इकाई 3 : निर्देशांक ज्यामिति

# 09 सरल रेखाएँ (Straight Lines)

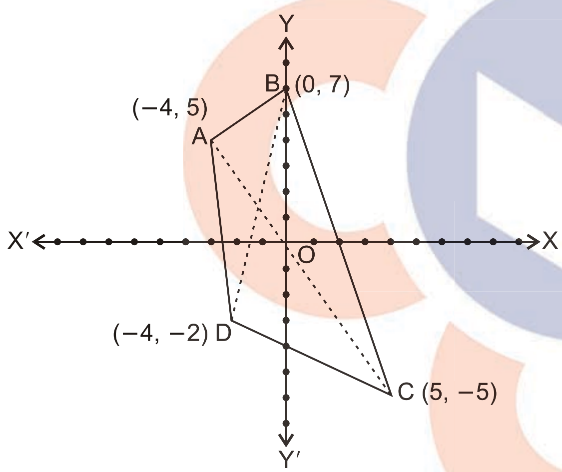
## NCERT ZONE

NCERT पाठ्यपुस्तक के अभ्यास में दिए गए प्रश्न एवं उनके हल

### प्रश्नावली 9.1

**प्रश्न 1. कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) और (– 4, – 2) हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।**

**हल :**




$\Delta ADC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[-4(-5-5)+5(5+2)-4(-2+5)]$

$= \frac{1}{2}(40+35-12) = \frac{1}{2}\times 63 = \frac{63}{2}$ वर्ग इकाई

तथा $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}[5(7-5)+0-4(-5-7)]$

$= \frac{1}{2}(10+48) = \frac{1}{2}\times 58 = 29$ वर्ग इकाई

अत: चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल

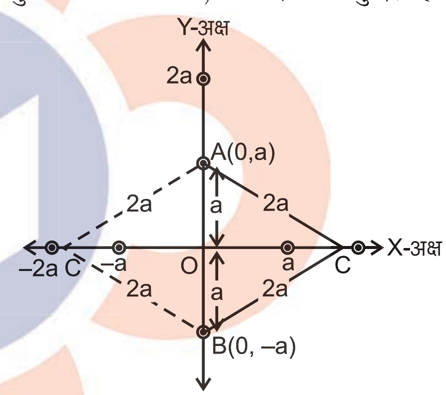
$= \Delta ADC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= \frac{63}{2} + 29 = \frac{121}{2}$ वर्ग इकाई। **उत्तर**

**प्रश्न 2. $2a$ भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार $Y$-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य-बिन्दु मूलबिन्दु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना $ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजाओं $AB, BC$ व $CA$ में से प्रत्येक की माप $2a$ मात्रक है।

$\because$ त्रिभुज का आधार $AB$, $Y$-अक्ष के अनुदिश है।




$\therefore$ बिन्दुओं $A$ व $B$ के $x$-निर्देशांक (भुज) शून्य होंगे।

$\because$ $AB$ का मध्य-बिन्दु मूलबिन्दु $O$ पर है और

$AB = 2a$ मात्रक

$\therefore$ $OA = a$ तथा $OB = a$

तब, बिन्दु $A$ के निर्देशांक $= (0, a)$ तथा

बिन्दु $B$ के निर्देशांक $= (0, -a)$

समबाहु त्रिभुज के गुण से, त्रिभुज का तीसरा शीर्ष $C$, भुजा $AB$ के लम्ब समद्विभाजक अर्थात $X$-अक्ष पर होगा। **[Note]**

अत: माना बिन्दु $C$ के निर्देशांक $(x, 0)$ हैं।

तब, $AC = \sqrt{(x-0)^2 + (0-a)^2}$

$\Rightarrow$ $AC^2 = x^2 + a^2$

$\Rightarrow$ $(2a)^2 = x^2 + a^2$ $(\because AC = AB = 2a)$

$\Rightarrow$ $x^2 + a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow$ $x^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow$ $x = \pm a\sqrt{3}$

तब बिन्दु $C$ के निर्देशांक $= (\pm a\sqrt{3}, 0)$

अतः त्रिभुज के शीर्ष

$A(0, a), B(0, -a), C = (a\sqrt{3}, 0)$ अथवा

$A(0, a), B(0, -a), C = (-a\sqrt{3}, 0)$ **उत्तर**

**प्रश्न 3. P $(x_1, y_1)$ और Q $(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब :**

**(i) PQ, Y-अक्ष के समान्तर है।**

**(ii) PQ, X-अक्ष के समान्तर है।**

**हल :** $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$

$\therefore$ दो बिन्दुओं $P$ और $Q$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad ...(1)$$

● **(i)** $\because$ रेखा $PQ$, $Y$-अक्ष के समान्तर है।

$\therefore$ रेखा $PQ$ पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का भुज एक स्थिरांक है।

$\therefore \quad x_1 = x_2 = k \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$

अब समीकरण (1) में $x_2 - x_1 = 0$ रखने पर,

$$PQ = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$ **उत्तर**

● **(ii)** $\because$ रेखा $PQ$, $Z$-अक्ष के समान्तर है।

$\therefore$ रेखा $PQ$ पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि एक स्थिरांक है।

$\therefore \quad y_1 = y_2 = k \Rightarrow y_2 - y_1 = 0$

अब समीकरण (1) में $y_2 - y_1 = 0$ रखने पर,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$ **उत्तर**

**प्रश्न 4. X-अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (7, 6) और (3, 4) से समान दूरी पर है।**

**हल :** माना $X$-अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु $(x, 0)$ है।

**प्रश्नानुसार :**

बिन्दुओं $(7, 6)$ तथा $(x, 0)$ के बीच की दूरी

= बिन्दुओं $(3, 4)$ तथा $(x, 0)$ के बीच की दूरी

इसलिए $\sqrt{(x-7)^2 + (0-6)^2}$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + (0-4)^2}$$

$\Rightarrow \quad (x-7)^2 + 36 = (x-3)^2 + 16$

$\Rightarrow \quad (x-7)^2 - (x-3)^2 = 16 - 36$

$\Rightarrow \quad (x^2 - 14x + 49) - (x^2 - 6x + 9) = -20$

$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 49 - x^2 + 6x - 9 = -20$

$\Rightarrow \quad -8x + 40 = -20$

$\Rightarrow \quad 8x = 40 + 20 = 60$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{60}{8} = \dfrac{15}{2}$

अतः अभीष्ट बिन्दु $\equiv \left(\dfrac{15}{2}, 0\right)$ **उत्तर**

**प्रश्न 5. उस रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु और बिन्दुओं P (0, – 4) तथा B (8, 0) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु से जाती है।**

**हल :** $P = (0, -4)$ तथा $B = (8, 0)$

$\therefore \quad x_1 = 0, y_1 = -4$ तथा $x_2 = 8, y_2 = 0$

यदि रेखा $PB$ का मध्य-बिन्दु $(x, y)$ हो तो

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

और $$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+0}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$\therefore$ $PB$ का मध्य-बिन्दु $= (4, -2)$ और मूलबिन्दु $= (0, 0)$

$\therefore \quad x_1 = 4, \quad y_1 = -2$

तथा $\quad x_2 = 0, \quad y_2 = 0$

$\therefore$ रेखाखण्ड $PB$ के मध्य-बिन्दु और मूलबिन्दु को मिलाने वाली रेखा का ढाल $(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{0-(-2)}{0-(4)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$ **उत्तर**

**प्रश्न 6. पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिना दिखलाइए कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (– 1, – 1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।**

**हल :** माना कि $\Delta ABC$ में,

$A \equiv (4, 4), B \equiv (3, 5)$ तथा $C \equiv (-1, -1)$

$\therefore$ भुजा $AB$ की प्रवणता या ढाल

$$(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$$

और भुजा $AC$ की प्रवणता या ढाल

$$(m_2) = \frac{y_3 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{-1-4}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$\because \quad m_1 \times m_2 = -1 \times 1 = -1$

अर्थात $\Delta ABC$ की भुजाएँ $AB$ तथा $AC$ परस्पर लम्ब हैं।

$\therefore \quad \Delta ABC$ में,

$\angle A = 90° \Rightarrow \Delta ABC$ समकोणीय त्रिभुज है।

अतः दिए गए बिन्दु एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

**Proved.**

**प्रश्न 7. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो Y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त मापा गया 30° का कोण बनाती है।**

**हल :** माना कि चित्र के अनुसार एक रेखा $l$, $Y$-अक्ष से वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाती है, तब

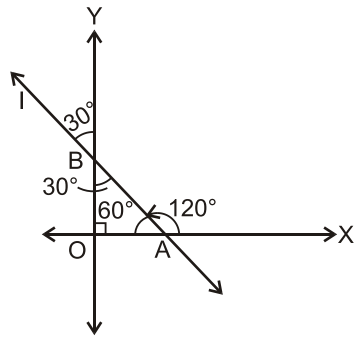
$\Delta ABC$ में, $\quad \angle OBA = 30°$

$\Rightarrow \quad \angle OAB = 90° - \angle OBA$

$= 90° - 30° = 60°$

तथा $\quad \angle XAB = 180° - \angle OAB$

$= 180° - 60° = 120°$




$\because$ रेखा द्वारा धन $X$-अक्ष से बनाया गया कोण 120° है, अत: रेखा की प्रवणता

$$m = \tan 120° = \tan(180° - 60°)$$
$$= -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

उत्तर

**प्रश्न 8. दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिन्दु (− 2, − 1), (4, 0), (3, 3) और (− 3, 2) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।**

**हल :** माना कि चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$A \equiv (-2, -1), B \equiv (4, 0), C \equiv (3, 3)$$

तथा $D = (-3, 2)$

तब, भुजा $AB$ की प्रवणता $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{0-(-1)}{4-(-2)} = \frac{1}{6},$$

भुजा $BC$ की प्रवणता $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$$= \frac{3-0}{3-4} = -3,$$

भुजा $CD$ की प्रवणता $m_3 = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$

$$= \frac{2-3}{-3-3}$$
$$= \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

भुजा $DA$ की प्रवणता $m_4 = \dfrac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$

$$= \frac{2-(-1)}{-3-(-2)}$$
$$= \frac{3}{-3+2} = -3$$

$\because$ $m_1 = m_3 \Rightarrow AB \parallel CD$

और $m_2 = m_4 \Rightarrow BC \parallel DA$

$\because$ चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान्तर हैं, अत: $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

अत: दिए हुए बिन्दु एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

**Proved.**

**प्रश्न 9. X-अक्ष और बिन्दुओं (3, − 1) व (4, − 2) को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना कि $A \equiv (3, -1)$ तथा $B \equiv (4, -2)$

तब रेखा $AB$ की प्रवणता,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-(-1)}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1$$

यदि यह रेखा $X$-अक्ष से $\theta$ कोण बनाती है, तब प्रवणता की परिभाषा से

$$m = \tan\theta$$
$$\Rightarrow \tan\theta = -1 = \tan 135°$$
$$\Rightarrow \theta = 135°$$

अत: $X$-अक्ष और दी गई रेखा के बीच का कोण = 135°

उत्तर

**प्रश्न 10. एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा के ढाल का दोगुना है। यदि दोनों रेखाओं के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है तो रेखाओं के ढाल ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना पहली रेखा की ढाल $m_1 = m$ है तब प्रश्नानुसार और दूसरी रेखा की ढाल $m_2 = 2m$ होगी।

यदि दोनों रेखाओं के बीच का कोण $\theta$ हो तो

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} = \left|\frac{2m - m}{1 + 2m \times m}\right|$$

$\left(\because \text{ दिया है, } \tan\theta = \frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow \left|\frac{m}{1+2m^2}\right| = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{m}{1+2m^2} = \pm\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \pm 3m = 1 + 2m^2$$
$$\Rightarrow 2m^2 \pm 3m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2m \pm 1)(m \pm 1) = 0$$
$$\Rightarrow m = \pm 1 \quad \text{या} \quad \pm\frac{1}{2}$$

तब यदि $m = \pm 1$ तो $m_1 = m = \pm 1$

तथा $m_2 = 2m = \pm 2$

और यदि $m = \pm\frac{1}{2}$ तो $m_1 = m = \pm\frac{1}{2}$

तथा $m_2 = 2m = \pm 1$

अत: रेखाओं के ढाल $\pm 2$ व $\pm 1$ तथा $\pm 1$ व $\pm\frac{1}{2}$ हैं।

*अथवा*

1 और 2, या $\frac{1}{2}$ और 1, या −1 और −2, या $-\frac{1}{2}$ और −1

उत्तर

**प्रश्न 11. एक रेखा $(x_1, y_1)$ और $(h, k)$ से जाती है। यदि रेखा की ढाल m है तो दिखाइए**

$$k - y_1 = m(h - x_1)$$

**हल :** $\because$ रेखा $(x_1, y_1)$ और $(h, k)$ से जाती है।

$\therefore$ रेखा की प्रवणता या ढाल $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore \quad m = \dfrac{k - y_1}{h - x_1}$

$\therefore \quad m(h - x_1) = k - y_1$

अत: $k - y_1 = m(h - x_1)$ **Proved.**

## प्रश्नावली | 9.2

- **प्रश्न 1 से 7 में उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करती है :**

**प्रश्न 1. X-अक्ष और Y-अक्ष के समीकरण लिखिए।**

**हल :** $X$-अक्ष का समीकरण : $y = 0$

$Y$-अक्ष का समीकरण : $x = 0$

**प्रश्न 2. ढाल $\frac{1}{2}$ और बिन्दु $(-4, 3)$ से जाने वाली।**

**हल :** ढाल $m = \frac{1}{2}$ और दिया हुआ बिन्दु $= (-4, 3)$

सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से,

दी गई प्रवणता तथा दिए गए बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 3 = \frac{1}{2}\{x - (-4)\}$$

$\therefore \quad 2y - 6 = x + 4$

$\therefore \quad 0 = x - 2y + 6 + 4$

$\therefore \quad x - 2y + 10 = 0$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण : $x - 2y + 10 = 0$

**उत्तर**

**प्रश्न 3. बिन्दु (0, 0) से जाने वाली और ढाल m वाली।**

**हल :** बिन्दु $m$ और बिन्दु $(x_1, y_1)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\because$ बिन्दु (0, 0) के लिए $x_1 = 0, \quad y = 0$

$\therefore \quad y - 0 = m(x - 0)$

$\Rightarrow \quad y = mx$

अत: बिन्दु (0, 0) से जाने वाली $m$ ढाल की रेखा का समीकरण : $y = mx$ **उत्तर**

**प्रश्न 4. बिन्दु $(2, 2\sqrt{3})$ से जाने वाली और X-अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।**

**हल :** रेखा का $X$-अक्ष से झुकाव $\theta = 75°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta = \tan 75°$

$$= \tan(45° + 30°)$$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45°.\tan 30°}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

दिया है कि रेखा बिन्दु $(2, 2\sqrt{3})$ से होकर जाती है।

अत: सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$y - 2\sqrt{3} = \left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right](x - 2)$$

$\Rightarrow \quad (y - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} + 1)(x - 2)$

$\Rightarrow \quad y(\sqrt{3} - 1) - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

$\quad = x(\sqrt{3} + 1) - 2(\sqrt{3} + 1)$

$\Rightarrow \quad y(\sqrt{3} - 1) - 6 + 2\sqrt{3}$

$\quad = x(\sqrt{3} + 1) - 2\sqrt{3} - 2$

$\Rightarrow \quad x(\sqrt{3} + 1) - y(\sqrt{3} - 1) = 4\sqrt{3} - 4$

$\Rightarrow \quad x(\sqrt{3} + 1) - y(\sqrt{3} - 1) = 4(\sqrt{3} - 1)$ **उत्तर**

**प्रश्न 5. मूलबिन्दु के बाईं ओर X-अक्ष को 3 इकाई दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल −2 वाली।**

**हल :** $\because$ रेखा की ढाल $m = -2$ और

रेखा मूलबिन्दु से 3 इकाई दूरी पर $X$-अक्ष को बाईं ओर प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore$ प्रतिच्छेद-बिन्दु $= (-3, 0)$

$\therefore \quad x_1 = -3, y_1 = 0$

तब रेखा का व्यापक समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\therefore \quad y - 0 = -2(x + 3)$

$\therefore \quad y = -2x - 6$

$\Rightarrow \quad 2x + y + 6 = 0$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण : $2x + y + 6 = 0$

**उत्तर**

**प्रश्न 6. मूलबिन्दु से ऊपर Y-अक्ष को 2 इकाई दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और X-अक्ष की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।**

**हल :** दिया है कि रेखा मूलबिन्दु के ऊपर $Y$-अक्ष को 2 इकाई दूरी पर प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore$ रेखा द्वारा $Y$-अक्ष पर काटा गया अन्त: खण्ड $c = 2$

$\because$ रेखा द्वारा $X$-अक्ष की धन दिशा से बनाया गया कोण

$$\theta = 30°$$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

अत: सूत्र $\mathbf{y = mx + c}$ से रेखा का समीकरण :

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x + 2$$

$$\Rightarrow \quad y\sqrt{3} = x + 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

उत्तर

**प्रश्न 7. बिन्दुओं (– 1, 1) और (2, – 4) से जाते हुए।**

**हल** : दिए गए बिन्दु (– 1, 1) और (2, – 4)

तब दो बिन्दुओं $(x_1, y_1)$ और $(x_2, y_2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\therefore \quad y - 1 = \frac{-4 - 1}{2 - (-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore \quad y - 1 = \frac{-5}{3}(x + 1)$$

$$\therefore \quad 3y - 3 = -5x - 5$$

$$\therefore \quad 5x + 3y - 3 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 3y + 2 = 0$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण : $5x + 3y + 2 = 0$

उत्तर

**प्रश्न 8. Δ PQR के शीर्ष P (2, 1), Q (– 2, 3) और R (4, 5) हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : शीर्ष $P = (2, 1)$, $\quad Q = (-2, 3)$

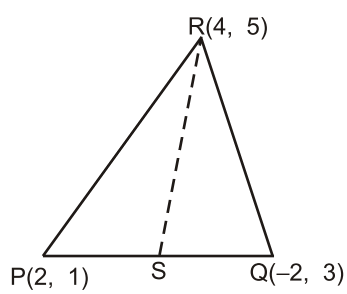
और $\quad R = (4, 5)$

शीर्ष $R$ से जाने वाली माध्यिका रेखा $PQ$ के मध्य-बिन्दु से मिलती है।

तब $PQ$ के मध्य-बिन्दु $S$ के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) = (0, 2)$$




तब $R(4, 5)$ और $S(0, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - 0}(x - 0)$$

$$\therefore \quad y - 2 = \frac{3}{4}x$$

$$\therefore \quad 4y - 8 = 3x$$

$$\therefore \quad 3x - 4y + 8 = 0$$

अत: माध्यिका $RS$ का समीकरण : $3x - 4y + 8 = 0$

उत्तर

**प्रश्न 9. (– 3, 5) से होकर जाने वाली और बिन्दु (2, 5) तथा (– 3, 6) से जाने वाली रेखा पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : बिन्दुओं (2, 5) व (– 3, 6) से जाने वाली रेखा की ढाल

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{-3 - 2} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

माना इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब रेखा की प्रवणता (ढाल) $m_2$ हो, तो

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{5} \times m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 5$$

तब $m_2$ ढाल और बिन्दु (– 3, 5) से जाने वाली रेखा का समीकरण :

$$y - 5 = m_2\,[x - (-3)]$$

$$\Rightarrow \quad y - 5 = 5(x + 3)$$

$$\Rightarrow \quad y - 5 = 5x + 15$$

$$\Rightarrow \quad 5x - y + 15 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x - y + 20 = 0$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण $5x - y + 20 = 0$

उत्तर

**प्रश्न 10. एक रेखा बिन्दुओं (1, 0) तथा (2, 3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर लम्ब है तथा उसको 1 : n के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : दिए हुए बिन्दुओं (1, 0) और (2, 3) को मिलाने वाली रेखा की ढाल

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

तब माना इस रेखा पर लम्ब रेखा की ढाल $m_2$ है तब

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 3 \times m_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{3}$$

माना बिन्दु $(x, y)$, बिन्दुओं (1, 0) और (2, 3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $1 : n$ के अनुपात में विभक्त करता है।

तब $\quad x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$

जबकि $\quad x_1 = 1 \quad$ और $\quad x_2 = 2$

तथा $\quad m_1 = 1 \quad$ और $\quad m_2 = n$

$$= \frac{1\times 2+n\times 1}{1+n} = \frac{n+2}{n+1}$$

और $$y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

जबकि $y_1 = 0,\ y_2 = 3$ तथा $m_1 = 1,\ m_2 = n$

$$= \frac{1\times 3+n\times 0}{1+n} = \frac{3}{n+1}$$

$\therefore$ बिन्दुओं (1, 0) और (2, 3) से जाने वाली रेखा पर लम्ब रेखा अभीष्ट रेखा से बिन्दु $\left(\frac{n+2}{m+1}, \frac{3}{n+1}\right)$ पर मिलती है और उसका ढाल $m_2 = m = -\frac{1}{3}$ है।

$\therefore$ लम्ब रेखा का समीकरण

$$\left(y-\frac{3}{n+1}\right) = -\frac{1}{3}\left(x-\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$\therefore$ $$(n+1)y-3 = -\frac{1}{3}[(n+1)x-(n+2)]$$

$\therefore$ $$3(n+1)y-9 = -(n+1)x+n+2$$

$\therefore$ $$(n+1)x+3(n+1)y = n+2+9$$

$\therefore$ $$(n+1)x+3(n+1)y = n+11$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण :

$$(n+1)x+3(n+1)y = n+11$$ **उत्तर**

**प्रश्न 11. एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांकों से समान अन्त: खण्ड काटती है और बिन्दु (2, 3) से जाती है।**

**हल :** माना वांछित रेखा $X$-अक्ष और $Y$-अक्ष दोनों से $a$ लम्बाई के अन्त:खण्ड काटती है। तब रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x+y = a \qquad ...(1)$$

$\because$ उक्त रेखा (1) बिन्दु (2, 3) से जाती है। इसलिए बिन्दु के निर्देशांक रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

तब $2+3 = a \Rightarrow a = 5$

तब रेखा (1) में $a = 5$ रखने पर, $x+y = 5$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण : $x+y = 5$ **उत्तर**

**प्रश्न 12. बिन्दु (2, 2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अन्त:खण्डों का योग 9 हो।**

**हल :** माना रेखा का समीकरण : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1 \qquad ...(1)$

$\because$ उक्त रेखा बिन्दु (2, 2) से होकर जाती है,

$\therefore$ $$\frac{2}{a}+\frac{2}{b} = 1 \qquad ...(2)$$

$\because$ रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गए अन्त: खण्डों का योगफल = 9

$\therefore$ $$a+b = 9 \Rightarrow b = 9-a \qquad ...(3)$$

समीकरण (2) में $b$ का उक्त मान रखने पर,

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{9-a} = 1$$

$\Rightarrow$ $$2(9-a)+2a = a(9-a)$$

$\Rightarrow$ $$a^2-9a+18 = 0$$

$\Rightarrow$ $$(a-3)(a-6) = 0$$

$\Rightarrow$ $$a = 3,\ 6$$

यदि $a = 3$ है तो समीकरण (3) से, $b = 9-3 = 6$

यदि $a = 6$ है तो समीकरण (3) से, $b = 9-6 = 3$

समीकरण (1) में $a$ तथा $b$ के मान रखने पर,

अभीष्ट रेखाओं के समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{6} = 1 \quad \text{तथा} \quad \frac{x}{6}+\frac{y}{3} = 1$$

$\Rightarrow$ $$6x+3y = 18 \quad \text{तथा} \quad 3x+6y = 18$$

अथवा $2x+y-6 = 0$ तथा $x+2y-6 = 0$

**उत्तर**

**प्रश्न 13. बिन्दु (0, 2) से जाने वाली और धन X-अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समान्तर और Y-अक्ष को मूलबिन्दु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** धन $X$-अक्ष से रेखा द्वारा बना कोण

$$\theta = \frac{2\pi}{3} = 120°$$

$\therefore$ रेखा की ढाल $m = \tan 120°$

$$= \tan(180°-60°) = -\tan 60°$$

$\because$ रेखा बिन्दु (0, 2) से जाती है।

$\therefore$ रेखा का समीकरण : $y-2 = m(x-0)$

$\therefore$ $$y-2 = -\sqrt{3}x$$

$(\because m = -\sqrt{3})$

$\therefore$ $$\sqrt{3}x+y = 2$$

अत: रेखा का समीकरण $\sqrt{3}x+y-2 = 0$ है। **उत्तर**

अब उक्त रेखा के समान्तर रेखा का समीकरण

$$\sqrt{3}x+y = k$$

$\because$ यह रेखा $Y$-अक्ष को मूलबिन्दु के नीचे 2 इकाई पर काटती है।

$\therefore$ प्रतिच्छेद-बिन्दु = (0, – 2)

$\therefore$ बिन्दु (0, – 2) रेखा $\sqrt{3}x+y = k$ पर स्थित है।

$\therefore$ $$\sqrt{3}.0+(-2) = k \Rightarrow k = -2$$

$\therefore$ रेखा का समीकरण :

$$\sqrt{3}x+y = -2 \quad \text{या} \quad \sqrt{3}x+y+2 = 0$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण $\sqrt{3}x+y+2 = 0$ है।

**उत्तर**

**प्रश्न 14. मूलबिन्दु से किसी रेखा पर डाला गया लम्ब, रेखा से बिन्दु (–2, 9) पर मिलता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** प्रश्नानुसार, मूलबिन्दु से रेखा पर डाला गया लम्ब स्वयं मूलबिन्दु (0, 0) तथा बिन्दु (– 2, 9) से होकर जाता है, अत: इस लम्ब का समीकरण

$$y - 0 = \frac{9-0}{-2-0}(x-0)$$

$\Rightarrow \quad -2y = 9x$

$\Rightarrow \quad 9x + 2y = 0$

$\because$ अभीष्ट रेखा उक्त रेखा पर लम्ब है, अत: अभीष्ट रेखा का समीकण $2x - 9y + \lambda = 0$ **[Note]**

$\because$ यह रेखा बिन्दु (– 2, 9) से जाती है, अत:

$$2 \times (-2) - 9 \times 9 + \lambda = 0$$

$\Rightarrow \quad -4 - 81 + \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 85$

$$2x - 9y + 85 = 0$$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण : $2x - 9y + 85 = 0$

**उत्तर**

**प्रश्न 15. ताँबे की छड़ की लम्बाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि L = 124.942 जब C = 20 और L = 125.134, जब C = 110 हो तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।**

**हल :** $\because$ छड़ की लम्बाई $L$ सेल्सियस ताप $C$ का रैखिक फलन है, अत:

$L$ तथा $C$ में सम्बन्ध निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरूपित होगा :

$$L = mC + \lambda \quad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार, जब $C = 20$ तो $L = 124.942$

$\therefore$ समीकरण (1) को सन्तुष्ट करने पर,

$$124.942 = 20m + \lambda \quad \ldots(2)$$

तथा जब $C = 110$ तो $L = 125.134$

$$\therefore \quad 125.134 = 110m + \lambda \quad \ldots(3)$$

समीकरण (3) में से (2) को घटाने पर,

$$0.192 = 90\,m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{0.192}{90}$$

तब समीकरण (1) से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$L - 124.942 = m(C - 20)$$

$$L - 124.942 = \frac{0.192}{90}(C - 20)$$

$$L = \frac{0.192}{90}(C - 20) + 124.942$$

अत: अभीष्ट रैखिक फलन:

$$L = \frac{0.192}{90}(C - 20) + 124.942$$

**उत्तर**

**प्रश्न 16. किसी दूध भण्डार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लीटर दूध ₹ 14 प्रति लीटर के भाव से और 1220 लीटर दूध ₹ 16 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा माँग के मध्य के सम्बन्ध को रैखिक मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध ₹ 17 प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है?**

**हल :** जब विक्रय मूल्य और माँग में रैखिक सम्बन्ध हो तो दूध के भाव और दूध की खपत को क्रमश: चर $x$ व $y$ से व्यक्त करने पर रैखिक फलन पर दो बिन्दु (14, 980) व (16, 1220) स्थित होंगे।

माना ₹ 17 प्रति लीटर के भाव से $y$ लीटर दूध की प्रति सप्ताह खपत है। तब बिन्दु (17, $y$) भी इसी रेखा पर होगा और तीनों बिन्दु (14, 980), (16, 1220) व (17, $y$) संरेख होंगे।

$$x_1 = 14, \quad y_1 = 980$$

$$x_2 = 16, \quad y_2 = 1220$$

$$x_3 = 17, \quad y_3 = y$$

तब संरेख होने का प्रतिबन्ध :

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \quad \frac{y - 1220}{17 - 16} = \frac{1220 - 980}{16 - 14}$$

$$\therefore \quad \frac{y - 1220}{1} = \frac{240}{2}$$

$$\therefore \quad y - 1220 = 120$$

$$\therefore \quad y = 120 + 1220 = 1340$$

अत: दूध भण्डार का स्वामी प्रति सप्ताह ₹ 17 प्रति लीटर के भाव से 1340 लीटर दूध बेच सकेगा। **उत्तर**

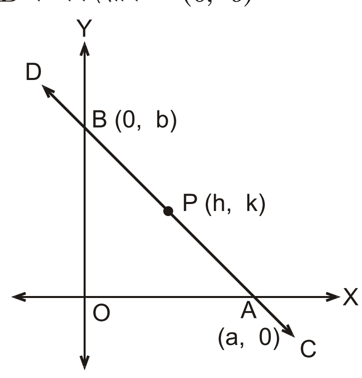
**प्रश्न 17. अक्षों के बीच रेखाखण्ड का मध्य-बिन्दु P (a, b) है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ है।**

**हल :** माना अभीष्ट रेखा $CD$ है। माना रेखा $CD$, $X$-अक्ष को बिन्दु $A$ पर तथा $Y$-अक्ष को बिन्दु $B$ पर काटती है।

माना $OA = a$ तथा $OB = b$

$\therefore$ बिन्दु $A$ के निर्देशांक = ($a$, 0)

तथा बिन्दु $B$ के निर्देशांक = (0, $b$)




$\Rightarrow$ रेखाखण्ड $AB$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left[\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right] = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

$\because$ रेखा $CD$ के अक्षों के बीच अन्त: खण्डित भाग $AB$ का मध्य-बिन्दु $P(h, k)$ है,

$\therefore \quad \frac{a}{2} = h \quad$ तथा $\quad \frac{b}{2} = k$

$\Rightarrow \quad a = 2h \quad$ तथा $\quad b = 2k$

अत: अभीष्ट रेखा $CD$ का समीकरण निम्नलिखित है :

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2h} + \frac{y}{2k} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 2$ **Proved.**

**प्रश्न 18. अक्षों के बीच रेखाखण्ड को बिन्दु R (h, k), 1 : 2 के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना अभीष्ट रेखा $CD$ है।

माना रेखा $CD$, $X$-अक्ष को बिन्दु $A$ पर तथा $Y$-अक्ष को बिन्दु $B$ पर काटती है।

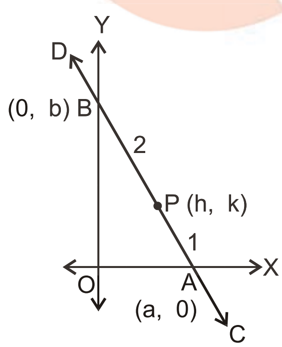
माना $OA = a \quad$ तथा $\quad OB = b$

तब, $\quad A \equiv (a, 0) \quad$ तथा $\quad B \equiv (0, b)$

$\because$ बिन्दु $P(h, k)$ अक्षों के बीच रेखाखण्ड $AB$ को $1 : 2$ के अनुपात में विभक्त करता है,

$\therefore \quad h = \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}$

तथा $\quad k = \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}$




$\Rightarrow \quad h = \frac{2a}{3} \quad$ तथा $\quad k = \frac{b}{3}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{3h}{2} \quad$ तथा $\quad b = 3k$

अत: अभीष्ट रेखा $CD$ का समीकरण :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{3h}{2}} + \frac{y}{3k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{3h} + \frac{y}{3k} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2kx + hy}{3hk} = 1$$

$\Rightarrow \quad 2kx + hy = 3hk$ **उत्तर**

**प्रश्न 19. रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु (3, 0), (– 2, – 2) और (8, 2) संरेख हैं।**

**हल :** दो बिन्दुओं (3, 0) व (– 2, – 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण :

$$y - 0 = \frac{-2-0}{-2-3}(x-3)$$

$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{5}(x-3) \quad \Rightarrow \quad 5y = 2x - 6$

$\Rightarrow \quad 2x - 5y = 6$ ...(1)

बिन्दु (8, 2) से उक्त समीकरण को सन्तुष्ट करने पर

$2 \times 8 - 5 \times 2 = 6 \quad$ या $\quad 16 - 10 = 6$

जोकि सत्य है, अत: (8, 2) भी उसी रेखा पर है जिस पर बिन्दु (3,0) व (– 2, – 2) हैं।

अत: बिन्दु (3, 0), (– 2, – 2) व (8, 2) संरेख हैं।

**Proved.**

## प्रश्नावली | 9.3

**प्रश्न 1. निम्नलिखित समीकरणों को ढाल-अन्त: खण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और उनके ढाल तथा y-अन्त: खण्ड ज्ञात कीजिए।**

**(i) x + 7 y = 0**
**(ii) 6 x + 3 y – 5 = 0**
**(iii) y = 0**

**हल : (i)** $\because$ ढाल-अन्त:खण्ड रूप में रेखा का स्वरूप $y = mx + c$ होता है।

दी गई रेखा का समीकरण : $x + 7y = 0$

$\therefore \quad 7y = -x$

$\therefore \quad y = -\frac{1}{7}x$

अत: रेखा $x + 7y = 0$ की ढाल-अन्त: खण्ड रूप :

$y = -\frac{1}{7}x + 0$ ...(1) **उत्तर**

रेखा (1) से $y = mx + c$ की तुलना करने पर,

$m = -\frac{1}{7} \quad$ तथा $\quad c = 0$

अत: रेखा की ढाल $= -\frac{1}{7}$ **उत्तर**

तथा $\quad y$-अन्त:खण्ड $= 0$ **उत्तर**

● **(ii)** रेखा का समीकरण : $6x + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 3y = -6x + 5$ या $y = -2x + \frac{5}{3}$ ...(1)

उत्तर

यह दी हुई रेखा के समीकरण का प्रवणता अन्त: खण्ड रूप है।

समीकरण (1) की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

$m = -2$ तथा $c = \frac{5}{3}$

अत: रेखा की प्रवणता $= -2$ उत्तर

तथा रेखा द्वारा $Y$-अक्ष पर काटा गया अन्त: खण्ड $= \frac{5}{3}$ इकाई

उत्तर

● **(iii)** रेखा $y = 0$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

$m = 0, \quad c = 0$

$\therefore$ दी गई रेखा की ढाल-अन्त:खण्ड रूप :

$y = 0.x + 0$ उत्तर

$\therefore$ दी गई रेखा की ढाल $= 0$ उत्तर

और $y$-अन्त:खण्ड $= 0$ उत्तर

**प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों को अन्त:खण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए।**

**(i) $3x + 2y - 12 = 0$**

**(ii) $4x - 3y = 6$**

**(iii) $3y + 2 = 0$**

**हल : (i)** दी गई रेखा का समीकरण :

$3x + 2y - 12 = 0$ या $3x + 2y = 12$

दोनों पक्षों को 12 से भाग देने पर,

$$\frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \quad ...(1)$$

अत: रेखा के समीकरण का अन्त:खण्ड रूप :

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$ उत्तर

समीकरण (1) की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,

$a = 4, \quad b = 6$

अत: $X$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= 4$

तथा $Y$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= 6$ उत्तर

● **(ii)** दी गई रेखा का समीकरण : $4x - 3y = 6$

दोनों पक्षों को 6 से भाग देने पर,

$$\frac{4x}{6} - \frac{3y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{3/2} + \frac{y}{-2} = 1 \quad ...(1)$$

अत: दी गई रेखा का अन्त:खण्ड रूप

$$\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-2} = 1$$ उत्तर

रेखा (1) की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,

$a = \frac{3}{2}$ तथा $b = -2$

अत: $X$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= \frac{3}{2}$

और $Y$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= -2$ उत्तर

● **(iii)** दी गई रेखा का समीकरण :

$3y + 2 = 0$ या $3y = -2$

दोनों पक्षों को $-2$ से भाग देने पर,

$$\frac{0.x}{-2} + \frac{3y}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\infty} + \frac{y}{-2/3} = 1$$

अत: दी गई रेखा का अन्त:खण्ड रूप :

$\frac{x}{\infty} + \frac{y}{-2/3} = 1$ अथवा $y = -\frac{2}{3}$ उत्तर

उक्त रेखा की तुलना से $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,

$a = \infty, \quad b = -\frac{2}{3}$

तब, $X$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= \infty$

अर्थात् $X$-अक्ष पर कोई अन्त:खण्ड नहीं है। उत्तर

$Y$-अक्ष से काटा गया अन्त:खण्ड $= -\frac{2}{3}$ उत्तर

**प्रश्न 3. बिन्दु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x + 6) = 5(y - 2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दी गई रेखा का समीकरण :

$$12(x + 6) = 5(y - 2)$$

$$12x + 72 = 5y - 10$$

$$12x - 5y + 82 = 0 \quad ...(1)$$

सूत्र $p = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ से

रेखा की बिन्दु $(-1, 1)$ से दूरी

$$p = \frac{|12(-1) - 5(1) + 82|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{|-12 - 5 + 82|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{65}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{65}{13} = 5 \text{ इकाई}$$

अत: दी गई रेखा की बिन्दु $(1, 1)$ से दूरी $= 5$ इकाई

उत्तर

**प्रश्न 4. X-अक्ष पर बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरियाँ 4 इकाई हैं।**

**हल :** माना $X$-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु $(h, \ 0)$ है।

दी हुई रेखा का समीकरण :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $$4x+3y-12=0 \qquad ...(1)$$

$\because$ बिन्दु $(h, \ 0)$ की रेखा (1) से दूरी = 4 इकाई

$\therefore$ $$\frac{|4h+3\times 0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

$\Rightarrow$ $$\frac{|4h-12|}{5}=4$$

$\Rightarrow \quad 4|h-3|=4\times 5 \quad \Rightarrow \quad |h-3|=5$

$\Rightarrow \quad h-3=\pm 5 \quad \Rightarrow \quad h=8, -2$

अत: अभीष्ट बिन्दु $(8, \ 0)$ तथा $(-2, \ 0)$ हैं। **उत्तर**

**प्रश्न 5. समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :**

**(i) $15x+8y-34=0$ तथा**

**$15x+8y+31=0$**

**(ii) $l(x+y)+p=0$ तथा**

**$l(x+y)-r=0$**

**हल : (i)** दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$15x+8y-34=0 \qquad ...(1)$$

तथा $$15x+8y+31=0 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर,

$$8y-34=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{34}{8}=\frac{17}{4}$$

$\therefore$ रेखा (1) पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $=\left[0, \ \frac{17}{4}\right]$

अत: दी हुई रेखाओं के बीच की दूरी = बिन्दु $\left[0, \ \frac{17}{4}\right]$ से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$=\frac{\left|15\times 0+8\times\frac{17}{4}+31\right|}{\sqrt{15^2+8^2}}$$

$$=\frac{34+31}{17}=\frac{65}{17} \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

● **(ii)** दी गई प्रथम रेखा : $l(x+y)+p=0$

या $$lx+ly+p=0$$

$ax+by+c=0$ से तुलना करने पर,

$$a=l, b=l \quad \text{तथा} \quad c_1=p$$

तथा दूसरी रेखा $l(x+y)-r=0$

या $$lx+ly-r=0$$

यहाँ $a=l, \quad b=l$ तथा $c_2=-r$

$\therefore$ दी गई समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

$$d=\left|\frac{c_1-c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{p-(-r)}{\sqrt{l^2+l^2}}\right|=\left|\frac{p+r}{\sqrt{2l^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{p+r}{l\sqrt{2}}\right|$$

अत: दी गई समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right| \text{ इकाई}$$

**उत्तर**

**प्रश्न 6. रेखा $3x-4y+2=0$ के समान्तर और बिन्दु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दी गई रेखा का समीकरण :

$$3x-4y+2=0$$

दी गई रेखा के समान्तर रेखा का व्यापक समीकरण :

$$3x-4y+\lambda=0 \qquad ...(1)$$

$\because$ रेखा (1) बिन्दु $(-2, 3)$ से जाती है।

$\therefore \quad (3\times -2)-(4\times 3)+\lambda=0$

$\therefore \quad -6-12+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=18$

रेखा (1) में $\lambda$ का मान रखने पर,

अभीष्ट समान्तर रेखा का समीकरण :

$$3x-4y+18=0$$ **उत्तर**

**प्रश्न 7. रेखा $x-7y+5=0$ पर लम्ब और x-अन्त:खण्ड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना रेखा $x-7y+5=0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$7x+y+\lambda=0 \qquad ...(1)$$

यदि उक्त रेखा का $X$-अन्त: खण्ड 3 है तो यह $X$-अक्ष के बिन्दु $(3, \ 0)$ से होकर जाएगी। **[Note]**

$\therefore \quad 7\times 3+0+\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad 21+\lambda=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=-21$

समीकरण (1) में $\lambda$ का मान रखने पर,

अभीष्ट रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$7x+y-21=0 \quad \text{या} \quad y+7x=21$$

**उत्तर**

**प्रश्न 8. रेखाओं $\sqrt{3}x+y=1$ और $x+\sqrt{3}y=1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** रेखा $\sqrt{3}x+y=1$ की ढाल

$$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

तथा रेखा $x+\sqrt{3}y=1$ की ढाल

$$m_2=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

यदि रेखाओं के बीच का कोण $\theta$ हो तो

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\times m_2}\right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3})}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times (-\sqrt{3})} \right|$$

$$= \frac{\left| -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right|}{1+1} = \frac{\left| \frac{-1+3}{\sqrt{3}} \right|}{2}$$

$$= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad \tan\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30°$ और $150°$

अत: रेखाओं के बीच का कोण = 30° और 150° **उत्तर**

**प्रश्न 9. बिन्दुओं (h, 3) और (4, 1) से जाने वाली रेखा, रेखा 7 x − 9 y − 19 = 0 को समकोण पर प्रतिच्छेद करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।**

**हल** : बिन्दुओं $(h, 3)$ तथा $(4, 1)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता $m_1 = \frac{1-3}{4-h} = \frac{-2}{4-h}$

दिया हुआ समीकरण : $7x - 9y - 19 = 0$

∴ उक्त समीकरण से निरूपित रेखा की प्रवणता

$$m_2 = -\left[\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}\right] = -\left[\frac{7}{-9}\right] = \frac{7}{9}$$

दिया है कि दोनों रेखाएँ समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।

इसलिए $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-2}{4-h} \times \frac{7}{9} = -1$

$\Rightarrow 36 - 9h = 14 \Rightarrow 9h = 22 \Rightarrow h = \frac{22}{9}$ **उत्तर**

**प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(x_1, y_1)$ से जाने वाली रेखा Ax + By + C = 0 के समान्तर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।**

**हल** : माना रेखा $a x + b y + c = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$a x + b y + \lambda = 0 \qquad ...(1)$$

यदि उक्त रेखा बिन्दु $(h, k)$ से होकर जाती है तो

$a h + b k + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a h - b k$

समीकरण (1) में $\lambda$ का मान रखने पर,

अभीष्ट रेखा का समीकरण :

$$a x + b y + (-a h - b k) = 0$$

या $\quad a(x-h) + b(y-k) = 0$ **Proved.**

**प्रश्न 11. बिन्दु (2, 3) से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60° के कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि एक रेखा की ढाल 2 है तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : दो रेखाओं के बीच का कोण $\alpha = 60°$

तथा एक रेखा की प्रवणता $m_1 = 2$

माना दूसरी रेखा की प्रवणता $m_2$ है, तब

सूत्र $\mathbf{\tan\alpha = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$ से,

$$\tan 60° = \pm \frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} \Rightarrow \frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} = \pm\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \quad 2 - m_2 = \pm\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}\, m_2$

$\Rightarrow \quad m_2(1 \pm 2\sqrt{3}) = 2 \mp \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{2 \mp \sqrt{3}}{1 \pm 2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}$ अथवा $\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$

अत: सूत्र $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ से,

दूसरी रेखा का समीकरण :

$$y - 3 = \frac{2-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}}(x-2)$$

अथवा $y - 3 = \frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}(x-2)$

अर्थात $(2\sqrt{3}+1)\,y - 3 - 6\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})\,x - 4 + 2\sqrt{3}$

अथवा $(1-2\sqrt{3})\,y - 3 + 6\sqrt{3} = (\sqrt{3}+2)\,x - 4 - 2\sqrt{3}$

अर्थात $(\sqrt{3}-2)\,x + (2\sqrt{3}+1)\,y = 8\sqrt{3} - 1$

अथवा $(\sqrt{3}+2)\,x + (2\sqrt{3}-1)\,y = 8\sqrt{3} + 1$ **उत्तर**

**प्रश्न 12. बिन्दुओं (3, 4) और (− 1, 2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड की लम्ब समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : माना बिन्दुओं $A(3, 4)$ तथा $B(-1, 2)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड $AB$ है, तब

रेखाखण्ड $AB$ की प्रवणता $M = \frac{2-4}{-1-3}$

$$= \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\because \textbf{प्रवणता} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

∴ रेखाखण्ड $AB$ के लम्ब समद्विभाजक की प्रवणता

$$m = \frac{-1}{M} = -2$$

माना रेखाखण्ड $AB$ का मध्य-बिन्दु $P$ है, तब

बिन्दु $P$ के निर्देशांक $= \left[\frac{3+(-1)}{2}, \frac{4+2}{2}\right]$

$$= \left[\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right] = (1, 3)$$

इस प्रकार लम्ब समद्विभाजक बिन्दु $P(1, 3)$ से होकर जाता है तथा उसकी प्रवणता − 2 है।

अतः सूत्र $\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$ से $AB$ के लम्ब समद्विभाजक का समीकरण :

$$y - 3 = -2(x - 1) \quad \text{या} \quad 2x + y = 5 \qquad \text{उत्तर}$$

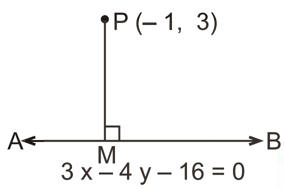
**प्रश्न 13. बिन्दु (–1, 3) से रेखा $\mathbf{3x - 4y - 16 = 0}$ पर डाले गए लम्बपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना बिन्दु $P(-1, 3)$ से रेखा

$$3x - 4y - 16 = 0 \qquad \ldots(1)$$

पर डाले गए लम्ब का लम्बपाद $M$ है, तब

बिन्दु $M$, रेखा (1) तथा बिन्दु $P(-1, 3)$ से होकर जाने वाली एवं रेखा (1) पर लम्ब रेखा का प्रतिच्छेद-बिन्दु है।




माना रेखा (1) पर लम्ब रेखा का समीकरण :

$$4x + 3y = \lambda \qquad \ldots(2)$$

यदि उक्त रेखा बिन्दु $P(-1, 3)$ से होकर जाती है तो

$4 \times (-1) + 3 \times 3 = \lambda$ या $\lambda = -4 + 9 = 5$

समीकरण (2) में $\lambda$ का मान रखने पर,

बिन्दु $P$ से होकर जाने वाली तथा रेखा (1) पर लम्ब रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$4x + 3y = 5 \quad \text{या} \quad 4x + 3y - 5 = 0 \qquad \ldots(3)$$

$\because$ बिन्दु $M$, रेखाओं (1) तथा (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु है,

$\therefore$ समीकरण (1) तथा (3) को हल करने पर,

$$x = \frac{68}{25} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{-49}{25}$$

अतः अभीष्ट लम्बपाद के निर्देशांक $= \left[\dfrac{68}{25}, \dfrac{-49}{25}\right]$

उत्तर

**प्रश्न 14. मूलबिन्दु से रेखा $\mathbf{y = mx + c}$ पर डाला गया लम्ब रेखा से बिन्दु (– 1, 2) पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दी गई रेखा की समीकरण : $y = mx + c \quad \ldots(1)$

इस रेखा की ढाल $= m$

मूलबिन्दु को बिन्दु $(-1, 2)$ से मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$M = \frac{2 - 0}{(-1) - 0} = -2$$

$\because$ उक्त दोनों परस्पर लम्ब हैं, अतः

$$m \times M = -1 \Rightarrow m \times (-2) = -1$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

स्पष्ट है कि दी गई रेखा (1) बिन्दु $(-1, 2)$ से होकर जाती है, अतः

$$\therefore \quad 2 = m(-1) + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 2 + m = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \left(\because m = \frac{1}{2}\right)$$

अतः $m = \dfrac{1}{2}$ तथा $c = \dfrac{5}{2}$ उत्तर

**प्रश्न 15. यदि p और q क्रमशः मूलबिन्दु से रेखाओं $\mathbf{x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta}$ और $\mathbf{x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta = k}$, पर डाले गए लम्ब की लम्बाइयाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि**

$$\mathbf{p^2 + 4q^2 = k^2}$$

**हल :** दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$x\cos\theta - y\sin\theta - k\cos 2\theta = 0 \qquad \ldots(1)$$

तथा
$$x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta - k = 0 \qquad \ldots(2)$$

दिया है कि $p =$ मूलबिन्दु $(0, 0)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

तथा $q =$ मूलबिन्दु $(0, 0)$ से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$\therefore \quad p = \frac{|-k\cos 2\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \frac{k\cos 2\theta}{\sqrt{1}}$$

$$= k\cos 2\theta$$

$$\text{तथा } q = \frac{|-k|}{\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta}}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}}} = \frac{k\cos\theta\,.\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

$$= \frac{k\cos\theta\,.\sin\theta}{\sqrt{1}} = k\cos\theta\,.\sin\theta$$

$$\Rightarrow p^2 + 4q^2 = k^2\cos^2 2\theta + 4k^2\cos^2\theta\,.\sin^2\theta$$

$$= k^2\cos^2 2\theta + k^2(2\cos\theta\,.\sin\theta)^2$$

$$= k^2\cos^2 2\theta + k^2\sin^2 2\theta$$

$$= k^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$$

$$= k^2 \times 1 = k^2$$

**Proved.**

**प्रश्न 16. शीर्षों A (2, 3), B (4, – 1) और C (1, 2) वाले त्रिभुज ABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा पर लम्ब डाला गया है। लम्ब की लम्बाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** $A \equiv (2, 3), B \equiv (4, -1), C \equiv (1, 2)$

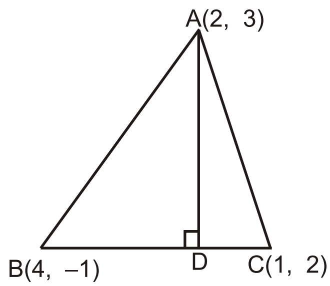
$x_1 = 2, y_1 = 3;\; x_2 = 4, y_2 = -1;$

$x_3 = 1, y_3 = 2$

$\Delta ABC$ के आधार $BC$ की ढाल

$$m = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2 - (-1)}{1 - 4} = \frac{3}{-3}$$

ढाल $m = -1$




माना शीर्ष $A(2, 3)$ से $BC$ पर खींचे गए लम्ब का ढाल $M$ है।

तब $\quad m \times M = -1$

$\Rightarrow \quad -1 \times M = -1 \quad \Rightarrow \quad M = 1$

तब शीर्ष $A(2, 3)$ से खींचे गए लम्ब का समीकरण :

$$y - 3 = M(x - 2)$$

$\Rightarrow \quad y - 3 = 1(x - 2) \qquad (M = 1$ रखने पर)

$\Rightarrow \quad x - y - 2 + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x - y + 1 = 0 \Rightarrow y - x = 1$

अत: लम्ब का समीकरण $y - x = 1$. **उत्तर**

अब रेखाखण्ड $BC$ का समीकरण :

$$y - 2 = \frac{-1-2}{4-1}(x - 1)$$

$\Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{3}{3}(x - 1)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = -1(x - 1)$

$\Rightarrow \quad x + y - 3 = 0$

तब शीर्ष $A(2, 3)$ से रेखाखण्ड $BC$ $(x + y - 3 = 0)$ पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{|1(2) + 1(3) - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 3 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

अत: शीर्ष $A$ से सम्मुख भुजा $BC$ पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई $= \sqrt{2}$ मात्रक तथा

लम्ब का समीकरण $y - x = 1$. **उत्तर**

**प्रश्न 17. यदि p मूलबिन्दु से उस रेखा पर डाले लम्ब की लम्बाई हो जिसके द्वारा अक्षों पर कटे अन्त:खण्ड a और b हों तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$**

**हल :** अक्षों पर अन्त:खण्ड $a$ तथा $b$ काटने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

दिया है कि $p =$ मूलबिन्दु से उक्त रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

इसलिए $\quad p = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{b^2 + a^2}{a^2 b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{p} = \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ **Proved.**

## विविध प्रश्नावली

**प्रश्न 1. k के मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $(k - 3)x - (4 - k^2)y + (k^2 - 7k + 6) = 0$**

**(a) X-अक्ष के समान्तर है।**

**(b) Y-अक्ष के समान्तर है।**

**(c) मूलबिन्दु से जाती है।**

**हल :** रेखा का समीकरण :

$$(k - 3)x - (4 - k^2)y + (k^2 - 7k + 6) = 0$$

- **(a)** यदि रेखा $X$-अक्ष के समान्तर है तो रेखा का समीकरण $x$ से मुक्त होगा। **[Note]**

अर्थात समीकरण में, $x$ का गुणांक $= 0$

$\Rightarrow \quad k - 3 = 0$

अर्थात $\quad k = 3$ **उत्तर**

- **(b)** यदि रेखा $Y$-अक्ष के समान्तर है तो रेखा का समीकरण $y$ से मुक्त होगा। **[Note]**

$\therefore$ समीकरण में, $y$ का गुणांक $= 0 \Rightarrow 4 - k^2 = 0$

$\Rightarrow \quad k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

**उत्तर**

- **(c)** यदि रेखा मूलबिन्दु से होकर जाती है तो समीकरण अचर पद से मुक्त होगा। **[Note]**

अर्थात समीकरण में, अचर पद $= 0$

$\Rightarrow \quad k^2 - 7k + 6 = 0 \Rightarrow (k - 1)(k - 6) = 0$

अत: $\quad k = 1$ अथवा $k = 6$ **उत्तर**

**प्रश्न 2. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अन्त:खण्डों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और – 6 है।**

**हल :** माना रेखा का समीकरण : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \quad \ldots(1)$

स्पष्ट है कि उक्त रेखा द्वारा $X$-अक्ष तथा $Y$-अक्ष पर काटे गए अन्त: खण्ड क्रमशः $a$ तथा $b$ हैं।

दिया है कि $a + b = 1$ तथा $ab = -6$

$\therefore \quad (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$\Rightarrow \quad (a - b)^2 = 1^2 - 4 \times (-6)$

$\Rightarrow \quad (a-b)^2 = 1 + 24 = 25$

$\Rightarrow \quad a - b = \pm 5$

समीकरणों $a + b = 1$ तथा $a - b = 5$ को हल करने पर,

$$a = 3 \quad \text{तथा} \quad b = -2$$

समीकरणों $a + b = 1$ तथा $a - b = -5$ को हल करने पर,

$$a = -2 \quad \text{तथा} \quad b = 3$$

समीकरण (1) में $a$ तथा $b$ के मान रखने पर,
अभीष्ट रेखाओं के समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \text{तथा} \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

या $\quad 2x - 3y = 6 \quad$ या $\quad -3x + 2y = 6$

उत्तर

**प्रश्न 3. Y-अक्ष पर कौन से बिन्दु ऐसे हैं, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है।**

**हल :** माना $Y$-अक्ष पर एक बिन्दु $(0, k)$ है, जिसकी दी गई रेखा से दूरी 4 इकाई है।

दी गई रेखा का समीकरण : $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

या $\quad 4x + 3y = 12 \quad$ या $\quad 4x + 3y - 12 = 0$

तब दी गई रेखा से बिन्दु $(0, k)$ की दूरी

$$= \left| \frac{(4 \times 0) + (3 \times k) - 12}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} \right|$$

$$= \frac{|3k - 12|}{5} = 4 \qquad (\text{दिया है, दूरी} = 4)$$

$\Rightarrow \quad |3k - 12| = 20 \quad \Rightarrow \quad 3k - 12 = \pm 20$

$\Rightarrow \quad 3k = 12 \pm 20 \quad$ या $\quad 3k = 32$ या $-8$

$\Rightarrow \quad k = \frac{32}{3} \quad$ या $\quad k = -\frac{8}{3}$

अत: अभीष्ट बिन्दु $= \left(0, \frac{32}{3}\right)$ अथवा $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ उत्तर

**प्रश्न 4. मूलबिन्दु से बिन्दुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दिए गए बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

या $\quad y - \sin\theta = \frac{(\sin\phi - \sin\theta)}{(\cos\phi - \cos\theta)}(x - \cos\theta)$

$\therefore \quad (\cos\phi - \cos\theta)y - (\cos\phi - \cos\theta)\sin\theta$
$= (\sin\phi - \sin\theta)x - \cos\theta(\sin\phi - \sin\theta)$

$\therefore \quad (\cos\phi - \cos\theta)\,y - \sin\theta\cos\phi + \sin\theta\cos\theta$
$= (\sin\phi - \sin\theta)x - \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\theta$

$\therefore \quad (\sin\phi - \sin\theta)x - (\cos\phi - \cos\theta)\,y + \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi = 0$

$\therefore \quad (\sin\phi - \sin\theta)x - (\cos\phi - \cos\theta)\,y + \sin(\theta - \phi) = 0 \quad \ldots(1)$

तब मूलबिन्दु $(0, 0)$ से रेखा (1) की लाम्बिक दूरी

$$= \frac{|(\sin\phi - \sin\theta)\times 0 - (\cos\phi - \cos\theta)\times 0 + \sin(\theta - \phi)|}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\theta)^2 + (\cos\phi - \cos\theta)^2}}$$

$$= \frac{|\sin(\theta - \phi)|}{\sqrt{(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + (\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2(\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta)}}$$

$$= \frac{|\sin(\theta - \phi)|}{\sqrt{2[1 - \cos(\theta - \phi)]}} = \frac{|\sin(\theta - \phi)|}{\sqrt{2.2\sin^2\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)}}$$

$$= \frac{|\sin(\theta - \phi)|}{2\left|\sin\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)\right|} = \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{2\left|\sin\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)\right|}$$

अत: मूलबिन्दु से बिन्दुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लाम्बिक दूरी

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{2\left|\sin\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right)\right|}$$

उत्तर

**प्रश्न 5. रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y = 0$ के प्रतिच्छेद-बिन्दु से खींची गई और Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दी गई रेखाएँ : $x - 7y + 5 = 0 \quad \ldots(1)$

$3x + y = 0 \quad \ldots(2)$

उक्त रेखाओं के प्रतिच्छेद-बिन्दु से जाने वाली रेखा का व्यापक समीकरण

$$(x - 7y + 5) + \lambda(3x + y) = 0$$

या $\quad x + 3\lambda x + \lambda y - 7y + 5 = 0$

या $\quad (1 + 3\lambda)x + (\lambda - 7)y + 5 = 0 \quad \ldots(3)$

उक्त रेखा $Y$-अक्ष के समान्तर है तो समीकरण (3) में $y$ का गुणांक $= 0$ **[Note]**

$\Rightarrow \quad \lambda - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 7$

$\lambda$ का मान समीकरण (3) में रखने पर,
अभीष्ट समान्तर रेखा का समीकरण $22x + 5 = 0$ अथवा $x = \frac{-5}{22}$

उत्तर

**प्रश्न 6.** **रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ पर उस बिन्दु से खींची गई लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ यह रेखा Y-अक्ष से मिलती है।**

**हल** : दी हुई रेखा का समीकरण :

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \quad \text{या} \quad 3x+2y=12 \qquad \ldots(1)$$

स्पष्ट है कि उक्त रेखा $Y$-अक्ष से बिन्दु (0, 6) पर मिलती है।

माना रेखा (1) पर लम्ब रेखा का समीकरण :

$$2x-3y=\lambda \qquad \ldots(2)$$

यदि उक्त रेखा बिन्दु (0, 6) से होकर जाती है तो

$$2\times 0-3\times 6=\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=-18$$

समीकरण (2) में $\lambda$ का मान रखने पर,

अभीष्ट रेखा का समीकरण निम्नलिखित है :

$$2x-3y=-18 \quad \text{या} \quad 2x-3y+18=0$$

**उत्तर**

**प्रश्न 7.** **रेखाओं $y-x=0$, $x+y=0$ और $x-k=0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**

**हल** : दी गई रेखाओं के समीकरण :

$$y-x=0 \qquad \ldots(1)$$
$$x+y=0 \qquad \ldots(2)$$
$$x-k=0 \qquad \ldots(3)$$

उक्त समीकरणों को परस्पर हल करने पर

रेखा (1) व रेखा (2) का प्रतिच्छेद-बिन्दु = (0, 0)

रेखा (1) व रेखा (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु = $(k, k)$

रेखा (2) व रेखा (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु $(k, -k)$

$\therefore$ त्रिभुज के शीर्ष :

$$A(0, 0), B=(k, k), C=(k, -k)$$
$$x_1=0, y_1=0; x_2=k, y_2=k;$$
$$x_3=k, y_3=-k$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1) - (y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)]$$

$$= \frac{1}{2}[\{(0\times k)+(k\times -k)+(k\times 0)\} - \{(0\times k)+(k\times k)+(-k\times 0)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[(0-k^2+0)-(0+k^2+0)]$$

$$= \frac{1}{2}(-2k^2) = -k^2$$

$= k^2$ (क्षेत्रफल सदैव धनात्मक होगा)

अत: $\Delta$ का क्षेत्रफल $= k^2$ वर्ग इकाई **उत्तर**

**प्रश्न 8.** **p का मान ज्ञात कीजिए जिसमें तीन रेखाएँ $3x+y-2=0$, $px+2y-3=0$ और $2x-y-3=0$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।**

**हल** : दी गई रेखाओं के समीकरण :

$$3x+y-2=0 \qquad \ldots(1)$$
$$px+2y-3=0 \qquad \ldots(2)$$
$$2x-y-3=0 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व समीकरण (3) को जोड़ने पर,

$$5x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

अब समीकरण (1) में $x=1$ रखने पर,

$$(3\times 1)+y-2=0 \quad \Rightarrow \quad y=-1$$

अत: रेखा (1) व रेखा (3) का प्रतिच्छेद-बिन्दु = (1, − 1)

यदि तीनों रेखाएँ एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो रेखा (2) भी प्रतिच्छेद-बिन्दु (1, − 1) से जाएगी।

$\therefore$ $p(1)+(2\times -1)-3=0$

$\therefore$ $p-2-3=0 \Rightarrow p=5$

अत: $p$ का मान = 5 **उत्तर**

**प्रश्न 9.** **यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ और $y=m_3x+c_3$ हैं, संगामी हैं तो दिखाइए कि $m_1(c_2-c_3)+m_2(c_3-c_1)+m_3(c_1-c_2)=0$.**

**हल** : दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$m_1x-y+c_1=0$$
$$m_2x-y+c_2=0$$

तथा
$$m_3x-y+c_3=0$$

$\because$ उक्त रेखाएँ संगामी हैं,

$$\therefore \begin{vmatrix} m_1 & -1 & c_1 \\ m_2 & -1 & c_2 \\ m_3 & -1 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow m_1(-c_3+c_2)-m_2(-c_3+c_1)+m_3(-c_2+c_1)=0$$

$$\Rightarrow m_1(c_2-c_3)+m_2(c_3-c_1)+m_3(c_1-c_2)=0$$

**Proved.**

**प्रश्न 10.** **बिन्दु (3, 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x-2y=3$ से 45° का कोण बनाती है।**

**हल** : $\because$ दी गई रेखा का समीकरण : $x-2y=3$

$$\therefore \text{ दी गई रेखा की ढाल } m = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

$$= -\left(\frac{1}{-2}\right)=\frac{1}{2}$$

जबकि अभीष्ट रेखा दी गई रेखा से $\theta=45°$ का कोण बनाती है तथा बिन्दु $(x_1, y_1)\equiv(3, 2)$ से जाती है, अत:

सूत्र $y-y_1=\dfrac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}(x-x_1)$ से

रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$y-2=\frac{\frac{1}{2}\pm\tan 45^\circ}{1\mp\frac{1}{2}\tan 45^\circ}(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{1}{2}\pm 1}{1\mp\frac{1}{2}\times 1}(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad y-2=\frac{1\pm 2}{2\mp 1}(x-3)$$

$$\Rightarrow \quad y-2=\frac{1+2}{2-1}(x-3)$$

तथा $\quad y-2=\frac{1-2}{2+1}(x-3)$

$\Rightarrow \quad y-2=3(x-3)$

तथा $\quad y-2=-\frac{1}{3}(x-3)$

$\Rightarrow \quad y-2=3x-9$

तथा $\quad 3y-6=-x+3$

$\Rightarrow \quad 3x-y=7$

तथा $\quad x+3y=9$

अत: अभीष्ट रेखा का समीकरण :

$3x-y=7$ तथा $x+3y=9$ उत्तर

**प्रश्न 11. रेखाओं $4x+7y-3=0$ और $2x-3y+1=0$ के प्रतिच्छेद-बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अन्त:खण्ड बनाती है।**

**हल :** माना रेखाओं $4x+7y-3=0$ तथा $2x-3y+1=0$ के प्रतिच्छेद-बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण :

$$(4x+7y-3)+\lambda(2x-3y+1)=0 \quad \ldots(1)$$

$\Rightarrow \quad (4+2\lambda)x+(7-3\lambda)y+(-3+\lambda)=0$

$\Rightarrow \quad (4+2\lambda)x+(7-3\lambda)y=3-\lambda$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{4+2\lambda}{3-\lambda}\right]x+\left[\frac{7-3\lambda}{3-\lambda}\right]y=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{3-\lambda}{4+2\lambda}}+\frac{y}{\frac{3-\lambda}{7-3\lambda}}=1$$

$\therefore$ रेखा (1) द्वारा $X$-अक्ष पर काटा गया अन्त: खण्ड

$$=\frac{3-\lambda}{4+2\lambda}$$

तथा $Y$-अक्ष पर काटा गया अन्त: खण्ड $=\frac{3-\lambda}{7-3\lambda}$

यदि रेखा (1) अक्षों पर समान अन्त:खण्ड काटती है तो

$$\frac{3-\lambda}{4+2\lambda}=\frac{3-\lambda}{7-3\lambda}$$

$\Rightarrow \quad (3-\lambda)(7-3\lambda)=(3-\lambda)(4+2\lambda)$

$\Rightarrow \quad (3-\lambda)(7-3\lambda)-(3-\lambda)(4+2\lambda)=0$

$\Rightarrow \quad (3-\lambda)(7-3\lambda-4-2\lambda)=0$

$\Rightarrow \quad (3-\lambda)(3-5\lambda)=0$

यदि $3-\lambda=0$ है तो $\quad \lambda=3$

यदि $3-5\lambda=0$ है तो $\quad \lambda=\frac{3}{5}$

परन्तु $\lambda=3$ अमान्य है क्योंकि तब रेखा (1) अक्षों पर कोई अन्त:खण्ड नहीं काटती है। **[Note]**

इसलिए $\quad \lambda=\frac{3}{5}$

समीकरण (1) में $\lambda$ का मान रखने पर,

अभीष्ट रेखा का समीकरण :

$$(4x+7y-3)+\frac{3}{5}(2x-3y+1)=0$$

$\Rightarrow \quad 5(4x+7y-3)+3(2x-3y+1)=0$

$\Rightarrow \quad 26x+26y=12$

$\Rightarrow \quad 13x+13y=6$

उत्तर

**प्रश्न 12. दर्शाइए कि मूलबिन्दु से जाने वाली और रेखा $y=mx+c$ से $\theta$ कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण $\frac{y}{x}=\pm\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$ है।**

**हल :** दी हुई रेखा की प्रवणता $=m$

माना दी हुई रेखा से कोण $\theta$ बनाने वाली रेखा की प्रवणता $m_1$ है।

तब, $\quad \tan\theta=\left|\frac{m-m_1}{1+m\,m_1}\right|$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-m_1}{1+m\,m_1}=\pm\tan\theta$$

$\Rightarrow \quad m-m_1=\pm\tan\theta\pm m\,m_1\tan\theta$

$\Rightarrow \quad m\mp\tan\theta=m_1(1\pm m\tan\theta)$

$$\Rightarrow \quad m_1=\frac{m\mp\tan\theta}{1\pm m\tan\theta}=\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$$

अत: अभीष्ट रेखाओं के समीकरण :

$$y-y_1=\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}(x-x_1)$$

**Proved.**

**प्रश्न 13. (– 1, 1) और (5, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को रेखा $x+y=4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?**

**हल :** माना रेखा $x+y=4$, बिन्दुओं $A(-1,\ 1)$ तथा $B(5,\ 7)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $C$ पर $m:1$ के अनुपात में विभाजित करती है, तब

बिन्दु $C$ के निर्देशांक

$$= \left[\frac{m \times 5 + 1 \times (-1)}{m+1}, \frac{m \times 7 + 1 \times 1}{m+1}\right]$$

$$= \left[\frac{5m-1}{m+1}, \frac{7m+1}{m+1}\right]$$

परन्तु बिन्दु $C$, रेखा $x + y = 4$ पर स्थित है।

$$\therefore \quad \frac{5m-1}{m+1} + \frac{7m+1}{m+1} = 4$$

$$\Rightarrow \quad 5m - 1 + 7m + 1 = 4m + 4$$

$$\Rightarrow \quad 8m = 4 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

अत: दी हुई रेखा दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $\frac{1}{2} : 1$ अर्थात $1 : 2$ के अनुपात में अन्त: विभाजित करती है। **उत्तर**

**प्रश्न 14. बिन्दु (1, 2) से रेखा 4 x + 7 y + 5 = 0 की 2 x − y = 0 के अनुदिश, दूरी ज्ञात कीजिए।**

**हल** : दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$4x + 7y + 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

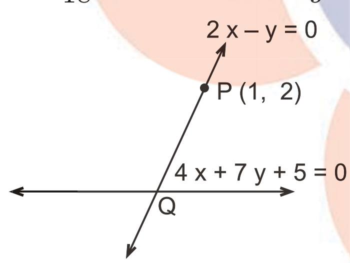
तथा

$$2x - y = 0 \quad \ldots(2)$$

स्पष्ट है कि रेखा (2), बिन्दु $P(1, 2)$ से होकर जाती है।

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$$x = \frac{-5}{18} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{-5}{9}$$




$\therefore$ रेखाओं (1) तथा (2) के प्रतिच्छेद-बिन्दु $Q$ के निर्देशांक

$$= \left[\frac{-5}{18}, \frac{-5}{9}\right]$$

चित्र से स्पष्ट है कि बिन्दु $P$ से प्रथम रेखा की, दूसरी रेखा के अनुदिश नापी गई दूरी $PQ$ है।

अत: अभीष्ट दूरी

$$= PQ = \sqrt{\left[\frac{-5}{18} - 1\right]^2 + \left[\frac{-5}{9} - 2\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{-23}{18}\right]^2 + \left[\frac{-23}{9}\right]^2}$$

$$= \frac{23\sqrt{1+4}}{18} = \frac{23\sqrt{5}}{18} \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

**प्रश्न 15. बिन्दु (− 1, 2) से खींची जा सकने वाली रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा x + y = 4 से प्रतिच्छेद-बिन्दु दिए बिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है।**

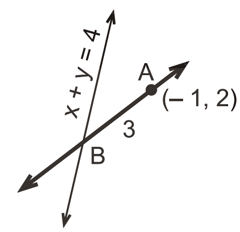
**हल** : माना अभीष्ट रेखा $AB$, $X$-अक्ष से कोण $\theta$ बनाती है।

$\because$ रेखा $AB$ बिन्दु $A(-1, 2)$ से होकर जाती है,

$\therefore$ रेखा $AB$ पर बिन्दु $A$ से 3 इकाई दूरी पर स्थित

बिन्दु $B$ के निर्देशांक $= (x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$

$$= (-1 + 3\cos\theta, 2 + 3\sin\theta)$$




यदि बिन्दु $B$, रेखा $x + y = 4$ पर स्थित है तो

$$(-1 + 3\cos\theta) + (2 + 3\sin\theta) = 4$$

$$\Rightarrow \quad 3\cos\theta + 3\sin\theta = 3$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta + \sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad (\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta.\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \sin 2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\theta = 0 \quad \text{अथवा} \quad 2\theta = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \text{अथवा} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

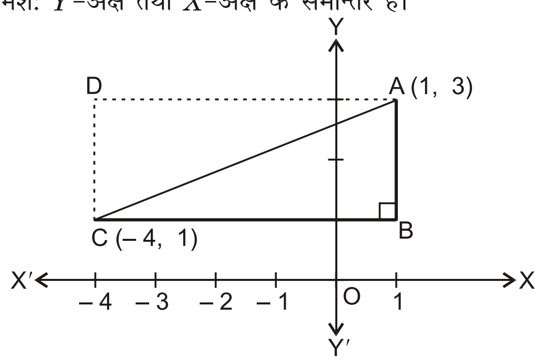
अत: अभीष्ट रेखा $X$-अक्ष के अथवा $Y$-अक्ष के समान्तर है। **उत्तर**

**प्रश्न 16. समकोण त्रिभुज के कर्ण के अन्त्य बिन्दु (1, 3) और (−4, 1) हैं। त्रिभुज के पाद (legs) ( समकोणीय भुजाओं ) के समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के समान्तर हैं।**

**हल** : माना $ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90°$ तथा कर्ण $AC$ है।

माना $A \equiv (1, 3)$ तथा $C \equiv (-4, 1)$

यहाँ $AB$ तथा $BC$ समकोण बनाने वाली भुजाएँ हैं, जो क्रमश: $Y$-अक्ष तथा $X$-अक्ष के समान्तर हैं।



बिन्दु $C(-4, 1)$ से जाने वाली तथा $X$-अक्ष के समान्तर भुजा $BC$ का समीकरण

$$y = 1$$ **उत्तर**

बिन्दु $A(1, 3)$ से जाने वाली तथा $Y$-अक्ष के समान्तर भुजा $AB$ का समीकरण

$$x = 1$$ **उत्तर**

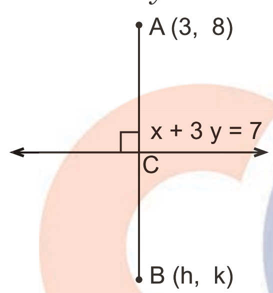
दिए गए प्रतिबन्धों के अधीन एक अन्य त्रिभुज $ADC$ भी बन सकता है, जिसकी भुजाओं के समीकरण

$y = 3$ तथा $x = -4$ होंगे। **उत्तर**

**प्रश्न 17. किसी बिन्दु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिन्दु (3, 8) का रेखा $\mathbf{x + 3y = 7}$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना बिन्दु $A(3, 8)$ का रेखा दर्पण

$$x + 3y = 7 \quad \ldots(1)$$




में प्रतिबिम्ब $B(h, k)$ है, तब रेखा (1), रेखाखण्ड $AB$ का लम्ब समद्विभाजक है।

$\therefore$ रेखाखण्ड $AB$ की प्रवणता $\times$ रेखा (1) की प्रवणता $= -1$

तथा रेखाखण्ड $AB$ का मध्य-बिन्दु $C \equiv \left[\dfrac{h+3}{2}, \dfrac{k+8}{2}\right]$

रेखा (1) पर स्थित है।

अर्थात $$\frac{k-8}{h-3} \times \frac{-1}{3} = -1$$

तथा $$\frac{h+3}{2} + 3 \times \frac{k+8}{2} = 7$$

$\Rightarrow \quad k - 8 = 3h - 9$ या $3h - k = 1 \ldots(2)$

तथा $h + 3 + 3k + 24 = 14$ या $h + 3k = -13 \quad \ldots(3)$

समीकरण (2) तथा (3) को हल करने पर,

$$h = -1 \quad \text{तथा} \quad k = -4$$

अत: अभीष्ट प्रतिबिम्ब $(-1, -4)$ है। **उत्तर**

**प्रश्न 18. यदि रेखाएँ $\mathbf{y = 3x + 1}$ और $\mathbf{2y = x + 3}$, रेखा $\mathbf{y = mx + 4}$ पर समान रूप से आनत हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना रेखा $y = mx + 4$, रेखाओं $y = 3x + 1$ तथा $2y = x + 3$ से कोण $\theta$ बनाती है।

तब, $$\tan\theta = \left|\frac{m-3}{1+3m}\right|$$

तथा $$\tan\theta = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{2}}\right| = \left|\frac{2m-1}{2+m}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{m-3}{1+3m}\right| = \left|\frac{2m-1}{2+m}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-3}{1+3m} = \pm\frac{2m-1}{2+m}$$

$$\Rightarrow \quad m^2 - m - 6 = \pm(6m^2 - m - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 5(m^2 + 1) = 0$$

अथवा $7m^2 - 2m - 7 = 0$

$\Rightarrow \quad 7m^2 - 2m - 7 = 0 \qquad (\because \mathbf{m^2 + 1 \neq 0})$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 7 \times (-7)}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 196}}{2 \times 7} = \frac{4 \pm \sqrt{200}}{2 \times 7}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2 \pm 10\sqrt{2}}{2 \times 7} = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$$ **उत्तर**

**प्रश्न 19. यदि एक चर बिन्दु P (x, y) की रेखाओं $\mathbf{x + y - 5 = 0}$ और $\mathbf{3x - 2y + 7 = 0}$ से लाम्बिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।**

**हल :** दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$x + y - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

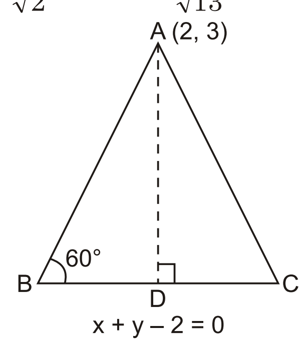
तथा $$3x - 2y + 7 = 0 \quad \ldots(2)$$

माना चर बिन्दु $P$ के निर्देशांक $(h, k)$ हैं।

प्रश्नानुसार : बिन्दु $P$ की रेखा (1) से दूरी + बिन्दु $P$ की रेखा (2) से दूरी = 10

$$\therefore \quad \frac{h + k - 5}{\sqrt{1+1}} + \frac{3h - 2k + 7}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h + k - 5}{\sqrt{2}} + \frac{3h - 2k + 7}{\sqrt{13}} = 10$$



$\Rightarrow\ \sqrt{13}\,.\,(h+k-5)+\sqrt{2}\,.\,(3h-2k+7) = 10\sqrt{26}$

$\Rightarrow\ (13+3\sqrt{2})\,h+(\sqrt{13}-2\sqrt{2})\,k = 10\sqrt{26}+5\sqrt{13}-7\sqrt{2}$

$\therefore$ बिन्दु $P$ का बिन्दुपथ निम्नलिखित है :

$(\sqrt{13}+3\sqrt{2})\,x+(\sqrt{13}-2\sqrt{2})\,y = 10\sqrt{26}+5\sqrt{13}-7\sqrt{2}$

$\because$ उक्त समीकरण एक रैखिक समीकरण है,

$\therefore$ यह एक रेखा निरूपित करता है।

अत: बिन्दु $P$ अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है। **Proved.**

**प्रश्न 20. समान्तर रेखाओं $9x+6y-7=0$ और $3x+2y+6=0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : दी हुई रेखाओं के समीकरण :

$$9x+6y-7=0$$

$$\Rightarrow\quad 3x+2y-\frac{7}{3}=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$3x+2y+6=0 \quad \ldots(2)$$

माना समान्तर रेखाओं (1) तथा (2) से समदूरस्थ रेखा का समीकरण :

$$3x+2y+\lambda=0 \quad \ldots(3)$$

$\therefore$ रेखाओं (1) तथा (3) के बीच की दूरी = रेखाओं (2) तथा (3) के बीच की दूरी

$$\Rightarrow\quad \frac{\left|-\frac{7}{3}-\lambda\right|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|6-\lambda|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \left|-\left[\frac{7}{3}+\lambda\right]\right| = |6-\lambda|$$

$$\Rightarrow\quad \frac{7}{3}+\lambda = \pm(6-\lambda)$$

परन्तु उक्त के दाएँ पक्ष में ऋण चिह्न लेने पर $\frac{7}{3}=-6$ प्राप्त होता है जो अर्थहीन है।

इसलिए $\quad \frac{7}{3}+\lambda = 6-\lambda$

$$\Rightarrow\quad 2\lambda=\frac{11}{3} \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{11}{6}$$

समीकरण (3) में $\lambda$ का मान रखने पर,

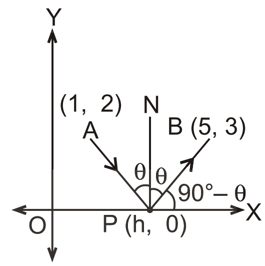
अभीष्ट रेखा का समीकरण :

$$3x+2y+\frac{11}{6}=0$$

$$\Rightarrow\quad 18x+12y+11=0$$ उत्तर

**प्रश्न 21. बिन्दु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण X-अक्ष के बिन्दु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिन्दु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।**

**हल** : माना $P$ पर अभिलम्ब $PN$ तथा $P$ के निर्देशांक $(h,\ 0)$ हैं।




$\because$ **आपतन कोण = परावर्तन कोण**

$\therefore\quad \angle APN = \angle BPN = \theta$ (माना)

$\Rightarrow\ \angle APX = \angle NPX + \angle APN = 90^\circ+\theta$

तथा $\angle BPX = \angle NPX - \angle BPN = 90^\circ-\theta$

$\therefore\quad \tan(90^\circ+\theta) = PA$ की प्रवणता

$$\Rightarrow\quad -\cot\theta = \frac{2-0}{1-h} \quad \text{या} \quad \cot\theta=\frac{2}{h-1}$$

तथा $\quad \tan(90^\circ-\theta) = PB$ की प्रवणता

$$\Rightarrow\quad \cot\theta = \frac{3-0}{5-h} = \frac{3}{5-h}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{h-1} = \frac{3}{5-h}$$

$$\Rightarrow\quad 3h-3 = 10-2h$$

$$\Rightarrow\quad 5h=13$$

$$\Rightarrow\quad h=\frac{13}{5}$$

अत: $P$ के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5},\ 0\right)$ हैं। उत्तर

**प्रश्न 22. दिखाइए कि बिन्दुओं $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ और $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ पर खींचे गए लम्बों की लम्बाइयों का गुणनफल $b^2$ है।**

**हल** : रेखा का समीकरण : $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$

या $$b\,x\cos\theta+a\,y\sin\theta-ab=0$$

अत: अभीष्ट गुणनफल

$$= \frac{b\times\sqrt{a^2-b^2}\times\cos\theta+0-ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} \times \frac{-b\times\sqrt{a^2-b^2}\times\cos\theta-ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{b[\sqrt{a^2 - b^2}.\cos\theta - a] \times (-b)}{[\sqrt{a^2 - b^2}.\cos\theta + a]} \Big/ \left(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{b^2 (a^2 - a^2 \cos^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}{b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}$$

$$= \frac{b^2 [a^2(1 - \cos^2\theta) + b^2 \cos^2\theta]}{b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}$$

$$= \frac{b^2(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)}{b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta} = b^2$$ **Proved.**

**प्रश्न 23. एक व्यक्ति समीकरणों $2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 5 = 0$ से निरूपित सरल रेखीय पथों के सन्धि बिन्दु (junction/crossing) पर खड़ा है और समीकरण $6x - 7y + 8 = 0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

**हल** : सरल रेखीय पथों के समीकरण :

$$2x - 3y + 4 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$3x + 4y - 5 = 0 \quad \ldots(2)$$

तथा $$6x - 7y + 8 = 0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$$x = \frac{-1}{17} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{22}{17}$$

$\therefore$ रेखाओं (1) तथा (2) के प्रतिच्छेद-बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left[\frac{-1}{17}, \frac{22}{17}\right]$$

उक्त वह सन्धि-बिन्दु है जिस पर व्यक्ति खड़ा है।

यदि व्यक्ति सन्धि-बिन्दु से समीकरण (3) से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है तो व्यक्ति को सन्धि-बिन्दु से जाने वाली उस रेखा पर चलना चाहिए जो रेखा (3) पर लम्ब है। **[Note]**

माना रेखा (3) पर लम्ब रेखा का समीकरण :

$$7x + 6y = \lambda \quad \ldots(4)$$

यदि उक्त रेखा सन्धि-बिन्दु से होकर जाती है तो

$$7 \times \frac{-1}{17} + 6 \times \frac{22}{17} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-7 + 132}{17} = \frac{125}{17}$$

समीकरण (4) में $\lambda$ का मान रखने पर,

व्यक्ति द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण निम्नलिखित है :

$$7x + 6y = \frac{125}{17} \quad \text{या} \quad 119x + 102y = 125$$ **उत्तर**

❐