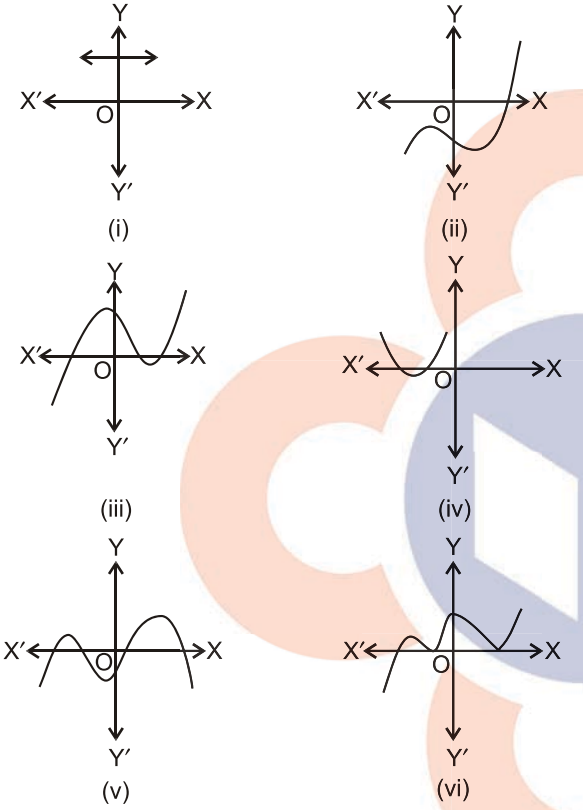
02

बहुपद
(Polynomials)

प्रश्नावली | 2.1

प्रश्न 1. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**



हल : दिया हुआ बहुपद $= p(x)$

- **(i)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या शून्य** है क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को प्रतिच्छेदित नहीं करता है। **उत्तर**
- **(ii)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या 1** है क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को केवल एक स्थान पर काटता है। **उत्तर**
- **(iii)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या 3** है क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को तीन बिन्दुओं पर काटता है। **उत्तर**
- **(iv)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या 2** है क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है। **उत्तर**
- **(v)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या 4 है** क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को चार बिन्दुओं पर काटता है। **उत्तर**
- **(vi)** बहुपद $p(x)$ के लिए **शून्यकों की संख्या 3** है क्योंकि बहुपद का ज्यामितीय आलेख X-अक्ष को दो बिन्दुओं पर स्पर्श करता है तथा एक बिन्दु पर काटता है। **उत्तर**

प्रश्नावली | 2.2

प्रश्न 1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $x^2 - 2x - 8$ **[NCERT EXERCISE]**

(ii) $4s^2 - 4s + 1$ **[NCERT EXERCISE]**

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$ **[NCERT EXERCISE]**

(iv) $4u^2 + 8u$ **[NCERT EXERCISE]**

(v) $t^2 - 15$ **[NCERT EXERCISE]**

(vi) $3x^2 - x - 4$ **[2019, NCERT EXERCISE]**

हल : (i) दिया हुआ बहुपद $= x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - (4 - 2)x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x - 4)(x + 2)$

$\therefore \quad x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$

जब बहुपद $x^2 - 2x - 8 = 0$ हो तो $(x - 4)(x + 2)$ भी शून्य होगा जिसका अर्थ है कि

या तो $x - 4 = 0$ या फिर $x + 2 = 0$

यदि $x - 4 = 0$ तो $x = 4$ और यदि $x + 2 = 0$ तो $x = -2$

अत: **बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक** $= 4$ व -2 **उत्तर**

बहुपद $x^2 - 2x - 8$ की तुलना बहुपद $ax^2 + bx + c$ से करने पर,

$a = 1, \quad b = -2 \quad$ तथा $\quad c = -8$

तब, **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों में सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= 4 + (-2) = 4 - 2$

$= \frac{2}{1} = (-1)\frac{(-2)}{1}$

$= (-1)\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$

और शून्यकों का गुणनफल $= 4 \times (-2) = -8$

$= \frac{(-8)}{1} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच के उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

● **(ii)** दिया हुआ बहुपद $= 4s^2 - 4s + 1$

$= (2s)^2 - 2(2s).1 + (1)^2$

$= (2s - 1)^2$

$[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$

$\therefore \quad 4s^2 - 4s + 1 = (2s - 1)^2$

जब बहुपद $4s^2 - 4s + 1 = 0$ हो तो $(2s - 1)^2$ भी शून्य होगा जिसका अर्थ है कि

$(2s - 1)^2 = 0 \Rightarrow (2s - 1) = 0 \Rightarrow 2s = 1$

$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}$

यहाँ बहुपद के दोनों शून्यक समान हैं

अत: **बहुपद $4s^2 - 4s + 1$ के शून्यक $= \frac{1}{2}$ व $\frac{1}{2}$** **उत्तर**

बहुपद $4s^2 - 4s + 1$ की तुलना बहुपद $as^2 + bs + c$ से करने पर,

$a = 4, \quad b = -4 \quad$ तथा $\quad c = 1$

तब, **बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$= \frac{4}{4} = (-1)\frac{(-4)}{4}$

$= (-1)\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$

और शून्यकों का गुणनफल $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के शून्यकों और गुणांकों के बीच उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

● **(iii)** दिया हुआ बहुपद $= 6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - (9 - 2)x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 1)$

$\therefore$ बहुपद $6x^2 - 3 - 7x = (2x - 3)(3x + 1)$

जब बहुपद $6x^2 - 3 - 7x = 0$ हो तो $(2x - 3)(3x + 1)$ भी शून्य होगा जिसका अर्थ है कि या तो $2x - 3 = 0$ या फिर $3x + 1 = 0$

यदि $2x - 3 = 0$ हो तो $\quad 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ और

यदि $3x + 1 = 0$ हो तो $\quad 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

अत: **बहुपद $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक $= \frac{3}{2}$ व $-\frac{1}{3}$** **उत्तर**

अब, बहुपद $6x^2 - 3 - 7x$ की तुलना मानक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ से करने पर,

$a = 6, \quad b = -7 \quad$ तथा $\quad c = -3$

तब, **बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2}$

$= \frac{-2 + 9}{6} = \frac{7}{6}$

$= (-1)\frac{(-7)}{6} = (-1)\frac{b}{a}$

$= -\frac{b}{a}$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{(-3)}{6} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच के उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

● **(iv)** दिया हुआ बहुपद $= 4u^2 + 8u = 4u(u + 2)$

यदि उक्त बहुपद $4u^2 + 8u = 0$ हो तो $4u(u + 2) = 0$ जिसका अर्थ है कि

$4u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$

या फिर $\quad u + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -2$

अत: **बहुपद $4u^2 + 8u$ के शून्यक $= 0$ व -2** **उत्तर**

अब, बहुपद $4u^2 + 8u$ की तुलना मानक द्विघात बहुपद $au^2 + bu + c$ से करने पर,

$a = 4, \quad b = 8 \quad$ तथा $\quad c = 0$

तब, **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों में सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= 0 + (-2) = 0 - 2 = -2$

$= -2 \times \frac{4}{4} = -\frac{8}{4} = -\frac{b}{a}$

और शून्यकों का गुणनफल $= 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{1}$

$= \frac{0}{1} \times \frac{4}{4} = \frac{0}{4} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच के उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

● **(v)** दिया हुआ बहुपद $= t^2 - 15$

जब बहुपद $t^2 - 15 = 0$ हो तो

$t^2 = 15 \quad$ या $\quad t = \pm\sqrt{15}$

अत: **बहुपद $t^2 - 15$ के शून्यक $= +\sqrt{15}$ व $-\sqrt{15}$** **उत्तर**

दिए गए बहुपद $t^2 - 15 = 0$ की तुलना मानक द्विघात बहुपद $at^2 + bt + c$ से करने पर,

$a = 1, \quad b = 0 \quad$ तथा $\quad c = -15$

तब, **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= -\sqrt{15} + \sqrt{15} = 0$

$= \frac{0}{1} = -\frac{0}{1} = -\frac{b}{a}$

और शून्यकों का गुणनफल $= (-\sqrt{15}) \times (\sqrt{15})$

$= -15 = \frac{-15}{1} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

● **(vi)** दिया गया बहुपद $= 3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - (4 - 3)\, x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x\,(3x - 4) + 1\,(3x - 4)$

$\therefore$ $= (3x - 4)\,(x + 1)$

जब बहुपद $3x^2 - x - 4 = 0$ हो तो $(3x - 4)\,(x + 1) = 0$ जिसका अर्थ है कि या तो $3x - 4 = 0$ या फिर $x + 1 = 0$ है।

यदि $3x - 4 = 0$ हो तो फिर $x = \frac{4}{3}$ और

यदि $x + 1 = 0$ हो तो फिर $x = -1$

अत: **बहुपद के शून्यक $= \frac{4}{3}$ व -1** **उत्तर**

अब दिए हुए बहुपद $3x^2 - x - 4$ की तुलना मानक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ से करने पर, $a = 3, b = -1$ तथा $c = -4$

तब, **बहुपद के गुणांकों *a, b, c* और बहुपद के शून्यकों के बीच सम्बन्ध :**

शून्यकों का योगफल $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4}{3} - 1$

$= \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3} = (-1)\,\frac{(-1)}{3}$

$= (-1)\,\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$

और शून्यकों का गुणनफल $= \frac{4}{3} \times (-1) = -\frac{4}{3}$

$= \frac{(-4)}{3} = \frac{c}{a}$

अत: **बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच उपर्युक्त सम्बन्ध सत्य हैं।** **Proved.**

प्रश्न 2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमश: दी गई संख्याएँ हैं :

[NCERT EXERCISE]

(i) $\frac{1}{4}, -1$ **(ii)** $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ **(iii)** $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ **(v)** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ **(vi)** $4, 1$

हल : (i) माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग

$= \alpha + \beta$ तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग $\frac{1}{4}$ तथा गुणनफल -1 है।

$\therefore$ $(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}$ और $\alpha\beta = -1$ ...(1)

तब, द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)\,(x - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - \frac{1}{4}\, x + (-1)$

[समीकरण (1) से]

$= \frac{4x^2 - x - 4}{4} = k\,(4x^2 - x - 4)$

अत: **अभीष्ट बहुपद $4x^2 - x - 4$ या $k\,(4x^2 - x - 4)$** है, जहाँ $k = \frac{1}{4}$ एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर

● **(ii)** माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= \alpha + \beta$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि बहुपद के शून्यकों का योगफल $\sqrt{2}$ तथा गुणनफल $\frac{1}{3}$ है।

$\therefore$ $\alpha + \beta = \sqrt{2}$ तथा $\alpha\beta = \frac{1}{3}$

तब, द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)\,(x - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}\,(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$

$\equiv k\,(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$

अत: **अभीष्ट बहुपद $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ या $k\,(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$ है,** जहाँ $k = \frac{1}{3}$ एक वास्तविक संख्या है। **उत्तर**

● **(iii)** माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= (\alpha + \beta)$

और शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग 0 तथा गुणनफल $\sqrt{5}$ है।

तब, $\alpha + \beta = 0$ तथा $\alpha\beta = \sqrt{5}$

तब, द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)\,(\alpha - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - 0 \,.\, x + \sqrt{5}$

$= x^2 + \sqrt{5}$

अत: **अभीष्ट बहुपद** $= \boldsymbol{x^2 + \sqrt{5}}$ **उत्तर**

● **(iv)** माना द्विघात बहुपद के शून्यक α तथा β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= \alpha + \beta$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग 1 तथा गुणनफल 1 है।

तब, $\alpha + \beta = 1$ तथा $\alpha\beta = 1$

तब, द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)(x - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - (1) \,.\, x + 1$

$= x^2 - x + 1$

अत: **अभीष्ट बहुपद** $= \boldsymbol{x^2 - x + 1}$ **उत्तर**

● **(v)** माना द्विघात बहुपद के शून्यक α व β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= \alpha + \beta$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग $-\frac{1}{4}$ तथा गुणनफल $\frac{1}{4}$ है।

तब, $\alpha + \beta = -\frac{1}{4}$ तथा $\alpha\beta = \frac{1}{4}$

∵ α व β द्विघात बहुपद के शून्यक हैं।

∴ द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)(x - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) x + \frac{1}{4}$

$= x^2 + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4x^2 + x + 1)$

$= k\,(4x^2 + x + 1)$

(जहाँ k एक वास्तविक संख्या है)

अत: **अभीष्ट बहुपद** $= \boldsymbol{4x^2 + x + 1}$ अथवा $\boldsymbol{k\,(4x^2 + x + 1)}$, जहाँ $k = \frac{1}{4}$ एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर

● **(vi)** माना द्विघात बहुपद के शून्यक α व β हैं।

तब, शून्यकों का योग $= (\alpha + \beta)$

तथा शून्यकों का गुणनफल $= \alpha\beta$

परन्तु दिया है कि शून्यकों का योग 4 तथा गुणनफल 1 है।

तब, $\alpha + \beta = 4$ तथा $\alpha\beta = 1$

∵ α व β द्विघात बहुपद के शून्यक हैं।

∴ द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)(x - \beta)$

$= x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$

$= x^2 - 4x + 1$

अत: **अभीष्ट बहुपद** $= \boldsymbol{x^2 - 4x + 1}$ **उत्तर**

●