01 वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825
(iv) 5005 (v) 7429 [NCERT EXERCISE]

हल : (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$= (2)^2 \times 5 \times 7$

2	140
2	70
5	35
	7 = अभाज्य संख्या

अत: $\mathbf{140 = 2^2 \times 5 \times 7}$ **उत्तर**

● **(ii)** $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$= (2)^2 \times 3 \times 13$

2	156
2	78
3	39
	13 = अभाज्य संख्या

अत: $\mathbf{156 = 2^2 \times 3 \times 13}$ **उत्तर**

● **(iii)** $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$= (3)^2 \times (5)^2 \times 17$

3	3825
3	1275
5	425
5	85
	17 = अभाज्य संख्या

अत: $\mathbf{3825 = 3^2 \times 5^2 \times 17}$ **उत्तर**

● **(iv)** $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

5	5005
7	1001
11	143
	13 = अभाज्य संख्या

अत: $\mathbf{5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13}$ **उत्तर**

● **(v)** $7429 = 17 \times 19 \times 23$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

17	7429
19	437
	23 = अभाज्य संख्या

अत: $\mathbf{7429 = 17 \times 19 \times 23}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

(i) 26 और 91 [NCERT EXERCISE]
(ii) 510 और 92 [NCERT EXERCISE]
(iii) 336 और 54 [NCERT EXERCISE]

हल : (i) $26 = 2^1 \times 13^1$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

तथा $91 = 7^1 \times 13^1$

26 और 91 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 13^1 = 13$

और 26 और 91 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में)

गुणनफल $= 2^1 \times 7^1 \times 13^1$
$= 2 \times 7 \times 13 = 182$

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 13** तथा **लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 182**

$\because$ संख्याओं का गुणनफल $= 26 \times 91 = 2366$

और H.C.F. × L.C.M. $= 13 \times 182 = 2366$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M.**

Proved.

● **(ii)** $92 = 2 \times 2 \times 23 = 2^2 \times 23^1$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

तथा $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$
$= 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1$

2	510
3	255
5	85
	17 = अभाज्य संख्या

92 और 510 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 2^1 = 2$

तथा 92 और 510 के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल

$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 17^1 \times 23^1$

$= 23460$

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 2** तथा **लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 23460**

$\because$ संख्याओं का गुणनफल $= 92 \times 510 = 46920$

और $\quad$ H.C.F. $\times$ L.C.M. $= 2 \times 23460 = 46920$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M.**

Proved.

● **(iii)** $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$= 2^4 \times 3^1 \times 7^1$

2	336
2	168
2	84
2	42
3	21
	7 = अभाज्य संख्या

तब, दोनों संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में)

गुणनफल $= 2^1 \times 3^1 = 6$

और दोनों संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में)

गुणनफल $= 2^4 \times 3^3 \times 7 = 16 \times 27 \times 7$

$= 3024$

अत: **महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 6** तथा **लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 3024**

$\because$ संख्याओं का गुणनफल $= 54 \times 336 = 18144$

और $\quad$ H.C.F. $\times$ L.C.M. $= 6 \times 3024 = 18144$

अत: **संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M.**

Proved.

प्रश्न 3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 **[NCERT EXERCISE]**

(ii) 17, 23 और 29 **[NCERT EXERCISE]**

(iii) 8, 9 और 25 **[NCERT EXERCISE]**

हल : (i) $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$15 = 3 \times 5 = 3^1 \times 5^1$

और $\quad 21 = 3 \times 7 = 3^1 \times 7^1$

संख्याओं के सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 3^1 = 3$

और संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

$= 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

अत: **म० स० (H.C.F.) = 3**

तथा **ल० स० (L.C.M.) = 420** **उत्तर**

● **(ii)** $17 = 1 \times 17 = 1 \times 17^1$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$23 = 1 \times 23 = 1 \times 23^1$

और $\quad 29 = 1 \times 29 = 1 \times 29^1$

सभी संख्याओं के सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 1$

और सभी संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 17^1 \times 23^1 \times 29^1$

$= 17 \times 23 \times 29$

$= 11339$

अत: **म० स० (H.C.F.) = 1**

तथा **ल० स० (L.C.M.) = 11339** **उत्तर**

● **(iii)** $8 = 2 \times 2 \times 2 = 1 \times 2^3$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$9 = 3 \times 3 = 1 \times 3^2$

और $\quad 25 = 5 \times 5 = 1 \times 5^2$

$\because$ 1 के अतिरिक्त सभी संख्याओं का कोई सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है जिससे म० स० = 1

और ल० स० $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 8 \times 9 \times 25$

$= 1800$

अत: **म० स० (H.C.F.) = 1**

तथा ल० स० **(L.C.M.) = 1800** **उत्तर**

प्रश्न 4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए। [बोर्ड प्रतिदर्श 2019, NCERT EXERCISE]

हल : $\because$ H.C.F. (306, 657) = 9

$\Rightarrow$ 306 और 657 का H.C.F. = 9

सूत्र : **संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M. से,**

$\therefore \quad 306 \times 657 = 9 \times$ L.C.M.

$\therefore \quad$ L.C.M. $= \dfrac{306 \times 657}{9} = 306 \times 73$

$= 22338$

अत: **L.C.M. = 22338** **उत्तर**

प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है?

[NCERT EXERCISE]

हल : यदि 6^n (जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है) का मान एक ऐसी संख्या है जिसमें इकाई का अंक शून्य है तो 6^n, 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore \quad 6^n = (2 \times 3)^n$ जिसका आशय है कि 6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 या 3 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है।

$\therefore \quad 6^n$ का कोई गुणनखण्ड 5 नहीं हो सकता।

अतः 6^n **, अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकती।** **उत्तर**

प्रश्न 6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं? **[NCERT EXERCISE]**

हल : $\because 7 \times 11 \times 13 + 13 = 1001 + 13$

$= 1014$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

$= 2 \times 3 \times 13 \times 13$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1014 \\ \hline 3 & 507 \\ \hline 13 & 169 \\ \hline & 13 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

$\because$ दी हुई संख्या $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल $(2 \times 3 \times 13 \times 13)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अतः **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ एक भाज्य संख्या है।**

इसी प्रकार,

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5 = 5040 + 5$

$= 5045$

$= 5 \times 1009$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5045 \\ \hline & 1009 = \text{अभाज्य संख्या} \end{array}$$

$\because$ दी गई संख्या $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ को 5×1009 अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

अतः **संख्या $(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5)$ अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार भाज्य है।** **उत्तर**

प्रश्न 7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे? **[NCERT EXERCISE]**

हल : सोनिया और रवि जिस स्थान से चले थे उसी स्थान पर पुनः मिलने के लिए उन्हें वह समय चाहिए जो 12 मिनट और 18 मिनट दोनों समयों का एक ही गुणज हो और न्यूनतम हो। इसके लिए हमें 12 और 18 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) ज्ञात करना होगा।

$12 = 2 \times 2 \times 3 = (2)^2 \times 3$

[अभाज्य गुणनखण्ड विधि से]

तथा $\mathbf{18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times (3)^2}$

दोनों संख्याओं में अभाज्य गुणनखण्ड 2 की अधिकतम घात का अभाज्य गुणनखण्ड $= (2)^2$

और दोनों संख्याओं में अभाज्य गुणनखण्ड 3 की अधिकतम घात का अभाज्य गुणनखण्ड $= (3)^2$

$\therefore$ लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) $= (2)^2 \times (3)^2 = 4 \times 9$

$= 36$

अतः **वे 36 मिनट बाद पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।** **उत्तर**

? प्रश्नावली | 1.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **[NCERT EXERCISE]**

हल : कल्पना कीजिए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है।

तब, $\sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ तथा p व q पूर्ण संख्याएँ हैं।

माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

अब, $\because \quad \sqrt{5} = \dfrac{p}{q}$

$\therefore \quad p = \sqrt{5}\, q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\quad p^2 = 5\,q^2$

$\therefore \quad p^2$, संख्या 5 से विभाज्य है।

$\therefore$ **p भी संख्या 5 से विभाज्य है।**

अब, $\because$ p, 5 से विभाज्य है, तब माना कि $p = 5\,r$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $\quad p^2 = 25\,r^2$

परन्तु हमें यह भी ज्ञात है कि $\quad p^2 = 5\,q^2$

$\therefore \quad 5\,q^2 = 25\,r^2$ या $q^2 = 5\,r^2$

तब, q^2, 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ **q भी 5 से विभाज्य होगा।**

$\because$ p भी 5 से विभाज्य है और q भी 5 से विभाज्य है।

$\therefore$ 5, p और q का सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड है (जो 1 के अतिरिक्त है)।

यह एक विरोधाभास है क्योंकि हमारी मान्यता के अनुसार p और q में (1 के अतिरिक्त) कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

$\therefore$ यह संकेत करता है कि हमारी कल्पना "**$\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है" असंगत एवं त्रुटिपूर्ण है।**

अतः **$\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **[NCERT EXEMPLAR]**

हल : कल्पना कीजिए कि $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है, तब, $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ तथा p और q धन पूर्णांक हैं।

$$\because \quad \sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{p}{q}-\sqrt{3}\right)^2=(\sqrt{5})^2$$

(दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$$\because \quad \frac{p^2}{q^2}+3-\frac{2p}{q}\sqrt{3}=5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2}-2=\frac{2p}{q}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2-2q^2}{q^2}=\frac{2p}{q}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2-2q^2}{2pq}=\sqrt{3}$$

चूँकि 2, p और q पूर्णांक है इसलिए $\frac{p^2-2q^2}{2pq}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

यह इस तथ्य का विरोध करता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है।

अतः **$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

[NCERT EXERCISE]

हल : (i) माना दी गई संख्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय है।

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{p}{q}$$

[जहाँ $q \neq 0$ और p तथा q धन पूर्णांक हैं]

माना p और q में 1 के अतिरिक्त कोई सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है।

$$\because \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2=2p^2$$

$\therefore$ q^2, 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ **q भी 2 से विभाज्य है।**

तब, माना $q=2r$

$\therefore$ $q^2=4r^2$ [दोनों पक्षों का वर्ग करने पर]

$\because$ $q^2=4r^2$ और $q^2=2p^2$

$\Rightarrow$ $2p^2=4r^2$ $\Rightarrow$ $p^2=2r^2$

$\therefore$ p^2, संख्या 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ **p भी 2 से विभाज्य है।**

तब, p व q दोनों 2 से विभाज्य हैं।

$\therefore$ p व q में 1 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखण्ड 2 भी सार्वनिष्ठ है जो कि हमारी मान्यता के विपरीत है। इस विरोधाभास का कारण हमारी मान्यता कि "$\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय है" का असंगत एवं त्रुटिपूर्ण होना है।

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय नहीं है।

अतः **$\frac{1}{\sqrt{2}}$ अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

- **(ii)** कल्पना कीजिए कि संख्या $7\sqrt{5}$ परिमेय है।

तब, $7\sqrt{5}=\frac{p}{q}$ होना चाहिए।

[जहाँ $q \neq 0$ और p तथा q धन पूर्णांक हैं]

$$\because \quad \frac{p}{q}=7\sqrt{5} \quad \text{या} \quad \frac{1}{7}\cdot\frac{p}{q}=\sqrt{5}$$

$\because$ $\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है तो $\frac{1}{7}\cdot\frac{p}{q}$ भी परिमेय संख्या होगी।

$\because$ $\frac{1}{7}\cdot\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या है, तब $\frac{1}{7}\cdot\frac{p}{q}=\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी।

अब, $\sqrt{5}$ भी परिमेय संख्या है।

परन्तु यह तथ्य सर्वमान्य है कि $\sqrt{5}$ परिमेय नहीं है। यहाँ एक विरोधाभास है जिसका कारण हमारी मान्यता कि "संख्या $7\sqrt{5}$ परिमेय है" ही है जो असंगत और त्रुटिपूर्ण है।

अतः **$7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।** **Proved.**

- **(iii)** कल्पना कीजिए कि संख्या $6+\sqrt{2}$ परिमेय है।

तब, $6+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ होना चाहिए।

[जहाँ $q \neq 0$ तथा p और q धन पूर्णांक हैं]

$$\because \quad 6+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

$\Rightarrow$ $$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - 6$$

$\because$ $\frac{p}{q}$ परिमेय है अतः $\left(\frac{p}{q} - 6\right)$ भी परिमेय होगी।

$\because$ $\left(\frac{p}{q} - 6\right) = \sqrt{2}$ तथा $\left(\frac{p}{q} - 6\right)$ परिमेय है।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या है।

परन्तु यह तथ्य कि ''$\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है'' असंगत एवं त्रुटिपूर्ण तथा अमान्य है जिसके लिए हमारे द्वारा की गई गलत कल्पना ही उत्तरदायी है।

$\therefore$ संख्या $6 + \sqrt{2}$ परिमेय नहीं हो सकती।

अतः **संख्या $6 + \sqrt{2}$ अपरिमेय होगी।** **Proved.**