08 अनुक्रम तथा श्रेणी
(Sequences and Series)

NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

प्रश्नावली 8.1

- **प्रश्न 1 से 6 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है :**

प्रश्न 1. $a_n = n(n+2)$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$$a_n = n(n+2)$$

nवें पद के सूत्र में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

दिए गए अनुक्रम का प्रथम पद

$a_1 = 1(1+2) = 1\times3 = 3;$

दूसरा पद $a_2 = 2(2+2) = 2\times4 = 8;$

तीसरा पद $a_3 = 3(3+2) = 3\times5 = 15;$

चौथा पद $a_4 = 4(4+2) = 4\times6 = 24;$

तथा पाँचवाँ पद $a_5 = 5(5+2) = 5\times7 = 35;$

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = 3,\ a_2 = 8,\ a_3 = 15,$

$a_4 = 24, a_5 = 35$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

nवें पद के सूत्र में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

दिए गए अनुक्रम का प्रथम पद

$a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

दूसरा पद $a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

तीसरा पद $a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

चौथा पद $a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

तथा पाँचवाँ पद $a_5 = \dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6}$

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{2}{3}, a_3 = \dfrac{3}{4},$

$a_4 = \dfrac{4}{5}, a_5 = \dfrac{5}{6}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. $a_n = 2^n$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$$a_n = 2^n$$

दिए गए अनुक्रम का

प्रथम पद $a_1 = 2^1 = 2;$

दूसरा पद $a_2 = 2^2 = 4;$

तीसरा पद $a_3 = 2^3 = 8;$

चौथा पद $a_4 = 2^4 = 16;$

तथा पाँचवाँ पद $a_5 = 2^5 = 32;$

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,$

$a_4 = 16,\ a_5 = 32$ **उत्तर**

प्रश्न 4. $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$$a_n = \frac{2n-3}{6}$$

दिए गए अनुक्रम का

प्रथम पद $a_1 = \dfrac{2.1-3}{6} = \dfrac{2-3}{6} = -\dfrac{1}{6};$

दूसरा पद $a_2 = \dfrac{2.2-3}{6} = \dfrac{4-3}{6} = \dfrac{1}{6};$

तीसरा पद $a_3 = \dfrac{2.3-3}{6} = \dfrac{6-3}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2};$

चौथा पद $a_4 = \dfrac{2.4-3}{6} = \dfrac{8-3}{6} = \dfrac{5}{6};$

तथा पाँचवाँ पद $a_5 = \dfrac{2.5-3}{6} = \dfrac{10-3}{6} = \dfrac{7}{6};$

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = -\dfrac{1}{6},\ a_2 = \dfrac{1}{6};$

$a_3 = \dfrac{1}{2};\ a_4 = \dfrac{5}{6};\ a_5 = \dfrac{7}{6}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. $a_n = (-1)^{n-1}\ 5^{n+1}$

हल : दिया है, $a_n = (-1)^{(n-1)}.5^{(n+1)}$

उक्त दोनों पक्षों में क्रमश: $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

पहला पद : $a_1 = (-1)^{(1-1)}.5^{(1+1)} = (-1)^0.5^2$

$= 1 \times 25 = 25$

दूसरा पद : $a_2 = (-1)^{(2-1)} . 5^{(2+1)} = (-1)^1 . 5^3$

$= -1 \times 125 = -125$

तीसरा पद : $a_3 = (-1)^{(3-1)} . 5^{(3+1)} = (-1)^2 . 5^4$

$= 1 \times 625 = 625$

चौथा पद : $a_4 = (-1)^{(4-1)} . 5^{(4+1)} = (-1)^3 . 5^5$

$= -1 \times 3125 = -3125$

तथा पाँचवाँ पद : $a_5 = (-1)^{(5-1)} . 5^{(5+1)} = (-1)^4 . 5^6$

$= 1 \times 15625 = 15625$

अत: दिए हुए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद 25, – 125, 625, – 3125, 15625 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. $\mathbf{a_n = n \cdot \frac{n^2+5}{4}}$

हल : दिया है, $a_n = n\left[\frac{n^2+5}{4}\right]$

उक्त दोनों पक्षों में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

पहला पद : $a_1 = 1 \times \frac{1^2+5}{4} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

दूसरा पद : $a_2 = 2 \times \frac{2^2+5}{4} = 2 \times \frac{4+5}{4} = \frac{9}{2}$

तीसरा पद : $a_3 = 3 \times \frac{3^2+5}{4} = 3 \times \frac{9+5}{4}$

$= 3 \times \frac{14}{4} = 3 \times \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$

चौथा पद : $a_4 = 4 \times \frac{4^2+5}{4} = 16 + 5 = 21$

तथा पाँचवाँ पद : $a_5 = 5 \times \frac{5^2+5}{4} = 5 \times \frac{25+5}{4}$

$= 5 \times \frac{30}{4} = 5 \times \frac{15}{2} = \frac{75}{2}$ **उत्तर**

- **निम्नलिखित प्रश्न 7 से 10 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका n वाँ पद दिया गया है :**

प्रश्न 7. $\mathbf{a_n = 4n - 3;\ a_{17},\ a_{24}}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$a_n = 4n - 3$

∴ $n = 17$ रखने पर,

$a_{17} = 4 \times 17 - 3 = 68 - 3 = 65$

$n = 24$ रखने पर,

$a_{24} = 4 \times 24 - 3 = 96 - 3 = 93$

अत: $a_{17} = 65$ तथा $a_{24} = 93$ **उत्तर**

प्रश्न 8. $\mathbf{a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

∴ $n = 7$ रखने पर, $a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}$

अत: $a_7 = \frac{49}{128}$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $\mathbf{a_n = (-1)^{n-1} . n^3\ ;\ a_9}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$a_n = (-1)^{n-1} . n^3$

∴ $n = 9$ रखने पर,

$a_9 = (-1)^{9-1} . (9)^3$

$= (-1)^8 . (729) = 729$

अत: $a_9 = 729$ **उत्तर**

प्रश्न 10. $\mathbf{a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}\ ;\ a_{20}}$

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$

∴ $n = 20$ रखने पर,

$a_{20} = \frac{20(20-2)}{(20+3)} = \frac{20 \times 18}{23} = \frac{360}{23}$;

अत: $a_{20} = \frac{360}{23}$ **उत्तर**

- **प्रश्न 11 से 13 तक प्रत्येक अनुक्रम के पाँच पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 11. $\mathbf{a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2}$ **सभी** $\mathbf{n > 1}$ **के लिए।**

हल : ∵ दिए गए अनुक्रम का पहला पद $a_1 = 3$;

और दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$a_n = 3a_{n-1} + 2$ जबकि $n > 1$

∴ $n = 2$ रखने पर, दूसरा पद

$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$;

$n = 3$ रखने पर, तीसरा पद

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 11 + 2 = 35$;

$n = 4$ रखने पर, चौथा पद

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2$

$= 105 + 2 = 107$;

$n = 5$ रखने पर, पाँचवाँ पद

$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 107 + 2$

$= 321 + 2 = 323$;

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = 3$; $a_2 = 11$; $a_3 = 35$;

$a_4 = 107$; $a_5 = 323$

तथा संगत श्रेणी : $3+11+35+107+323+.....$ **उत्तर**

प्रश्न 12. $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$

हल : $\because$ दिए गए अनुक्रम का पहला पद

$$a_1 = -1;$$

और दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$$

$\therefore$ $n = 2$ रखने पर, दूसरा पद

$$a_2 = \frac{a_{2-1}}{2} = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$n = 3$ रखने पर, तीसरा पद

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{3} = \frac{a_2}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6};$$

$n = 4$ रखने पर, चौथा पद

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{4} = \frac{a_3}{4} = \frac{\frac{-1}{6}}{4} = -\frac{1}{24};$$

$n = 5$ रखने पर, पाँचवाँ पद

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{5} = \frac{a_4}{5} = \frac{\frac{-1}{24}}{5} = -\frac{1}{120};$$

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = -1$; $a_2 = -\frac{1}{2}$; $a_3 = -\frac{1}{6}$;

$a_4 = -\frac{1}{24}$; $a_5 = -\frac{1}{120}$

तथा संगत श्रेणी : $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{24}-\frac{1}{120}-......$ **उत्तर**

प्रश्न 13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1$ जहाँ $n > 2$

हल : $\because$ दिए गए अनुक्रम का पहला पद

$$a_1 = 2$$

और दिए गए अनुक्रम का दूसरा पद $a_2 = 2$;

तथा दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = a_{n-1} - 1$

$\therefore$ $n = 3$ रखने पर, तीसरा पद

$a_3 = a_{3-1} - 1 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$;

$n = 4$ रखने पर, चौथा पद

$a_4 = a_{4-1} - 1 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$;

$n = 5$ रखने पर, पाँचवाँ पद

$a_5 = a_{5-1} - 1 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$;

अत: दिए गए अनुक्रम के प्रथम पाँच पद :

$a_1 = 2$; $a_2 = 2$; $a_3 = 1$;

$a_4 = 0$; $a_5 = -1$

तथा संगत श्रेणी : $2+2+1+0+(-1)+.....$ **उत्तर**

प्रश्न 14. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है : $1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n > 2$ तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$

हल : दिया है, $a_1 = a_2 = 1$

तथा $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ जहाँ $n > 2$

सम्बन्ध $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ के दोनों पक्षों में क्रमश: $n = 3, 4, 5, 6$ रखने पर,

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$

$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5,$

$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8,$

यदि $n = 1$ है तो $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

यदि $n = 2$ है तो $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$

यदि $n = 3$ है तो $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$

यदि $n = 4$ है तो $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$

और यदि $n = 5$ है तो $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$ **उत्तर**

प्रश्नावली | 8.2

प्रश्न 1. गुणोत्तर श्रेढी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, ...$ का 20 वाँ पद तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई गुणोत्तर श्रेढी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, ...$

यहाँ दी गई गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद, $T_1 = a = \frac{5}{2}$

तथा दूसरा पद, $T_2 = \frac{5}{4}$

$\therefore$ श्रेढी का सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{5/4}{5/2} = \frac{1}{2}$

इस प्रकार, अनुक्रम के लिए पहला पद $a = \frac{5}{2}$;

सार्वअनुपात $r = \frac{1}{2}$

तब अनुक्रम का 20 वाँ पद $= ar^{19}$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2.2^{19}}$$

$$= \frac{5}{2^{20}}$$

तथा अनुक्रम का n वाँ पद $= ar^{n-1}$

$$= \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{5 \times 1}{2 \times 2^{n-1}} = \frac{5}{2^n}$$

अत: दी गई गुणोत्तर श्रेढी का 20वाँ पद

$$= \frac{5}{2^{20}} \text{ तथा } n\text{वाँ पद} = \frac{5}{2^n}$$

उत्तर

प्रश्न 2. उस गुणोत्तर श्रेढी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्वअनुपात 2 है।

हल : माना श्रेढी का पहला पद a है।

$\because$ दिया है कि सार्वअनुपात $r = 2$ है और गुणोत्तर श्रेढी का n वाँ पद $= ar^{n-1}$ होता है।

$\therefore$ $n = 8$ रखने पर,

8वाँ पद $= ar^{8-1} = ar^7 = a \times (2)^7 = 128\,a$

परन्तु दिया है आठवाँ पद = 192

तब, $128\,a = 192$

$\Rightarrow$ $a = \frac{192}{128} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ श्रेढी का 12वाँ पद $= ar^{12-1}$

$$= \frac{3}{2} \times (2)^{11}$$

$$\left(\because r = 2 \text{ और } a = \frac{3}{2}\right)$$

$$= 3 \times 2^{10}$$

$$= 3 \times 1024 \quad (\because 2^{10} = 1024)$$

$$= 3072$$

अत: श्रेढी का 12 वाँ पद = 3072 उत्तर

प्रश्न 3. किसी गुणोत्तर श्रेढी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11 वाँ पद क्रमशः p, q तथा s है तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.

हल : माना दी गई गुणोत्तर श्रेढी का पहला पद a और सार्वअनुपात r है।

$\because$ गुणोत्तर श्रेढी का व्यापक पद (General Term) $= ar^{n-1}$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेढी का 5वाँ पद $= ar^{5-1} = ar^4$

गुणोत्तर श्रेढी का 8वाँ पद $= ar^{8-1} = ar^7$

तथा गुणोत्तर श्रेढी का 11वाँ पद $= ar^{11-1} = ar^{10}$

$\because$ प्रश्नानुसार उक्त गुणोत्तर श्रेढी के 5 वें, 8 वें व 11 वें पद क्रमशः p, q तथा s हैं।

$\therefore$ $ar^4 = p$ ...(1)

$ar^7 = q$ ...(2)

तथा $ar^{10} = s$ ...(3)

समीकरण (1) व समीकरण (3) की गुणा करने पर,

$$ar^4 \times ar^{10} = ps$$

$\Rightarrow$ $a^2r^{14} = ps$

$\Rightarrow$ $(ar^7)^2 = ps$

समीकरण (2) से $ar^7 = q$ रखने पर,

$q^2 = ps$ **Proved.**

प्रश्न 4. किसी गुणोत्तर श्रेढी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद – 3 है तो 7 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का सार्वअनुपात r है।

$\because$ पहला पद $a = -3$

$\therefore$ श्रेढी का चौथा पद $= a.r^{4-1} = -3.r^3$

$\therefore$ दूसरा पद $= ar = -3r$

$\because$ दिया गया है कि

चौथा पद = दूसरे पद का वर्ग

$\therefore$ $-3r^3 = (-3r)^2$

$\therefore$ $-3r^3 = 9r^2$

$\Rightarrow$ $r = \frac{9r^2}{-3r^2} = -3$

$\therefore$ इस गुणोत्तर श्रेढी का 7वाँ पद

$$= ar^{7-1} = (-3)(-3)^6$$

$$= -2187$$

उत्तर

प्रश्न 5. अनुक्रम का कौन-सा पद :

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\ldots 128$ है?

(b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots\ldots 729$ है?

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\ldots \frac{1}{19683}$ है?

हल : (a) दिया गया अनुक्रम : $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

पहला पद $T_1 = a = 2$

और दूसरा पद $T_2 = 2\sqrt{2}$

तब सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

माना n वाँ पद 128 है।

तब $ar^{n-1} = 128$

$\Rightarrow$ $2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$\Rightarrow$ $(2)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{128}{2} = 64$

$\therefore$ $(2)^{\frac{n-1}{2}} = (2)^6$

$\Rightarrow$ $\frac{n-1}{2} = 6 \Rightarrow n - 1 = 12$

$\Rightarrow$ $n = 13$

अत: अनुक्रम का 13 वाँ पद 128 है। उत्तर

● **(b) दिया गया अनुक्रम : $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots\ldots$**

पहला पद $T_1 = a = \sqrt{3}$

और दूसरा पद $T_2 = 3$;

तब सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

माना दिए गए अनुक्रम का n वाँ पद 729 है।

तब $ar^{n-1} = 729$

$\therefore \quad \sqrt{3}.(\sqrt{3})^{n-1} = 729$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{3})^n = 729$

$\Rightarrow \quad (3)^{\frac{n}{2}} = 729$

$\Rightarrow \quad (3)^{\frac{n}{2}} = 3^6$

$\Rightarrow \quad \frac{n}{2} = 6$ या $n = 12$

अत: अनुक्रम का 12 वाँ पद 729 होगा। **उत्तर**

- **(c) दिया गया अनुक्रम, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots.$**

पहला पद $T_1 = a = \frac{1}{3}$

और दूसरा पद $T_2 = \frac{1}{9}$

$\therefore$ सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$

माना दिए गए अनुक्रम में n वाँ पद $\frac{1}{19683}$ है।

$\therefore \quad ar^{n-1} = \frac{1}{19683}$

$\therefore \quad \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{19683}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^9$

$\Rightarrow \quad n = 9$

अत: अनुक्रम का 9 वाँ पद $\frac{1}{19683}$ है। **उत्तर**

प्रश्न 6. x के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं?

हल : यदि $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं तो

(मध्य-पद)^2= प्रथम पद × तृतीय पद

$\therefore \quad (x)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right)\times\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\therefore \quad x^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x = \pm 1$ **उत्तर**

- **निर्देश : प्रश्न 7 से 10 तक प्रत्येक गुणोत्तर श्रेढी का योगफल निर्दिष्ट पदों तक ज्ञात कीजिए :**

प्रश्न 7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 पदों तक।

हल : दी गई गुणोत्तर श्रेढी : 0.15, 0.015, 0.0015, ...

पहला पद $T_1 = a = 0.15$

दूसरा पद $T_2 = 0.015$

$\therefore$ सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{0.015}{0.15} = 0.1$

$\because$ गुणोत्तर श्रेढी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ क्योंकि } r < 1$$

$n = 20$ रखने पर,

$$S_{20} = \frac{0.15\,[1-(0.1)^{20}]}{1-0.1}$$

$(r = 0.1, a = 0.15)$

$$\therefore \quad S_{20} = \frac{0.15\,[1-(0.1)^{20}]}{0.9}$$

$$= \frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$$

अत: 20 पदों का योगफल

$$= \frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}$, ... n पदों तक।

हल : दी गई गुणोत्तर श्रेढी का

पहला पद $T_1 = a = \sqrt{7}$

तथा दूसरा पद $T_2 = \sqrt{21}$

$\therefore$ सार्वअनुपात $(r) = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3}$

$\because$ गुणोत्तर श्रेढी में n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,[(\sqrt{3})^n - 1]}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,(\sqrt{3}+1)[(\sqrt{3})^n - 1]}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,(\sqrt{3}+1)}{2}.[(3)^{n/2} - 1]$$

अत: n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3}+1)}{2}.\left[(3)^{\frac{n}{2}} - 1\right]$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. $1, -a, a^2, -a^3$ ..... n पदों तक यदि $(a \neq -1)$।

हल : दी गई गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद

$T_1 = A = 1$

तथा दूसरा पद $T_2 = -a$

$\therefore$ सार्वअनुपात $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{-a}{1} = -a$

तब, गुणोत्तर श्रेढी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{A(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{1\,[1-(-a)^n]}{[1-(-a)]}$$

$$= \frac{[1-(-1)^n \cdot a^n]}{(1+a)}$$

अत: दी गई गुणोत्तर श्रेढी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{1-(-1)^n\ a^n}{1+a}$$ उत्तर

प्रश्न 10. $x^3, x^5, x^7, \ldots.$ n पदों तक (यदि $x \neq \pm 1$)।

हल : दी गई गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद

$$T_1 = a = x^3$$

तथा दूसरा पद $T_2 = x^5$

$\therefore$ श्रेढी का सार्वअनुपात $r = \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{x^5}{x^3} = x^2$

तब, गुणोत्तर श्रेढी के n पदों का योगफल

$$S_n = \frac{a\,[1-r^n]}{[1-r]}$$

$$= \frac{x^3\ [1-(x^2)^n]}{1-x^2} = \frac{x^3\ [1-x^{2n}]}{1-x^2}$$

अत: श्रेढी के n पदों का योगफल $= \dfrac{x^3(1-x^{2n})}{1-x^2}$ उत्तर

प्रश्न 11. मान ज्ञात कीजिए $\sum\limits_{k=1}^{11} (2+3^k)$

हल : यहाँ $\sum\limits_{k=1}^{11} (2+3^k) = (2+3)+(2+3^2)$

$$+(2+3^3)+(2+3^4)+\ldots.+(2+3^{11})$$

$= (2+2+2+\ldots..11 \text{ पद})$

$$+(3+3^2+3^3+\ldots.+3^{11})$$

$= 2\times 11+(3+3^2+3^3+\ldots+3^{11})$

$= 22+\dfrac{3(3^{11}-1)}{3-1}$ $\left(\text{सूत्र } S_{11} = \dfrac{a(r^{11}-1)}{(r-1)} \text{ से}\right)$

$= 22+\dfrac{3(177147-1)}{2}$ $(\because 3^{11} = 177147)$

$= 22+3\times\dfrac{177146}{2}$

$= 22+265719 = 265741$

अत: $\sum\limits_{k=1}^{11} (2+3^k) = 265741$ उत्तर

प्रश्न 12. एक गुणोत्तर श्रेढी के तीन पदों का योगफल $\dfrac{39}{10}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है। सार्वअनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी के तीन पद $\dfrac{a}{r}, a$ तथा ar हैं।

तब पदों का गुणनफल $= \dfrac{a}{r}\times a\times ar = 1$

($\because$ दिया है, गुणनफल $= 1$)

$\therefore \quad a^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$\because$ पदों का योगफल $\dfrac{39}{10}$ है।

$$\therefore \quad \frac{a}{r}+a+ar = \frac{39}{10}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r}+1+r = \frac{39}{10} \qquad [\because a = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{39}{10}$$

$$\Rightarrow \quad 10+10r+10r^2 = 39r$$

$$\Rightarrow \quad 10r^2-29r+10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10r^2-25r-4r+10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5r(2r-5)-2(2r-5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (5r-2)(2r-5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{2}{5} \text{ या } \frac{5}{2}$$

यदि $r = \dfrac{2}{5}$ तो पद

$\dfrac{1}{2/5}, 1, 1.\left(\dfrac{2}{5}\right)$ अर्थात $\dfrac{5}{2}, 1, \dfrac{2}{5}$ हैं और

यदि $r = \dfrac{5}{2}$ तो पद

$\dfrac{1}{5/2}, 1, 1.\left(\dfrac{5}{2}\right) \equiv \dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{5}{2}$

अत: सार्वअनुपात $= \dfrac{2}{5}$ या $\dfrac{5}{2}$ और गुणोत्तर श्रेढी के तीन पद $\dfrac{5}{2}, 1, \dfrac{2}{5}$ अथवा $\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{5}{2}$. उत्तर

प्रश्न 13. गुणोत्तर श्रेढी $3, 3^2, 3^3, \ldots..$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल 120 हो जाए?

हल : माना दी गई गुणोत्तर श्रेढी के n पदों का योगफल 120 है।

$\because$ पहला पद $a = 3$, सार्वअनुपात $(r) = \dfrac{3^2}{3} = 3$

तब n पदों का योगफल $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$\therefore \quad 120 = \frac{3(3^n-1)}{3-1}$$

$\Rightarrow \quad 120 = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

$\Rightarrow \quad 3^n - 1 = \frac{120 \times 2}{3} = 80$

$\Rightarrow \quad 3^n = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^n = 3^4$

$\Rightarrow \quad n = 4$

अत: पदों की संख्या = 4 **उत्तर**

प्रश्न 14. किसी गुणोत्तर श्रेढी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले तीन पदों का योगफल 128 है तो गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद, सार्वअनुपात तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a और सार्वअनुपात r है।

तब श्रेढी के प्रथम तीन पद = a, ar व ar^2

और अगले तीन पद = ar^3, ar^4 व ar^5

$\because$ प्रथन तीन पदों का योग 16 है।

$\therefore \quad a + ar + ar^2 = 16$

$\Rightarrow \quad a(1 + r + r^2) = 16 \quad ...(1)$

और अगले तीन पदों का योग 128 है।

$\therefore \quad ar^3 + ar^4 + ar^5 = 128$

$\Rightarrow \quad ar^3(1 + r + r^2) = 128 \quad ...(2)$

समीकरण (2) को समीकरण (1) से भाग देने पर,

$$\frac{ar^3(1 + r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{128}{16}$$

$\Rightarrow \quad r^3 = 8 = (2)^3$

$\Rightarrow \quad r = 2$

r का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a(1 + 2 + 2^2) = 16$

$\Rightarrow \quad a = \frac{16}{7}$

तब, श्रेढी के n पदों का योग

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{16}{7}(2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{16}{7}(2^n - 1)$$

अत: पहला पद $a = \frac{16}{7}$, सार्वअनुपात $r = 2$ तथा n पदों का योग = $\frac{16}{7}(2^n - 1)$ **उत्तर**

प्रश्न 15. एक गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a = 729 तथा 7 वाँ पद 64 है तो S_7 ज्ञात कीजिए।

हल : गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद $a = 729$ तथा सातवाँ पद $T_7 = 64$

यदि श्रेढी का सार्वअन्तर r है, तो

सातवाँ पद $T_7 = ar^6$

$\Rightarrow \quad ar^6 = 64 \quad (\because T_7 = 64$, दिया है)

$\Rightarrow \quad r^6 = \frac{64}{a} \quad \Rightarrow \quad r^6 = \frac{64}{729}$

$\Rightarrow \quad r^6 = \frac{2^6}{3^6} \quad \Rightarrow \quad r^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

$\Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}$

तब इस गुणोत्तर श्रेढी के 7 पदों का योग

$$S_7 = \frac{a[1 - r^7]}{1 - r} = \frac{729\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{729\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 2187\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right]$$

$$= 2187\left[1 - \frac{128}{2187}\right] = 2187 \times \frac{2059}{2187}$$

$= 2059$; अत: $S_7 = 2059$ **उत्तर**

प्रश्न 16. एक गुणोत्तर श्रेढी को ज्ञात कीजिए, जिसके प्रथम दो पदों का योगफल – 4 है तथा 5 वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

$\therefore$ दूसरा पद = ar

$\because$ प्रथम दो पदों का योग = – 4

$\therefore \quad a + ar = -4$

$\Rightarrow \quad a(1 + r) = -4 \quad ...(1)$

अब पाँचवाँ पद $a_5 = ar^{5-1} = ar^4$

और तीसरा पद $a_3 = ar^{3-1} = ar^2$

$\because$ पाँचवाँ पद = तृतीय पद × 4

$\therefore \quad ar^4 = ar^2 \times 4$

$\therefore \quad \frac{ar^4}{ar^2} = 4$

$\Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2$

अब समीकरण (1) में r का मान रखने पर,

यदि $r = 2$ तो $a(1 + 2) = -4$

$\Rightarrow \quad 3a = -4$ या $a = -\frac{4}{3}$

तब, पहला पद = $-\frac{4}{3}$

दूसरा पद = $ar = -\frac{4}{3} \times 2 = -\frac{8}{3}$

और तीसरा पद = $ar^2 = -\frac{4}{3} \times 4 = -\frac{16}{3}$

अतः श्रेढी : $-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{-16}{3}, ...$

और यदि $r = -2$ तो $a\,[1 + (-2)] = -4$

$\Rightarrow \quad -a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

$\therefore$ पहला पद $a = 4$

दूसरा पद $ar = 4 \times (-2) = -8$

और तीसरा पद $ar^2 = 4 \times (-2)^2 = 16$

अतः श्रेढी : $4, -8, 16, ...$

अतः अभीष्ट गुणोत्तर श्रेढी : $-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{-16}{3}, ...$

अथवा $4, -8, 16, -32, 64, ...$ **उत्तर**

प्रश्न 17. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का 4वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमशः x, y तथा z है तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

हल : माना दी गई गुणोत्तर श्रेढी का पहला पद a तथा सार्वअनुपात r है।

तब उक्त श्रेढी का 4 वाँ पद $T_4 = ar^3$

10 वाँ पद $T_{10} = ar^9$

तथा 16 वाँ पद $T_{16} = ar^{15}$

$\because$ प्रश्न के अनुसार 4 वाँ पद, 10 वाँ पद व 16 वाँ पद क्रमशः x, y, व z हैं।

$\therefore \quad ar^3 = x \quad ...(1)$

$ar^9 = y \quad ...(2)$

तथा $ar^{15} = z \quad ...(3)$

समीकरण (1) व समीकरण (3) से,

$xz = ar^3 \times ar^{15} = a^2r^{18} = (ar^9)^2$

तब समीकरण (2) से,

$xz = y^2$

$\because \quad xz = y^2 \quad \Rightarrow \quad x, y, z$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

Proved.

प्रश्न 18. अनुक्रम 8, 88, 888, 8888, ... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए अनुक्रम के n पदों का योग

$S_n = 8 + 88 + 888 + 8888 + ... n$ पदों तक

$= 8[1 + 11 + 111 + 1111 + ... + n$ पदों तक]

$= \frac{8}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + ... n$ पदों तक]

$= \frac{8}{9}[(10 - 1) + (100 - 1)$

$+ (1000 - 1) + (10000 - 1) + ... + n$ पदों तक]

$= \frac{8}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n)$

$- (1 + 1 + 1 + ... + n$ पदों तक]

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{(10 - 1)} - n\right]$$

$$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n$$

अतः अनुक्रम 8, 88, 888, 8888, ... के n पदों का योगफल $= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n$ **उत्तर**

प्रश्न 19. अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2, 1/2 के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

पद :	पहला	दूसरा	तीसरा	चौथा	पाँचवाँ
अनुक्रम 1 :	2	4	8	16	32
अनुक्रम 2 :	128	32	8	2	$\frac{1}{2}$

$\therefore$ दोनों अनुक्रमों के संगत पदों के गुणनफल से प्राप्त अनुक्रम

256 128 64 32 16

यहाँ पदों की संख्या $n = 5$,

पहला पद $a = 256$

और सार्वअनुपात $(r) = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ अनुक्रम के पदों का योगफल

$$S_5 = \frac{a\,[1 - (r)^5]}{(1 - r)} = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{256\left[1 - \frac{1}{32}\right]}{\frac{1}{2}} = 512 \times \frac{31}{32} = 496$$

अतः वांछित अनुक्रम के n पदों का योगफल = 496

उत्तर

प्रश्न 20. दिखाइए कि अनुक्रम a, ar, ar², ..., arⁿ⁻¹ तथा A, AR, AR², ..., ARⁿ⁻¹ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढी होती है तथा सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : पहला अनुक्रम :

$a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$

दूसरा अनुक्रम :

$A, AR, AR^2, ..., AR^{n-1}$

दोनों अनुक्रमों के गुणनफल से बना अनुक्रम :

$aA, aArR, aAr^2R^2, ... ,$

$aAr^{n-1}R^{n-1}$

अथवा $aA, aA\,(rR),$

$aA\,(rR)^2, ..., aA\,(R)^{n-1}$

अथवा $X, XY, XY^2, XY^3, .., XY^{n-1}$
(जहाँ $aA = X$ तथा $rR = Y$ है)

$\because$ प्रत्येक उतरोत्तर पद अपने पूर्व पद का Y गुना है; अत: स्पष्ट है कि प्राप्त **अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढी** (G.P.) है और उसका सार्वअनुपात Y है।

$\therefore$ प्राप्त अनुक्रम का सार्वअनुपात $Y = rR$ **उत्तर**

प्रश्न 21. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेढी में हों, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी में चार पद $a, a\,r, a\,r^2, a\,r^3$ हैं।

तब, **तीसरा पद = प्रथम पद + 9**

$\Rightarrow \quad a\,r^2 = a + 9$

तथा **दूसरा पद = चौथा पद + 18**

$\Rightarrow \quad a\,r = a\,r^3 + 18$

$\Rightarrow \quad a\,r^2 - a = 9$

तथा $\quad a\,r^3 - a\,r = -18$

$\Rightarrow \quad a(r^2 - 1) = 9$

तथा $\quad a\,r(r^2 - 1) = -18$

$$\Rightarrow \quad \frac{a\,r(r^2-1)}{a(r^2-1)} = \frac{-18}{9}$$

$\Rightarrow \quad r = -2$

समीकरण $a(r^2 - 1) = 9$ में $r = -2$ रखने पर,

$a(4 - 1) = 9$

$\Rightarrow \quad a \times 3 = 9$

$\Rightarrow \quad a = 3$

अत: अभीष्ट पद $3, -6, 12, -24$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 22. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का p वाँ, q वाँ तथा r वाँ पद क्रमश: a, b तथा c हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\mathbf{a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q} = 1}$$

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद $= A$

तथा सार्वअनुपात $= R$

तब, pवाँ पद $AR^{p-1} = a,$

qवाँ पद $AR^{q-1} = b$

तथा rवाँ पद $AR^{r-1} = c$

अब, **L.H.S.** $= a^{(q-r)}.b^{(r-p)}.c^{(p-q)}$

$= [AR^{p-1}]^{(q-r)}.[AR^{q-1}]^{(r-p)}.[AR^{r-1}]^{(p-q)}$

$= A^{(q-r)}R^{(p-1)(q-r)}.A^{(r-p)}R^{(q-1)(r-p)}.A^{(p-q)}R^{(r-1)(p-q)}$

$= A^{[q-r+r-p+p-q]}.R^{[(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)]}$

$= A^0 R^{[p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)-(q-r)-(r-p)-(p-q)]}$

$= R^0 = 1 =$ **R.H.S.**

प्रश्न 23. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम तथा n वाँ पद क्रमश: a तथा b हैं एवं P, n पदों का गुणनफल हो तो सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{P^2 = (ab)^n}$

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का सार्वअनुपात r है।

$\therefore$ **श्रेढी का n वाँ पद = b** $\Rightarrow \quad a\,r^{(n-1)} = b$

$$\Rightarrow \quad r^{(n-1)} = \frac{b}{a} \quad \text{...(1)}$$

तथा **श्रेढी के प्रथम n पदों का गुणनफल = P**

$\Rightarrow \quad a\,.\,a\,r\,.\,a\,r^2\,.\,a\,r^3 \;......\; a\,r^{(n-1)} = P$

$$\Rightarrow \quad P = a^n r^{[1+2+3+.....+(n-1)]} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\left[\because 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$= a^n [r^{(n-1)}]^{n/2} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/2} \quad \text{समीकरण (1) से}$$

$$\Rightarrow P^2 = a^{2n}\left\{\frac{b}{a}\right\}^n = a^{2n} \times \frac{b^n}{a^n}$$

$= a^n\,b^n = (a\,b)^n$ **Proved.**

प्रश्न 24. दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेढी के प्रथम n पदों के योगफल तथा (n + 1) वें पद से (2n) वें पद तक के पदों के योगफल का अनुपात $\mathbf{\frac{1}{r^n}}$ है।

हल : माना किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

तब, प्रथम n पदों का योगफल $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

और प्रथम $2n$ पदों का योगफल $S_{2n} = \dfrac{a(1-r^{2n})}{(1-r)}$

तब, $(n+1)$ वें पद से $2n$ वें पद तक का योगफल

$$= S_{2n} - S_n$$

$$= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}[(1-r^{2n}) - (1-r^n)]$$

$$= \frac{a}{1-r}[r^n - r^{2n}] = \frac{a\,r^n(1-r^n)}{1-r}$$

तब प्रथम n पदों का योगफल तथा $(n+1)$ वें पद से $(2n)$ वें पदों तक का योगफल का अनुपात

$$S_n : (S_{2n} - S_n)$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} : \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$$

$= 1 : r^n$ **Proved.**

प्रश्न 25. यदि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढी में हैं तो दिखाइए कि

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$$

हल : यदि a, b, c और d गुणोत्तर श्रेढी में हैं तो

सार्वअनुपात $r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$

$\therefore \quad b = ar \quad ...(1)$

$c = br \quad ...(2)$

तथा $d = cr \quad ...(3)$

तब समीकरण (1) व (2) से,

$c = ar^2 \quad ...(4)$

और समीकरण (3) व (4) से,

$d = ar^3 \quad ...(5)$

तब, **L.H.S.** $= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= (a^2+a^2r^2+a^2r^4)(a^2r^2+a^2r^4+a^2r^6)$

[समीकरण (1), (4) व (5) से]

$= a^2(1+r^2+r^4)a^2r^2(1+r^2+r^4)$

$= a^4r^2(1+r^2+r^4)^2$

और **R.H.S.** $= (ab+bc+cd)^2$

$= (a.ar+ar.ar^2+ar^2.ar^3)^2$

$= (a^2r+a^2r^3+a^2r^5)^2$

$= [a^2r(1+r^2+r^4)]^2$

$= (a^2r)^2(1+r^2+r^4)^2$

$= a^4r^2(1+r^2+r^4)^2$

स्पष्ट है कि L.H.S., RH.S. पक्ष के बराबर है,

अतः $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= (ab+bc+cd)^2$ **Proved.**

प्रश्न 26. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढी बन जाए।

हल : माना अभीष्ट संख्याएँ G_1 व G_2 हैं।

तब अनुक्रम $3, G_1, G_2, 81$ गुणोत्तर श्रेढी में होंगे।

तब श्रेढी का प्रथम पद $a = 3$

तथा चौथा पद $ar^3 = 81$

$\Rightarrow \quad 3r^3 = 81$

या $\quad r^3 = \frac{81}{3} = 27 = 3^3 \Rightarrow r = 3$

$\therefore \quad G_1 =$ श्रेढी का दूसरा पद $= ar = 3\times 3 = 9$

$G_2 =$ श्रेढी का तीसरा पद $= ar^2 = 3\times 3^2 = 27$

अतः संख्याएँ 9 व 27 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 27. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

हल : प्रश्नानुसार $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = a$ तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य।

$\Rightarrow \quad \left[\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right] = \sqrt{ab}$

$\Rightarrow \quad a^{n+1}+b^{n+1} = (a^n+b^n)\, a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad a^{n+1}+b^{n+1} = a^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

$\Rightarrow \quad a^{n+1} - a^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - b^{n+1}$

$\Rightarrow \quad a^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right] = b^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right]$

$\Rightarrow \quad a^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = b^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ जबकि $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0$

$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$

$\therefore \quad n+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$ **उत्तर**

प्रश्न 28. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

हल : माना दोनों संख्याएँ a तथा b हैं।

तब, a तथा b का गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

प्रश्नानुसार,

$\because$ दोनों संख्याओं का योगफल

$= 6\times$ संख्याओं का गुणोत्तर माध्य

$\therefore \quad a+b = 6.\sqrt{ab} \quad ...(1)$

$\because$ हमें ज्ञात है कि

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$\therefore \quad (a-b)^2 = (6\sqrt{ab})^2 - 4ab$

$\therefore \quad (a-b)^2 = 36ab - 4ab = 32ab$

$= (4\sqrt{2}.\sqrt{ab})^2$

$\therefore \quad a-b = 4\sqrt{2}.\sqrt{ab} \quad ...(2)$

समीकरण (1) व समीकरण (2) को जोड़ने पर,

$$2a = 6\sqrt{ab} + 4\sqrt{2}\,.\sqrt{ab}$$

$\therefore \quad a = (3 + 2\sqrt{2})\,\sqrt{ab}$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$2b = 6\sqrt{ab} - 4\sqrt{2}.\sqrt{ab}$$

$\therefore \quad 2b = 2\,(3 - 2\sqrt{2}).\sqrt{ab}$

$\therefore \quad b = (3 - 2\sqrt{2}).\sqrt{ab}$

तब $\quad a : b = (3 + 2\sqrt{2})\,.\sqrt{ab} : (3 - 2\sqrt{2}).\,\sqrt{ab}$

$$= (3 + 2\sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2})$$

अत: संख्याओं में अनुपात

$$= (3 + 2\sqrt{2}) : (3 - 2\sqrt{2})$$ **Proved.**

प्रश्न 29. किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घण्टे पश्चात् दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारम्भ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घण्टों बाद क्या होगी?

हल : $\because$ प्रारम्भ में बैक्टीरिया की संख्या $a = 30$

और चूँकि प्रत्येक घण्टे में बैक्टीरिया की संख्या दो गुनी हो जाती है; अत:

पहले घण्टे के बाद बैक्टीरिया की संख्या

$$= 30 \times 2 = 60$$

तथा दूसरे घण्टे के बाद (या तीसरा घण्टा प्रारम्भ होने के ठीक पहले) बैक्टीरिया की संख्या

$$= 60 \times 2 = 120$$

इसी प्रकार, चौथे घण्टे के बाद (या पाँचवाँ घण्टा प्रारम्भ होने के ठीक पहले) बैक्टीरिया की संख्या

$$= 240 \times 2 = 480$$

स्पष्ट है कि क्रमागत घण्टों में बैक्टीरिया की संख्या 30, 60, 120, 240, ... गुणोत्तर श्रेणी बनाती है जिसका प्रथम पद $a = 30$ तथा सार्वअनुपात $r = \frac{60}{30} = 2$

इसी प्रकार, n वें घण्टे के बाद या $(n+1)$ वाँ घण्टा प्रारम्भ होते समय बैक्टीरिया की संख्या

$$= ar^{(n+1)-1} = ar^n = 30 \times 2^n$$

अत: दूसरे घण्टे के बाद बैक्टीरिया की संख्या 120; चौथे घण्टे के बाद बैक्टीरिया की संख्या 480 तथा n वें घण्टे के बाद बैक्टीरिया की संख्या 30×2^n होगी। **उत्तर**

प्रश्न 30. ₹ 500 धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी? ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन $P =$ ₹ 500 तथा ब्याज की दर $R = 10$ वार्षिक

$\therefore$ एक वर्ष बाद मिश्रधन $= \left\{P + \frac{P \times R \times 1}{100}\right\}$

$$= P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}$$ **[Note]**

दो वर्ष बाद मिश्रधन

$$= \left[P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\} + P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\} \times \frac{R}{100}\right]$$

$$= P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}\left\{1 + \frac{R}{100}\right\} = P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$

तीन वर्ष बाद मिश्रधन

$$= \left[P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2 + P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2 \times \frac{R}{100}\right]$$

$$= P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2\left\{1 + \frac{R}{100}\right\} = P\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^3$$

....

स्पष्ट है कि विभिन्न वर्षों के बाद मिश्रधन एक गुणोत्तर श्रेढी बनाते हैं जिसका प्रथम पद P तथा सार्वअनुपात $\left\{1 + \frac{R}{100}\right\}$ है।

अत: 10 वर्ष बाद मिश्रधन = गुणोत्तर श्रेढी का ग्यारहवाँ पद **[Note]**

$$= P\left[1 + \frac{R}{100}\right]^{10} = 500\left[1 + \frac{10}{100}\right]^{10}$$

$$= 500 \times \left[\frac{11}{10}\right]^{10} = ₹\ 500 \times (1.1)^{10}$$ **उत्तर**

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सभी $x, y \in N$ के लिए $f(x + y) = f(x).f(y)$ को सन्तुष्ट करता हुआ f एक ऐसा फलन है कि $f(1) = 3$ एवं $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x + y) = f(x).f(y)$ (जबकि $x, y \in N$)

और $\quad f(1) = 3$

$x = y = 1$ रखने पर,

$$f(1+1) = f(1).\,f(1)$$

$\Rightarrow \quad f(2) = f(1).f(1) = 3 \times 3 = 9$

$x = 1$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$f(1+2) = f(1).\,f(2)$$

$$f(3) = f(1)\,.\,f(2) = 3 \times 9 = 27$$

$x = 1$ तथा $y = 3$ रखने पर,

$$f(1+3) = f(1).\,f(3)$$

$\Rightarrow \quad f(4) = f(1).f(3) = 3 \times 27 = 81$

प्रश्नानुसार, $\quad \sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$

$\Rightarrow \quad f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + ... + f(n) = 120$

$\Rightarrow$ $3+9+27+81+....+ n$ पद $=120$

यह एक गुणोत्तर श्रेढी है जिसका प्रथम पद $a = 3$ और सार्वअनुपात $r = 3$ है

$\therefore$ $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ से,

$$\frac{3(3^n - 1)}{3-1} = 120$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{3}{2}(3^n - 1) = 120$

$\Rightarrow$ $3^n - 1 = \dfrac{120 \times 2}{3} = 80$

$\Rightarrow$ $3^n = 81$ या $(3)^4$

$\Rightarrow$ $n = 4$ **उत्तर**

प्रश्न 2. गुणोत्तर श्रेढी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्वअनुपात क्रमशः 5 तथा 2 है। अन्तिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना दी गई गुणोत्तर श्रेढी में n पद हैं।

प्रथम पद $a = 5$ तथा सार्वअनुपात $r = 2$

$\because$ दिया है, n पदों का योग $= 315$

$\therefore$ $\dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} = 315$

$\therefore$ $\dfrac{5(2^n - 1)}{2-1} = 315$

$\Rightarrow$ $2^n - 1 = \dfrac{315}{5} = 63$

$\Rightarrow$ $2^n = 63+1 = 64 = (2)^6$

$\Rightarrow$ $(2)^n = (2)^6$

$\Rightarrow$ $n = 6$

तब गुणोत्तर श्रेढी का छठा पद $= ar^5$

$$= 5 \times (2)^5 = 5 \times 32 = 160$$

अतः अन्तिम पद $= 160$ तथा पदों की संख्या $= 6$ **उत्तर**

प्रश्न 3. किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो तो गुणोत्तर श्रेढी का सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद $a = 1$

माना श्रेढी का सार्वअनुपात r है।

$\therefore$ **तीसरा पद + पाँचवाँ पद = 90**

$\Rightarrow$ $ar^2 + ar^4 = 90$

$\Rightarrow$ $r^4 + r^2 = 90$ $(\because a = 1)$

$\Rightarrow$ $r^4 + r^2 - 90 = 0$

$\Rightarrow$ $r^4 + 10r^2 - 9r^2 - 90 = 0$

$\Rightarrow$ $(r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0$

$\Rightarrow$ $r^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow$ $r^2 = 9$ $\Rightarrow$ $r = \pm 3$

अतः श्रेढी का सार्वअनुपात $= \pm 3$ **उत्तर**

प्रश्न 4. किसी गुणोत्तर श्रेढी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान पर रखे पदों के योगफल का 5 गुना है तो सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी में $2m$ पद हैं जिनमें पहला पद a है तथा पदों का सार्वअनुपात r है।

श्रेढी के कुल $2m$ पदों का योगफल

$$S_{(2m)} = \frac{a(r^{2m} - 1)}{r-1}$$

स्पष्ट है कि कुल $2m$ पदों में से आधे अर्थात m विषम स्थानों पर तथा शेष m सम स्थानों पर होंगे।

श्रेढी $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ...$ में विषम स्थानों पर रखे m पदों का योग

$$= a + ar^2 + ar^4 + ... + ar^{2(m-1)}$$

$$= \frac{a[(r^2)^m - 1]}{r^2 - 1} = \frac{a(r^{2m} - 1)}{r^2 - 1}$$

$\because$ सभी पदों का योगफल $= 5 \times$ विषम स्थानों पर स्थित पदों का योगफल

$$\frac{a(r^{2m} - 1)}{r-1} = \frac{5a(r^{2m} - 1)}{(r+1)(r-1)}$$

$\therefore$ $1 = \dfrac{5}{r+1}$

$\Rightarrow$ $r + 1 = 5$

$\Rightarrow$ $r = 4$

अतः सार्वअनुपात $= 4$ **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि $\dfrac{a+bx}{a-bx} = \dfrac{b+cx}{b-cx} = \dfrac{c+dx}{c-dx}$ जहाँ $x \neq 0$ है तो दिखाइए कि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

हल : दिया है,

$$\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} \qquad (x \neq 0)$$

योगान्तरानुपात (Componendo and Dividendo) के नियम से,

$$\frac{(a+bx)+(a-bx)}{(a+bx)-(a-bx)} = \frac{(b+cx)+(b-cx)}{(b+cx)-(b-cx)}$$

$$= \frac{(c+dx)+(c-dx)}{(c+dx)-(c-dx)}$$

$\therefore$ $\dfrac{2a}{2bx} = \dfrac{2b}{2cx} = \dfrac{2c}{2dx}$

$\therefore$ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$

$\Rightarrow$ a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढी में हैं। **Proved.**

प्रश्न 6. किसी गुणोत्तर श्रेढी में S, n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2R^n = S^n$.

हल : माना गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

तब, $S = a + ar + ar^2 + ... + ar^{(n-1)}$

$= \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$R = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{ar} + \dfrac{1}{ar^2} + ... + \dfrac{1}{ar^{(n-1)}}$

$= \dfrac{\frac{1}{a}\left[1-\left\{\frac{1}{r}\right\}^n\right]}{1-\frac{1}{r}} = \dfrac{\frac{1}{a}\left[1-\frac{1}{r^n}\right]}{\frac{r-1}{r}}$

$= \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{r^n-1}{r^n}\right] \times \dfrac{r}{r-1}$

$= \dfrac{1-r^n}{a(1-r)r^{(n-1)}}$

तथा $P = a \,.\, ar \,.\, ar^2 \,......\, ar^{(n-1)} = a^n \,.\, r^{[1+2+3+ .... +(n-1)]}$

अब, $P^2 = a^{2n} \,.\, r^{[2+4+6+ ..... + 2(n-1)]}$

हम देखते हैं कि P^2 में r का घातांक $[2+4+6+ ..... + 2(n-1)]$ एक समान्तर श्रेढी है जिसका

योगफल $= \dfrac{n-1}{2}[2+2(n-1)] = n(n-1)$

[Note]

इसलिए $P^2 = a^{2n} \,.\, r^{[n(n-1)]}$

$\therefore$ **L.H.S.** $= P^2 R^n = a^{2n} \,.\, r^{[n(n-1)]} \times \dfrac{(1-r^n)^n}{a^n (1-r)^n r^{[n(n-1)]}}$

$= \dfrac{a^n (1-r^n)^n}{(1-r)^n} = \left[\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\right]^n$

$= S^n =$ **R.H.S.**

प्रश्न 7. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढी में है तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

हल : दिया है कि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

$\therefore \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} \Rightarrow \dfrac{b^n}{a^n} = \dfrac{c^n}{b^n} = \dfrac{d^n}{c^n}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{b^n + c^n}{a^n + b^n} = \dfrac{c^n + d^n}{b^n + c^n}$ **(समानुपात नियम से)**

$\Rightarrow \quad (b^n + c^n)^2 = (a^n + b^n)(c^n + d^n)$

अत: $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं। **Proved.**

प्रश्न 8. यदि समीकरण $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a, b तथा समीकरण $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c, d हैं, जहाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढी के रूप में हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$(q + p) : (q - p) = 17 : 15$$

हल : $\because$ समीकरण $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं।

$\therefore \quad a + b = 3$ तथा $ab = p$

इसी प्रकार, समीकरण $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c तथा d हैं।

$\therefore \quad c + d = 12$ तथा $cd = q$

तब, $q + p = cd + ab$

और $q - p = cd - ab$

$\therefore \quad \dfrac{(q+p)}{(q-p)} = \dfrac{cd + ab}{cd - ab}$ ...(1)

$\because \quad a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

$\therefore \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$

$\therefore \quad \dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{b}{c} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$

$\therefore \quad \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{b+c}{c} = \dfrac{c+d}{d}$

$\therefore \quad \dfrac{3}{b} = \dfrac{b+c}{c} = \dfrac{12}{d}$

$(\because \; a + b = 3, \; c + d = 12)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{b} = \dfrac{4}{d}$

$\Rightarrow \quad d = 4b$

पुन: $\because a + b = 3 \Rightarrow 4a + 4b = 12$

$\Rightarrow \quad 4a + 4b = c + d$

और $4b = d \Rightarrow c = 4a$

$\because \quad c = 4a$ और $d = 4b$

$\Rightarrow \quad cd = 16ab$

तब, समीकरण में cd का मान रखने पर,

$\dfrac{q+p}{q-p} = \dfrac{16ab + ab}{16ab - ab}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{q+p}{q-p} = \dfrac{17ab}{15ab}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{q+p}{q-p} = \dfrac{17}{15}$

अत: $(q + p) : (q - p) = 17 : 15$ **Proved.**

प्रश्न 9. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $5+55+555+....$

(ii) $.6+.66+.666+....$

हल : **(i)** यहाँ दी गई श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी नहीं है, परन्तु हम इसे गुणोत्तर श्रेणी का रूप दे सकते हैं।

अभीष्ट योगफल $= 5+55+555+...$ n पदों तक

$= 5\,(1+11+111+...$ n पदों तक)

(प्रत्येक पद से 5 common लेने पर)

कोष्ठक के प्रत्येक पद को 9 से गुणा तथा कोष्ठक के बाहर 9 से भाग करने पर

$= \frac{5}{9}(9+99+999+....+n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)$

$+.....n$ पदों तक]

प्रत्येक पद को दो पदों के अन्तर के रूप में इस प्रकार लिखते हैं कि प्रथम पदों से बनने वाली श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी हो तथा सभी दूसरे पद अचर हों।

$= \frac{5}{9}[(10+100+1000+...$ n पदों तक)

$-(1+1+1+.....n$ पदों तक)]

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\times(10^n-1)}{10-1}-n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right]$$

$$= \frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$$ **उत्तर**

● **(ii)** माना $S_n = 0.6+0.66+0.666+...+n$ पदों तक

$= 6\,[0.1+0.11+0.111+...+n$ पदों तक]

$= \frac{6}{9}[0.9+0.99+0.999+...+n$ पदों तक]

$= \frac{6}{9}[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)$

$+...+n$ पदों तक]

$= \frac{2}{3}[(1+1+1+...+n$ पद)

$$-\{(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+...+(0.1)^n\}]$$

$$= \frac{2}{3}[n-\{(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+......+(0.1)^n\}]$$

$$= \frac{2}{3}n-\frac{2}{3}[(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+......+(0.1)^n]$$

$$= \frac{2}{3}n-\frac{2}{3}\left[\frac{0.1\{1-(0.1)^n\}}{1-0.1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}n-\frac{2}{3}\left[\frac{0.1}{0.9}\{1-(0.1)^n\}\right]$$

$$= \frac{2}{3}n-\frac{2}{27}[1-(0.1)^n]$$

$$= \frac{2}{3}n-\frac{2}{27}[1-(10)^{-n}] \qquad (\because .1=(10)^{-1})$$

अतः $S_n = \frac{2}{3}n-\frac{2}{27}[1-(10)^{-n}]$ **उत्तर**

प्रश्न 10. एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने का निर्देश देता है तथा उनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस शृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि शृंखला न टूटे तो 8 वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है?

हल : $\because$ पहला व्यक्ति 4 पत्र लिखता है। वे चारों व्यक्ति भी चार पत्र लिखते हैं जिससे दूसरे स्तर पर पत्रों की संख्या 16 हो जाती है। तीसरे स्तर पर सभी 16 व्यक्ति भी चार-चार पत्र लिखते हैं जिससे पत्रों की संख्या $16\times4=64$ हो जाती है। यह क्रम 8 स्तरों तक चलता रहता है।

इस प्रकार 4, 16, 64, ...का एक अनुक्रम बनता है।

$\because$ उक्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढी है जिसमें प्रथम पद $a=4$

$\therefore$ सार्वअनुपात $r=\frac{16}{4}=4$ और पदों की संख्या = 8 है।

तब सूत्र $S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ से,

पत्रों की कुल संख्या $= \frac{4(4^8-1)}{4-1}$

$= \frac{4}{3}(4^8-1) = \frac{4}{3}(65536-1)$

$= \frac{4}{3}\times65535$

$= 87380$ (लगभग)

50 पैसे या ₹ 0.50 प्रति पत्र की दर से

कुल डाक खर्च $= 0.50\times87380 =$ ₹43690 **उत्तर**

प्रश्न 11. एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका मूल्य ₹ 15625 है, हर वर्ष 20% की दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मशीन का प्रारम्भिक मूल्य $V_0 =$ ₹ 15625 तथा अवमूल्यन की दर $R=20$ वार्षिक

$\therefore$ एक वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य

$$V_1 = \left\{V_0 - \frac{V_0 \times R \times 1}{100}\right\}$$

$$= V_0 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}$$

दो वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य

$$V_2 = V_1 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}$$

$$= V_0 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}\left\{1 - \frac{R}{100}\right\}$$

$$= ₹\ V_0 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}^2$$

इसी प्रकार,

तीन वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य

$$V_3 = ₹\ V_0 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}^3$$

[Note] स्पष्ट है कि विभिन्न वर्षों के बाद मशीन के अनुमानित मूल्य एक गुणोत्तर श्रेढी बनाते हैं जिसका प्रथम पद V_0 तथा सार्वअनुपात $\left\{1 - \frac{R}{100}\right\}$ है।

अत: 5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य

= गुणोत्तर श्रेणी का छठा पद **[Note]**

$$= V_0 \left\{1 - \frac{R}{100}\right\}^5 = 15625 \left\{1 - \frac{20}{100}\right\}^5$$

$$= 15625 \times \left\{\frac{4}{5}\right\}^5 = ₹\ 5120$$ **उत्तर**

❐