\,v$

⇒ $(x^3 - 3x\,y^2) + i(3x^2 y - y^3) = u + i\,v$

⇒ $$x^3 - 3x\,y^2 = u$$ ...(1)

तथा $$3x^2 y - y^3 = v$$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) को क्रमश: x तथा y से भाग देने पर,

$$x^2 - 3y^2 = \frac{u}{x}$$ ...(3)

$$3x^2 - y^2 = \frac{v}{u}$$ ...(4)

समीकरण (3) तथा (4) को जोड़ने पर,

$$(x^2 - 3y^2) + (3x^2 - y^2) = \frac{u}{x} + \frac{v}{y}$$

$$4x^2 - 4y^2 = \frac{u}{x} + \frac{v}{y}$$

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$$

Proved.

प्रश्न 11. यदि α तथा β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because |z|^2 = z\bar{z}$

$$\therefore \quad \left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|^2 = \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right)\left(\frac{\overline{\beta - \alpha}}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right) \qquad \text{[Note]}$$

$$= \left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|\left(\frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{1} - \bar{\bar{\alpha}}\bar{\beta}}\right)$$

$$[\because \ \overline{f(z)} = f(\bar{z})]$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}{(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta})} \qquad [\because \ \bar{\bar{z}} = z]$$

$$= \frac{\beta\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\alpha}\,\beta\bar{\beta}}$$

$$= \frac{1 - (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + |\alpha|^2}{1 - (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + |\alpha|^2 . 1}$$

$$[\because \ \beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = 1^2 = 1 \text{ तथा } \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2]$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|^2 = \frac{1 - (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + |\alpha|^2}{1 - (\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + |\alpha|^2} = 1$$

अत: वर्गमूल लेने पर, $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right| = 1$ **उत्तर**

प्रश्न 12. समीकरण $|1 - i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \ |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\therefore$ दिया गया समीकरण, निम्नवत् लिखा जा सकता है :

$$(\sqrt{2})^x = 2^x \quad \Rightarrow \quad (2^{1/2})^x = 2^x$$

या $\quad 2^{x/2} = 2^x \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2^x}{2^{x/2}} = 2^{x/2}$

$$\Rightarrow \quad 2^{x/2} = 2^0 \qquad (\because \ 1 = 2^0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 0 \quad \text{या} \quad x = 0$$

अर्थात दिए गए समीकरण का एकमात्र मूल शून्य है।

अत: दिए गए समीकरण के शून्येतर मूलों की संख्या शून्य है। **उत्तर**

प्रश्न 13. यदि $(a + ib).(c + id).(e + if)(g + ih) = A + iB$ है तो दर्शाइए कि $(a^2 + b^2).(c^2 + d^2).(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

हल : दिया है, $(a + ib).(c + id).(e + if)(g + ih) = A + iB$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|(a + ib).(c + id).(e + if).(g + ih)| = |A + iB|$$

$$\Rightarrow \quad |a + ib| . |c + id| . |e + if| . |g + ih| = |A + iB|$$

$$[\because \ |z_1 z_2 z_3 \ldots| = |z_1| . |z_2| . |z_3| \ldots]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{e^2 + f^2}\sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2 \qquad \textbf{Proved.}$$

प्रश्न 14. यदि $\left[\frac{1 + i}{1 - i}\right]^m = 1$ है तो m का न्यूनतम धन पूर्णांकीय मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(1 + i)^2}{1 - i^2}$

$$= \frac{1 + i^2 + 2i}{1 - (-1)} = \frac{1 + (-1) + 2i}{1 + 1}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$\because \ \left[\frac{1 + i}{1 - i}\right]^m = 1 \quad \Rightarrow \quad i^m = 1$

$\Rightarrow$ m, 4 का एक गुणज है। **[Note]**

अत: m का न्यूनतम धन पूर्णांकीय मान = 4 **उत्तर**

❐