06 क्रमचय एवं संचय (Permutations and Combinations)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली | 6.1

प्रश्न 1. अंक 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि :

(i) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो?

हल : (i) $\because$ अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से ऐसी संख्याएँ बनानी हैं जिनमें 3 अंक इकाई, दहाई व सैकड़ा हों।

सैकड़ा	दहाई	इकाई

मान लीजिए कि तीन अंकों की संख्या बनाने के लिए हमें उक्त चित्र के अनुसार तीन रिक्त स्थानों को दिए गए पाँच अंकों द्वारा भरना है।

हम सैकड़े के स्थान को दिए गए पाँच अंकों में से किसी एक अंक द्वारा भर सकते हैं। यह स्थान चूँकि 5 अंकों में से एक अंक द्वारा भरा जाना है। अत: इसे भरने की 5 विधियाँ हैं।

अब हमें दहाई के स्थान को भरना है।

$\because$ अंकों की पुनरावृत्ति पर कोई प्रतिबन्ध नहीं है। अत: हम दहाई के स्थान को भी पाँचों अंकों में से एक अंक द्वारा भर सकते हैं। इसे भी 5 विधियों से भरा जा सकता है।

इसी प्रकार सैकड़े का स्थान भी 5 विधियों द्वारा भरा जा सकता है।

इस प्रकार, दिए गए अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से बनी 3 अंकों वाली कुल संख्याएँ $= 5 \times 5 \times 5 = 125$ **उत्तर**

- **(ii)** यहाँ हमें 1, 2, 3, 4 और 5 अंकों से 3 अंकों वाली ऐसी संख्याएँ बनानी हैं कि अंकों की पुनरावृत्ति न हो।

यह तो स्पष्ट है कि सैकड़े के स्थान को हम उक्त पाँचों अंकों में से किसी एक अंक द्वारा भर सकते हैं। इसे भरने की 5 विधियाँ हैं।

$\because$ अंकों की पुनरावृत्ति नहीं होनी है।

$\therefore$ दूसरे स्थान दहाई के लिए उस अंक को नहीं चुनना है जिसे सैकड़े के लिए चुन चुके हैं। तब दहाई के स्थान को शेष चार अंकों में से एक अंक द्वारा भरना होगा। इसे चार विधियों से भरा जा सकता है।

अब इकाई के स्थान को शेष 3 अंकों द्वारा भरा जाना है। इसकी भी 3 विधियाँ हैं।

अत: उक्त अंकों से बनी 3 अंकों वाली कुल संख्याएँ $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ **उत्तर**

वैकल्पिक विधि : जब अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती है, तब इकाई, दहाई व सैकड़े के तीनों स्थानों को 5 अंकों में से 3 अंकों द्वारा भरे जाने की कुल विधियाँ $= {}^5P_3$

$$= \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 5 \times 4 \times 3 = 60$$

अत: प्राप्त होने वाली कुल संख्याएँ $= 60$ **उत्तर**

प्रश्न 2. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है?

हल : $\because$ सम संख्याओं में इकाई का अंक अनिवार्यत: सम संख्या होगा। अत: दिए गए अंकों में से इकाई के स्थान पर केवल 2, 4, 6 को ही लिया जा सकता है।

अत: इकाई का स्थान भरने की विधियों की कुल संख्या $= 3$

$\because$ अंकों की पुनरावृत्ति सम्भव है।

अत: दहाई व सैकड़े के शेष दोनों स्थानों में से प्रत्येक को 6 अंकों में से किसी के भी द्वारा भरा जा सकता है।

अत: प्रत्येक स्थान को भरने की विधियों की अलग-अलग संख्या $= 6$

इस प्रकार प्राप्त कुल 3 अंकीय विन्यास

$$= 6 \times 6 \times 3 = 108$$

अत: कुल संख्याएँ $= 108$ **उत्तर**

प्रश्न 3. अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

हल : 10 अक्षरों द्वारा 4 अक्षर वाले कोड बनाने हैं और अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

तब कोड का पहला अक्षर 10 प्रकार से, दूसरा अक्षर 9 प्रकार से, तीसरा अक्षर 8 प्रकार से और चौथा अक्षर 7 प्रकार से चुना जा सकता है।

अत: 4 अक्षरों के कुल कोड $= 10 \times 9 \times 8 \times 7$

$= 5040$ **उत्तर**

वैकल्पिक विधि : 10 अक्षरों में से 4 अक्षर चुनने की कुल विधियाँ $= {}^{10}P_4$

$$= \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

अत: कोडों की कुल संख्या $= 5040$ **उत्तर**

प्रश्न 4. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नम्बर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नम्बर 67 से प्रारम्भ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

हल : प्रश्नानुसार, 5 अंकीय टेलीफोन नम्बर निम्न रूप का होगा :

6	7			

स्पष्ट है कि प्रथम दो स्थानों को भरने की केवल एक विधि है तथा अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है तो शेष तीन स्थानों को 8 अंकों से भरना है।

8 अंकों से तीन स्थानों को भरने की कुल विधियाँ $= {}^8P_3$

$\therefore$ टेलीफोन नम्बरों की अभीष्ट संख्या

$$= 1 \times {}^8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6$$

$$= 336$$

अत: 5 अंकीय टेलीफोन नम्बरों की कुल संख्या $= 336$

उत्तर

प्रश्न 5. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है और परिणाम अंकित कर लिए जाते हैं। परिणामों की सम्भव संख्या क्या है?

हल : $\because$ सिक्का प्रत्येक उछाल में हैड और टेल दो परिणाम देता है।

$\therefore$ 3 बार उछाल में सम्भव परिणामों की संख्या

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$ **उत्तर**

प्रश्न 6. भिन्न-भिन्न रंगों के 5 झण्डे दिए हुए हैं। इनसे कितने विभिन्न संकेत बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक संकेत में 2 झण्डों, एक के नीचे दूसरे, के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है?

हल : पाँच झण्डों में से 2 झण्डे चुनने की कुल विधियाँ

$$= {}^5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

अत: इन झण्डों से बनाए जा सकने वाले संकेतों की संख्या

$= 20$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 6.2

प्रश्न 1. मान निकालिए :

(i) 8 ! **(ii) 4 ! − 3 !**

हल : (i) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40320$ **उत्तर**

● **(ii)** $4! - 3! = 4 \times 3! - 3!$

$= (4-1) \times 3! = 3 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 18$ **उत्तर**

प्रश्न 2. क्या $3! + 4! = 7!$?

हल : यहाँ, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

और $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$\therefore$ $3! + 4! = 6 + 24 = 30$

अब $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 5040$

इससे स्पष्ट है कि $3! + 4! \neq 7!$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $\frac{8!}{6! \times 2!}$ का परिकलन कीजिए।

हल : $\frac{8!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7}{2}$

$= 28$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{6!} + \frac{1}{7 \times 6!} = \frac{x}{8 \times 7 \times 6!}$

$\Rightarrow$ $\frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} + \frac{8 \times 7 \times 6!}{7 \times 6!} = x$

($8 \times 7 \times 6!$ से गुणा करने पर)

$\Rightarrow$ $8 \times 7 + 8 = x$

$\Rightarrow$ $x = 56 + 8 = 64$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $\frac{n!}{(n-r)!}$ का मान निकालिए जब

(i) n = 6, r = 2

(ii) n = 9, r = 5

हल : (i) $\because\ n = 6$ और $r = 2$

$$\therefore \quad \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

$$= \frac{6!}{4!} = \frac{6\times 5\times 4!}{4!}$$

$$= 6\times 5 = 30$$

अत: $\dfrac{n}{(n-r)!} = 30$ **उत्तर**

● **(ii)** $\because\ n = 9$ और $r = 5$

$$\therefore \quad \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-5)!}$$

$$= \frac{9!}{4!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!}$$

$$= 9\times 8\times 7\times 6\times 5$$

$$= 15120$$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 6.3

प्रश्न 1. 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि किसी भी अंक को दोहराया नहीं गया है?

हल : दिए गए 9 अंकों (1, 2, 3, 4, ... 8, 9) में से बिना दोहराए, तीन अंक लेकर बनाई जा सकने वाली संख्याओं की संख्या $= {}^9P_3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!}$

$$= \frac{9\times 8\times 7\times 6!}{6!}$$

$$= 9\times 8\times 7 = 504$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

हल : स्पष्ट है कि चार अंकीय संख्या बनाने के लिए हमें चार रिक्त स्थानों

हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

को दस अंकों 0, 1, 2, 3 ... 7, 8, 9 द्वारा (बिना दोहराव के) भरना होगा।

हजार का स्थान 0 को छोड़कर 9 अंकों में से किसी के द्वारा भी भरा जा सकता है (अन्यथा संख्या 3 अंकीय रह जाएगी)।

0 को छोड़ने पर प्रथम स्थान भरने की विधियों की संख्या = 9

प्रथम स्थान पर प्रयुक्त अंक को छोड़ने पर, दूसरे, तीसरे व चौथे स्थानों को भरने की विधियों की संख्याएँ क्रमश: 9, 8 व 7 होंगी।

$\therefore$ गुणन सिद्धान्त से, चार अंकों की संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 9\times 9\times 8\times 7 = 4536$ **उत्तर**

प्रश्न 3. अंक 1, 2, 3, 4, 6, 7 को प्रयुक्त करने से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है?

हल : दिए गए कुल अंक (1, 2, 3, 4, 6, 7) 6 हैं। हमें इनमें से तीन अंक चुनकर संख्याएँ बनानी हैं।

स्पष्ट है कि सम (Even) बनाने के लिए उसमें इकाई के स्थान पर 2, 4 या 6 में से एक अंक रखना होगा।

तब इकाई का अंक लिखने की कुल विधियाँ

$$= {}^3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times 2!}{2!} = 3$$

अब शेष 5 अंकों द्वारा इकाई व दहाई के अंक लिखने की कुल विधियाँ

$$= {}^5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$

$$= \frac{5\times 4\times 3!}{3!} = 5\times 4 = 20$$

तब, तीन अंकीय सम संख्याओं की अभीष्ट संख्या

$$= {}^5P_2\times {}^3P_1 = 20\times 3 = 60$$ **उत्तर**

प्रश्न 4. अंक 1, 2, 3, 4, 5 के उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

हल : दिए गए अंक (1, 2, 3, 4, 5) = 5

तब, अंकों को दोहराए बिना उक्त 5 अंकों में से किन्हीं चार को लेकर बनी 4 अंकीय संख्याओं की संख्या

$$= {}^5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!}$$

$$= \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1} = 120$$

अत: दिए गए अंकों से बनी चार अंकीय संख्याएँ = 120 **उत्तर**

दिए गए अंकों में (2 व 4) दो अंक सम हैं, जिनके इकाई पर स्थित होने से ही सम संख्याएँ बनेंगी।

$\therefore$ इकाई का स्थान भरने की विधियों की संख्या = 2

तब, शेष 4 अंकों से चार अंकीय संख्या के शेष तीन स्थान भरने की विधियों की संख्या $= {}^4P_3 = \dfrac{4!}{(4-3)!}$

$$= \frac{4\times 3\times 2\times 1}{1!} = 24$$

$\therefore$ चार अंकीय सम संख्याओं की कुल संख्या

$$= 2\times 24 = 48$$ **उत्तर**

प्रश्न 5. 8 व्यक्तियों की समिति में हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष तथा एक उपाध्यक्ष यह मानते हुए चुन सकते हैं कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

हल : $\because$ समिति में कुल सदस्य = 8

$\because$ 8 में से किसी को भी अध्यक्ष चुना जा सकता है। अत: अध्यक्ष चुनने की विधियों की संख्या = 8

∵ एक व्यक्ति एक ही पद पर रह सकता है। अत: उपाध्यक्ष शेष 7 व्यक्तियों में से चुनना होगा।

तब, शेष 7 व्यक्तियों में से 1 उपाध्यक्ष चुनने की विधियों की संख्या = 7

अत: एक अध्यक्ष एवं एक उपाध्यक्ष चुनने की कुल विधियाँ = $8 \times 7 = 56$ **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि $^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$ तो n ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)!}{(n-1-3)!} : \frac{n!}{(n-4)!} = 1 : 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)!}{(n-4)!} \times \frac{(n-4)!}{n!} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{9}$$

या $$\frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{9}$$

$\Rightarrow \quad n = 9$ **उत्तर**

प्रश्न 7. r ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $^5P_r = 2\ {}^6P_{r-1}$

(b) $^5P_r = {}^6P_{r-1}$

हल : (a) $^5P_r = 2 \times {}^6P_{r-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6!}{(6-r+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{2 \times 6 \times 5!}{(7-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5-r)!} = \frac{12}{(7-r)(6-r) \times (5-r)!}$$

$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 12$

$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 30 = 0$

$\Rightarrow \quad (r-3)(r-10) = 0$

$\Rightarrow \quad r = 3$ अथवा $r = 10$

परन्तु ^5P_r से स्पष्ट है कि $r \le 5$ **[Note]**

अत: $r = 3$ **उत्तर**

● **(b)** $^5P_r = {}^6P_{r-1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6!}{(6-r+1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6 \times 5!}{(7-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5-r)!} = \frac{6}{(7-r)(6-r) \times (5-r)!}$$

$\Rightarrow \quad (7-r)(6-r) = 6$

$\Rightarrow \quad r^2 - 13r + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad (r-4)(r-9) = 0$

$\Rightarrow \quad r = 4$ अथवा $r = 9$

परन्तु ^5P_r से स्पष्ट है कि $r \le 5$ **[Note]**

अत: $r = 4$ **उत्तर**

प्रश्न 8. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यत: केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं?

हल : शब्द 'EQUATION' में प्रयुक्त अक्षरों की संख्या = 8

∵ सभी अक्षर भिन्न-भिन्न हैं और कोई अक्षर दोहराया नहीं गया है।

तब इनसे बनने वाले (अर्थपूर्ण या अर्थहीन) शब्दों की संख्या = $^8P_8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = 8!$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40320$

अत: शब्द EQUATION के अक्षरों से बने कुल शब्दों की संख्या = 40320 **उत्तर**

प्रश्न 9. MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जाती है, यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं?

(ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?

(iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किन्तु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

हल : शब्द MONDAY के अक्षरों की कुल संख्या = 6

किसी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं होनी है। तब

● **(i)** एक समय में 6 अक्षरों में से 4 अक्षर चुनकर बनाए जा सकने वाले शब्दों की संख्या = $^6P_4$

$$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

उत्तर

● **(ii)** एक समय में सभी अक्षर लेने पर बने शब्दों की संख्या

$= {}^6P_6$

$= 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ **उत्तर**

● **(iii)** ∵ दिए गए शब्द में केवल दो स्वर A और O हैं, अत: प्रथम स्थान इनमें से किसी एक के द्वारा भरा जा सकता है।

अत: प्रथम स्थान को भरने की विधियों की संख्या = 2

तब, शेष 5 अक्षरों में सभी को लेकर बने शब्दों की संख्या

$= {}^5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

तब, सभी अक्षरों से बने शब्दों की संख्या जबकि प्रारम्भ में स्वर हो $= 120 \times 2 = 240$

अत: अभीष्ट शब्दों की संख्या = 240 **उत्तर**

प्रश्न 10. MISSISSIPPI शब्द के अक्षरों से बने भिन्न-भिन्न क्रमचयों में से कितनों में चारों I एक साथ नहीं आते हैं?

हल : शब्द MISSISSIPPI में कुल अक्षर = 11

इनमें 4I एक जैसे, 4S एक जैसे, 2P एक जैसे तथा शेष भिन्न-भिन्न हैं।

$\therefore$ इन सभी अक्षरों को एक साथ लेकर बन सकने वाले शब्दों की संख्या $= \dfrac{11!}{4! \times 4! \times 2!}$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) \times 4!}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

$$= 34650$$

यदि चारों I एक-साथ हों तो इन्हें एक ही अक्षर माना जा सकता है।

तब कुल अक्षर 8 होंगे जिनमें 4 S एक जैसे, 2 P एक जैसे तथा शेष भिन्न-भिन्न हैं।

उन शब्दों की कुल संख्या जिनमें चारों I एक साथ हैं

$$= \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 840$$

अत: ऐसे शब्दों की संख्या जिनमें चारों I एक साथ नहीं आते हैं।

$= 34650 - 840 = 33810$ **उत्तर**

प्रश्न 11. PERMUTATIONS शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि

(i) चयनित शब्द का प्रारम्भ P से तथा अन्त S से होता है?

(ii) चयनित शब्द में सभी स्वर एक-साथ हैं।

(iii) चयनित शब्द में P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हों?

हल : शब्द PERMUTATIONS में कुल अक्षरों की संख्या = 12 जिनमें T दो बार आया है।

- **(i)** $\because$ चयनित शब्द का प्रारम्भ P से और अन्त S से होता है। अत: प्रथम व अन्तिम स्थानों को भरने की केवल एक विधि है।

शेष 10 अक्षरों से बीच के 10 स्थानों को भरने की विधियों की संख्या $= \dfrac{10!}{2!}$

$\therefore$ P से प्रारम्भ व S पर अन्त होने वाले शब्दों की कुल संख्या

$$= 1 \times \frac{10!}{2!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$= 1814400$ **उत्तर**

- **(ii)** शब्द PERMUTATIONS में स्वरों की संख्या = 5

$\because$ इन 5 स्वरों को एक-साथ रहना है। अत: इन पाँचों स्वरों को एक अक्षर की तरह मानने पर कुल अक्षरों की संख्या

$$= (12 - 5 + 1) = 8$$

$\because$ इन आठ अक्षरों में T दो बार आया है।

$\therefore$ इनसे बनने वाले शब्दों या क्रमचयों की संख्या $= \dfrac{8!}{2!}$

अब पाँच स्वरों को परस्पर 5! विधियों द्वारा विन्यसित किया जा सकता है।

अत: उन शब्दों की कुल संख्या, जिनमें पाँचों स्वर एक-साथ हैं $= 5! \times \dfrac{8!}{2!}$

$$= \frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!)}{2!}$$

$= 2419200$ **उत्तर**

- **(iii)** $\because$ कुल अक्षर = 12

P और S को इस प्रकार रखना है कि उनके बीच 4 अक्षरों का स्थान रिक्त रहे।

ऐसे विन्यास जिनमें P व S के बीच ठीक चार स्थान रिक्त हैं, निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित हैं :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	□	□	□	□	S	—	—	—	—	—	—
—	P	□	□	□	□	S	—	—	—	—	—
—	—	P	□	□	□	□	S	—	—	—	—
—	—	—	P	□	□	□	□	S	—	—	—
—	—	—	—	P	□	□	□	□	S	—	—
—	—	—	—	—	P	□	□	□	□	S	—
					—	P	□	□	□	□	S

चित्र से स्पष्ट है कि ऐसे 7 विन्यास हैं तथा P व S की स्थितियों को परस्पर बदलकर प्रत्येक विन्यास से 2 विन्यास प्राप्त किए जा सकते हैं।

इस प्रकार P और S के मध्य 4 रिक्त स्थान बनाए रखना है तो हमें इसके लिए $7 \times 2 = 14$ विन्यास बनाने होंगे।

अब शेष 10 अक्षरों में 2 (T) एकसमान हैं।

इनको लेकर बनने वाले विन्यासों की संख्या $= \dfrac{10!}{2!}$

अत: गुणन सिद्धान्त से उन शब्दों की कुल संख्या, जिनमें P व S के बीच ठीक चार अक्षर हैं $= 14 \times \dfrac{10!}{2!}$

$$= 14 \times \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 25401600$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 6.4

प्रश्न 1. यदि $^nC_8 = {^nC_2}$ तो $^nC_2$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $^nC_8 = {^nC_2}$

$\Rightarrow \quad n = 8+2 = 10$

तब, $^nC_2 = {^{10}C_2}$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!\times 8!}$$

$$= \frac{10\times 9\times 8!}{2\times 1\times 8!} = 45$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. n का मान निकालिए, यदि

(i) $^{2n}C_3 : {^nC_2} = 12:1$

(ii) $^{2n}C_3 : {^nC_3} = 11:1$

हल : **(i)** $^{2n}C_3 = \dfrac{2n!}{3!(2n-3)!}$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{3\times 2\times 1\times (2n-3)!}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$$

$\therefore \quad {^{2n}C_3} = \dfrac{2}{3}n(2n-1)(n-1) \quad ...(1)$

और $\quad {^nC_2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\times 1\times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\therefore \quad {^nC_2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad ...(2)$

अब दिया है कि $^{2n}C_3 : {^nC_2} = 12:1$

या $\quad \dfrac{^{2n}C_3}{^nC_2} = \dfrac{12}{1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\frac{2}{3}n(2n-1)(n-1)}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \dfrac{12}{1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2\times 2}{3}\times(2n-1) = 12$

$\Rightarrow \quad 2n-1 = \dfrac{12\times 3}{4} = 9$

$\therefore \quad 2n = 9+1 = 10$

$\Rightarrow \quad n = 5$ **उत्तर**

● **(ii)** खण्ड **(i)** के हल से

$$^{2n}C_3 = \frac{2}{3}n(2n-1)(n-1)$$

तथा $\quad {^nC_3} = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3\times 2\times 1\times (n-3)!}$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

दिया है, $\quad {^{2n}C_3} : {^nC_3} = 11:1$

या $\quad \dfrac{^{2n}C_3}{^nC_3} = \dfrac{11}{1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\frac{2}{3}n(2n-1)(n-1)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} = 11$

या $\quad \dfrac{2\times 6}{3}\times\dfrac{(2n-1)}{(n-2)} = 11$

$\Rightarrow \quad 11\times(n-2) = 4\times(2n-1)$

$\therefore \quad 11n - 22 = 8n - 4$

$\therefore \quad 11n - 8n = 22 - 4$

$3n = 18$

$\therefore \quad n = 6$

अत: n का मान $= 6$ **उत्तर**

प्रश्न 3. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिन्दुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

हल : $\because$ वृत्त पर स्थित बिन्दुओं की संख्या = 21

और दो बिन्दुओं से होकर एक जीवा खींची जा सकती है।

$\therefore$ जीवाओं की संख्या = 21 बिन्दुओं में से 2 बिन्दुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या

$$= {^{21}C_2}$$

$$= \frac{21!}{2!(21-2)!} = \frac{21!}{2!\times 19!}$$

$$= \frac{21\times 20\times 19!}{2\times 1\times 19!} = 210$$

अत: जीवाओं की संख्या = 210 **उत्तर**

प्रश्न 4. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीके हैं?

हल : $\because$ 5 लड़कों में से 3 लड़कों का चयन करने की विधियों की संख्या = $^5C_3$

और 4 लड़कियों में से 3 लड़कियों का चयन करने की विधियों की संख्या = $^4C_3$

$\therefore$ टीम तैयार करने की कुल विधियों की संख्या

$$= {^5C_3}\times{^4C_3}$$

$$= \frac{5!}{3!(5-3)!}\times\frac{4!}{3!(4-3)!}$$

$$= \frac{5!}{3!\times 2!}\times\frac{4!}{3!\times 1!}$$

$$= \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2\times 1}\times\frac{4\times 3!}{3!\times 1}$$

$= 10 \times 4 = 40$

अतः 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कुल तरीके = 40 **उत्तर**

प्रश्न 5. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

हल : 6 लाल गेंदों में से तीन गेंद चुनने की विधियों की संख्या = $^6C_3$

5 सफेद गेंदों में से तीन गेंद चुनने की विधियों की संख्या = $^5C_3$

तथा 5 नीली गेंदों में से तीन गेंद चुनने की विधियों की संख्या = $^5C_3$

∴ प्रत्येक रंग की तीन गेंद चुनते हुए कुल 9 गेंद चुनने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^6C_3 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3$$
$$= \frac{6!}{3!(6-3)!} \times \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{5!}{3!(5-3)!}$$
$$= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{5!}{3!2!} \times \frac{5!}{3!2!}$$
$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!}$$
$$= (5 \times 4) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2)$$
$$= 20 \times 10 \times 10 = 2000$$

अतः 9 गेंदों, जिनमें प्रत्येक रंग की 3 गेंद हों, चुनने के कुल सम्भव तरीके = 2000 **उत्तर**

प्रश्न 6. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक इक्का है।

हल : ∵ ताश की गड्डी में पत्तों की कुल संख्या = 52,

और इक्कों की कुल संख्या = 4

∴ शेष पत्तों की संख्या = 52 − 4 = 48

अब हमें 5 पत्तों के ऐसे संग्रह बनाने हैं जिनमें एक इक्का अवश्य हो तथा 4 अन्य पत्ते हों।

∴ 4 इक्कों में से 1 इक्का चुनने के सम्भव तरीके = $^4C_1 = 4$

अब 48 पत्तों में से 4 पत्ते चुनने के सम्भव तरीके

$$= {}^{48}C_4 = \frac{48!}{4!(48-4)!}$$
$$= \frac{48!}{4! \times 44!} = \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 44!}$$
$$= 2 \times 47 \times 46 \times 45 = 194580$$

∴ 5 पत्तों वाले कुल संग्रह = 4×194580

= 778320

अतः उक्त प्रकार के 5 पत्तों के कुल संचयों की संख्या = 778320 **उत्तर**

प्रश्न 7. 17 खिलाड़ियों में से, जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाजी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यतः 4 गेंदबाज हैं?

हल : ∵ कुल खिलाड़ियों की संख्या = 17

गेंदबाजों की संख्या = 5

∴ शेष खिलाड़ियों की संख्या = 17 − 5 = 12

अब हमें 11 खिलाड़ियों की जो टीम बनानी है, उसमें 4 गेंदबाज और शेष 7 अन्य खिलाड़ी होने चाहिए।

5 गेंदबाजों में से 4 के चयन की विधियाँ = $^5C_4$

और शेष 12 खिलाड़ियों में से 7 के चयन की विधियाँ = $^{12}C_7$

∴ 11 खिलाड़ियों की टीम के चयन की कुल सम्भव विधियाँ

$$= {}^5C_4 \times {}^{12}C_7$$
$$= \frac{5!}{4!(5-4)!} \times \frac{12!}{7!(12-7)!}$$
$$= \frac{5!}{4! \times 1!} \times \frac{12!}{7! \times 5!}$$
$$= \frac{5 \times 4!}{4! \times 1} \times \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3960$$

अतः टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन 3960 प्रकार से किया जा सकता है। **उत्तर**

प्रश्न 8. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल : ∵ थैली में 5 काली और 6 लाल गेंद हैं, जिनमें 2 काली तथा 3 लाल गेंद चुननी हैं।

∴ 5 काली गेंदों में से 2 को चुनने की विधियाँ = $^5C_2$

और 6 लाल गेंदों में से 3 को चुनने की विधियाँ = $^6C_3$

∴ थैली में से 2 काली और 3 लाल गेंद चुनने की विधियाँ

$$= {}^5C_2 \times {}^6C_3$$
$$= \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{6!}{3!(6-3)!}$$
$$= \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 10 \times 20$$
$$= 200 \quad \text{(सरल करने पर)}$$

अतः उक्त थैली में से 2 काली और 3 लाल गेंदों के चयन के 200 तरीके हैं। **उत्तर**

प्रश्न 9. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

हल : कुल पाठ्यक्रम = 9 और कुल 5 पाठ्यक्रम चुनने हैं जिनमें 2 अनिवार्य हैं।

$\therefore$ विद्यार्थी को $(9-2)=7$ पाठ्यक्रमों में से $(5-2)=3$ पाठ्यक्रम स्वेच्छा से चुनने हैं।

तब 7 पाठ्यक्रमों में से 3 के

चयन के प्रकार $= {}^7C_3$

$$= \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\times 4!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{3\times 2\times 1\times 4!} = 35$$

अत: 1 विद्यार्थी द्वारा पाँचों पाठ्यक्रम चुनने के कुल सम्भव तरीके = 35 **उत्तर**

? विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से, कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि प्रत्येक शब्द में 2 स्वर तथा 3 व्यंजन हों?

हल : शब्द DAUGHTER में अक्षरों की संख्या = 8

स्वरों की संख्या = 3, (A, E, U)

तथा व्यंजनों की संख्या = 5 (D, G, H, R, T)

3 स्वरों में से 2 स्वर चुनने की विधियाँ $= {}^3C_2$

और 5 व्यंजनों में से 3 व्यंजन चुनने की विधियाँ $= {}^5C_3$

$\therefore$ 2 स्वरों और 3 व्यंजनों वाले

संचयों की संख्या $= {}^3C_2 \times {}^5C_3$

$$= \frac{3.2}{1.2} \times \frac{5.4.3}{1.2.3} = 3\times 10 = 30$$

$\because$ प्रत्येक संचय में 5 अक्षर हैं जिन्हें 5! प्रकार से विन्यसित किया जा सकता है।

$\therefore$ सभी 30 संचयों के क्रमचयों की

कुल संख्या $= 30 \times {}^5P_5$

$$= 30 \times \frac{5!}{0!}$$

$$= \frac{30\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1} = 3600$$

इस प्रकार, 2 स्वर और 3 व्यंजनों से बने शब्दों की कुल संख्या = 3600 **उत्तर**

प्रश्न 2. EQUATION शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि स्वर तथा व्यंजन एक-साथ रहते हैं?

हल : शब्द EQUATION में

व्यंजनों की संख्या = 3 (N, Q, T)

शब्द EQUATION में

स्वरों की संख्या = 5 (A, E, I, O, U)

सभी स्वरों को एक-साथ तथा सभी व्यंजनों को एक-साथ रखना है।

सभी स्वरों को एक अक्षर तथा सभी व्यंजनों को एक अक्षर मानने पर कुल दो अक्षर होंगे।

इन दो अक्षरों को परस्पर विन्यसित करने की

विधियों की संख्या = 2!

अब सभी पाँच स्वरों को परस्पर

व्यवस्थित करने की विधियाँ = 5!

और सभी तीन व्यंजनों को परस्पर

व्यवस्थित करने की विधियाँ = 3!

$\therefore$ आधारभूत गणना सिद्धान्त से क्रमचयों की कुल संख्या

$= 2!\times 5!\times 3!$

$= 2\times 1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 3\times 2\times 1$

$= 1440$

अत: शब्द EQUATION के अक्षरों से बने शब्दों की संख्या = 1440 जबकि सभी स्वर व सभी व्यंजन एक-साथ रहते हों। **उत्तर**

प्रश्न 3. 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी है यह कितने प्रकार से किया जा सकता है, जबकि समिति में,

(i) तथ्यत: 3 लड़कियाँ हैं?

(ii) न्यूनतम 3 लड़कियाँ हैं?

(iii) अधिकतम 3 लड़कियाँ हैं?

हल : (i) पहली दशा : जबकि समिति में तथ्यत: तीन लड़कियाँ हैं,

तब, लड़कों की संख्या $= 7-3 = 4$

4 लड़कियों में से 3 को चुनने के ढंग $= {}^4C_3$

9 लड़कों में से 4 लड़के चुनने के ढंग $= {}^9C_4$

$\therefore$ 4 लड़कों और 3 लड़कियों की टीम बनाने के कुल ढंग

$$= {}^4C_3 \times {}^9C_4 = \frac{4.3.2}{1.2.3} \times \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}$$

$= 4\times 126 = 504$ **उत्तर**

- **(ii) दूसरी दशा : जबकि समिति में न्यूनतम तीन लड़कियाँ हैं।**

इस स्थिति में समिति की रचना निम्नवत सम्भव है :

(i) 3 लड़कियाँ और 4 लड़के

(ii) चारों लड़कियाँ और तीन लड़के

3 लड़कियों और 4 लड़कों को चुनकर समिति बनाने की विधियों की संख्या $= {}^4C_3 \times {}^9C_4$

4 लड़कियों और 3 लड़कों को चुनकर समिति बनाने की विधियों की संख्या $= {}^4C_4 \times {}^9C_3$

अत: समिति बनाने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^4C_3 \times {}^9C_4 + {}^4C_4 \times {}^9C_3$$

$$= \frac{4.3.2}{1.2.3} \times \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} + 1 \times \frac{9.8.7}{1.2.3}$$

$= (504+84) = 588$ **उत्तर**

- **(iii) तीसरी दशा : जबकि समिति में अधिकतम तीन लड़कियाँ हैं।**

इस स्थिति में समिति का गठन निम्न प्रकार सम्भव है :

(i) कोई लड़की नहीं, 7 लड़के
(ii) 1 लड़की + 6 लड़के
(iii) 2 लड़कियाँ + 5 लड़के और
(iv) 3 लड़कियाँ + 4 लड़के

सातों लड़कों को लेकर समिति गठन के कुल ढंग = $^9C_7$

1 लड़की और 6 लड़कों की समिति गठित करने के कुल ढंग = $^4C_1 \times {}^9C_6$

2 लड़कियों और 5 लड़कों की समिति गठित करने के कुल ढंग = $^4C_2 \times {}^9C_5$

अब, 3 लड़कियों और 4 लड़कों की समिति गठित करने के कुल ढंग = $^4C_3 \times {}^9C_4$

∴ समिति गठन के कुल प्रकार

$$= {}^9C_7 + {}^4C_1 \times {}^9C_6 + {}^4C_2 \times {}^9C_5 + {}^4C_3 \times {}^9C_4$$

$$= {}^9C_2 + {}^4C_1 \times {}^9C_3 + {}^4C_2 \times {}^9C_4 + {}^4C_1 \times {}^9C_4$$

$$= \frac{9.8}{1.2} + 4 \times \frac{9.8.7}{1.2.3} + \frac{4.3}{1.2} \times \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} + 4 \times \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}$$

$= 36 + 336 + 756 + 504 = 1632$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि शब्द EXAMINATION के सभी अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों को शब्दकोश की तरह सूचीबद्ध किया जाता है तो E से प्रारम्भ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व कितने शब्द हैं?

हल : हम जानते हैं कि शब्दकोश में सभी शब्द वर्णमाला के क्रम में व्यवस्थित किए जाते हैं।

यहाँ हमें A से प्रारम्भ होने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात करनी है क्योंकि E से प्रारम्भ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व सभी शब्द A से प्रारम्भ होंगे।

A से प्रारम्भ होने वाले शब्दों की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें शेष 10 अक्षरों E, X, M, I, N, A, T, I, O, N जिनमें दो समान अक्षर (I, I) एक प्रकार के तथा दो समान अक्षर (N, N) दूसरे प्रकार के हैं, के विन्यासों की संख्या ज्ञात करनी होगी।

इन विन्यासों की संख्या $= \dfrac{10!}{2! \times 2!}$

$$= \frac{3628800}{2 \times 2} = 907200$$

अत: E से प्रारम्भ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व 907200 शब्द हैं। **उत्तर**

प्रश्न 5. 0, 1, 3, 5, 7 तथा 9 अंकों से, 10 से विभाज्य तथा बिना पुनरावृत्ति किए कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

हल : दिए गए अंकों (0, 1, 3, 5, 7, 9) की संख्या = 6

10 से विभाज्य प्रत्येक संख्या में इकाई का अंक शून्य होगा।

इस प्रकार, इकाई का स्थान भरने की विधियों की संख्या = 1

अब शेष 5 अंकों द्वारा शेष 5 स्थान भरने की विधियों की संख्या = $^5P_5 = 5!$

अत: दिए गए अंकों से बनाई जा सकने वाली 10 से विभाज्य 6 अंकीय संख्याओं की कुल संख्या = $1 \times 5! = 120$ **उत्तर**

प्रश्न 6. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला से 2 भिन्न स्वरों और 2 भिन्न व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

हल : अंग्रेजी वर्णमाला में स्वरों (Vowels) की संख्या = 5

5 स्वरों में से 2 स्वर चुनने की विधियों की संख्या = $^5C_2$

अब अंग्रेजी वर्णमाला में व्यंजनों (Consonants) की संख्या = 21

21 व्यंजनों में से 2 व्यंजन चुनने की विधियों की संख्या = $^{21}C_2$

अब इन चार अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या = 4!

∴ अभीष्ट शब्दों की कुल संख्या

$$= {}^5C_2 \times {}^{21}C_2 \times 4!$$

$$= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{21 \times 20}{2 \times 1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 50400$$

अत: वर्णमाला के 2 स्वरों और 2 व्यंजनों से बने कुल शब्दों की संख्या = 50400 **उत्तर**

प्रश्न 7. किसी परीक्षा के एक प्रश्न पत्र में 12 प्रश्न हैं जो क्रमश: 5 तथा 7 प्रश्नों वाले दो खण्डों में विभक्त हैं अर्थात् खण्ड I और खण्ड II. एक विद्यार्थी को प्रत्येक खण्ड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन करते हुए कुल 8 प्रश्नों को हल करना है। एक विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

हल : एक विद्यार्थी को कुल 8 प्रश्नों का चयन इस प्रकार करना है कि प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम 3 प्रश्न चुने जाएँ, जबकि प्रथम खण्ड में 5 प्रश्न तथा द्वितीय खण्ड में प्रश्नों की संख्या 7 है।

यह चयन निम्नानुसार हो सकता है :

चयन	प्रथम खण्ड	द्वितीय खण्ड
(i)	3	5
(ii)	4	4
(iii)	5	3

अब, यदि विद्यार्थी (i) चयन करता है तो 8 प्रश्नों को चुनने का प्रकार = $^5C_3 \times {}^7C_5$

यदि विद्यार्थी (ii) चयन करता है तो 8 प्रश्नों को चुनने का प्रकार = $^5C_4 \times {}^7C_4$

तथा यदि विद्यार्थी (iii) चयन करता है तो 8 प्रश्नों को चुनने का प्रकार = $^5C_5 \times {}^7C_3$

इस प्रकार 8 प्रश्नों के चयन के कुल प्रकार

$$= ({}^5C_3 \times {}^7C_5) + ({}^5C_4 \times {}^7C_4) + ({}^5C_5 \times {}^7C_3)$$
$$= (10 \times 21) + (5 \times 35) + (1 \times 35)$$
$$= 210 + 175 + 35 = 420$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों के संचय की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि 5 पत्तों के प्रत्येक चयन (संचय) में तथ्यतः एक बादशाह है।

हल : ताश के 52 पत्तों की गड्डी में बादशाहों की संख्या = 4

∵ 5 पत्तों के संचय में एक बादशाह होना अनिवार्य है जिसे गड्डी में उपस्थित 4 बादशाहों में से चुनना है,

तब, चार बादशाहों में से एक बादशाह के चयन के प्रकार = ${}^4C_1$

अब संचय के शेष 4 पत्तों को बची हुई (52 − 4) = 48 पत्तों की गड्डी में से चुनना है। 48 पत्तों में से चार पत्तों के चयन के प्रकार = ${}^{48}C_4$

तब, गणना के आधारभूत सिद्धान्त से एक बादशाह सहित 5 पत्तों वाले संचयों की संख्या

$$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4$$
$$= \frac{4}{1} \times \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 778320$$

अतः 5 पत्तों के कुल संचय = 778320 **उत्तर**

प्रश्न 9. 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाता है कि महिलाएँ सम स्थानों पर बैठती हैं। इस प्रकार के कितने विन्यास सम्भव हैं?

हल : 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में 9 स्थानों पर बैठाया जा सकता है। इनमें I, III, V, VII व IX पाँच विषम स्थान हैं और II, IV, VI, VIII चार सम स्थान हैं।

∵ 4 सम स्थानों पर 4 महिलाओं को बैठाने के कुल विन्यास = 4 ! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24

इसी प्रकार, शेष 5 विषम स्थानों पर 5 पुरुषों को बैठाने के कुल विन्यास = 5 ! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

तब दोनों को साथ-साथ एक पंक्ति में बैठाने पर विन्यासों की संख्या = 120 × 24 = 2880

अतः बैठाने के कुल 2880 विन्यास सम्भव हैं। **उत्तर**

प्रश्न 10. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा से 10 का चयन एक भ्रमण दल के लिए किया जाता है। 3 विद्यार्थी ऐसे हैं जिन्होंने यह निर्णय लिया है कि या तो वह तीनों दल में सम्मिलित होंगे या उनमें से कोई भी दल में सम्मिलित नहीं होगा। भ्रमण दल का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है?

हल : कुल विद्यार्थियों की संख्या = 25

भ्रमण-दल में चयनित किए जाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 10

यदि तीन विशेष विद्यार्थियों को भ्रमण दल में सम्मिलित करना है तो शेष (25 − 3) = 22 विद्यार्थियों में (10 − 3) = 7 को और चुनना होगा जिनके चयन की विधियाँ = ${}^{22}C_7$

$$= \frac{22!}{7!\ (22-7)!} = \frac{22!}{7!\,15!}$$
$$= \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 15!}$$
$$= 170544$$

यदि तीन विशेष विद्यार्थियों को भ्रमण दल में सम्मिलित नहीं करना है तो हमें उन तीन को छोड़कर शेष (25 − 3) = 22 विद्यार्थियों में से 10 का चयन करना होगा, तब

चयन की विधियाँ = ${}^{22}C_{10}$

$$= \frac{22!}{10!\ (22-10)!}$$
$$= \frac{22!}{10!\,12!}$$
$$= \frac{(22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!)}{(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 12!)}$$
$$= 646646$$

∴ चयन की कुल विधियाँ = ${}^{22}C_7 + {}^{22}C_{10}$

$$= 170544 + 646646$$
$$= 817190$$

अतः भ्रमण दल का चयन 817190 प्रकार से किया जा सकता है। **उत्तर**

प्रश्न 11. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों से ऐसे कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं जिनमें सभी S एक-साथ आते हैं?

हल : शब्द ASSASSINATION में

अक्षरों की कुल संख्या = 13

जिसमें 3A, 4S, 2I और 2N हैं तथा शेष अक्षर भिन्न हैं।

∵ चारों S एक साथ रहने हैं, तब इसे एक ही अक्षर माना जा सकता है और इस प्रकार शेष 9 अक्षरों को सम्मिलित करते हुए कुल 10 अक्षरों द्वारा क्रमचय बनाने हैं जिसमें 3A, 2I व 2N हैं।

तब, क्रमचयों की संख्या $= \frac{10!}{2! \times 2! \times 3!}$

$$= \frac{(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!)}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3!}$$
$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$
$$= 151200$$

अतः अभीष्ट विन्यासों की संख्या = 151200 **उत्तर**

❒