

02

बहुपद (Polynomials)



अध्याय के अन्तर्गत

दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

?प्रश्नावली | 2.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर में बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) $4x^2 - 3x + 7$
- (ii) $y^2 + \sqrt{2}$
- (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$
- (iv) $y + \frac{2}{y}$
- (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

हल : (i) $4x^2 - 3x + 7$ में केवल एक चर x है। इसमें x की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ एक चर में बहुपद है। उत्तर

● (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ में केवल एक चर y है। इसमें y की सभी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

∴ व्यंजक $y^2 + \sqrt{2}$ एक चर में बहुपद है। उत्तर

● (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ के पद $3\sqrt{t}$ में t की घात $\frac{1}{2}$ है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ बहुपद नहीं है। उत्तर

● (iv) $y + \frac{2}{y}$ के पद $\frac{2}{y}$ या $2y^{-1}$ में y की घात -1 है जो धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

∴ व्यंजक $y + \frac{2}{y}$ बहुपद नहीं है। उत्तर

● (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$ में तीन चर x, y और t हैं तथा इनकी घात धनात्मक पूर्णांक हैं।

अतः यह बहुपद है परन्तु एक चर में नहीं है। उत्तर

प्रश्न 2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) $2 + x^2 + x$
- (ii) $2 - x^2 + x^3$
- (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$
- (iv) $\sqrt{2}x - 1$

हल : (i) $2 + x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = 1

● (ii) $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक = -1

● (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक = $\frac{\pi}{2}$

● (iv) $\sqrt{2}x - 1$ अर्थात् $0.x^2 + \sqrt{2}x - 1$ में x^2 का गुणांक = 0 उत्तर

प्रश्न 3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए। [NCERT EXERCISE]

हल : 35 घात के द्विपद का उदाहरण = $x^{35} + \frac{1}{3}$ उत्तर

100 घात के एकपदी का उदाहरण = $10x^{100}$ उत्तर

प्रश्न 4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

- (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$
- (ii) $4 - y^2$
- (iii) $5t - \sqrt{7}$
- (iv) 3

हल : (i) बहुपद $5x^3 + 4x^2 + 7x$ में चर x की अधिकतम घात = 3

अतः दिए हुए बहुपद की घात = 3 उत्तर

● (ii) बहुपद $4 - y^2$ में चर y की अधिकतम घात = 2

अतः दिए हुए बहुपद की घात = 2 उत्तर

● (iii) बहुपद $5t - \sqrt{7}$ में चर t की अधिकतम घात = 1

अतः दिए हुए बहुपद की घात = 1 उत्तर

● (iv) बहुपद 3 एक अचर पद है अर्थात् $3x^0$

अतः दिए हुए बहुपद की घात = 0 उत्तर

प्रश्न 5. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन से बहुपद रैखिक, कौन-कौन से द्विघाती तथा कौन-कौन से त्रिघाती हैं : [NCERT EXERCISE]

- (i) $x^2 + x$
- (ii) $x - x^3$
- (iii) $y + y^2 + 4$
- (iv) $1 + x$
- (v) $3t$
- (vi) r^2
- (vii) $7x^3$

हल : (i) बहुपद $x^2 + x$ में चर x की अधिकतम घात = 2

∴ यह बहुपद द्विघाती है। उत्तर

● (ii) बहुपद $x - x^3$ में चर x की अधिकतम घात = 3

∴ यह बहुपद त्रिघाती है। उत्तर

● (iii) बहुपद $y + y^2 + 4$ में चर y की अधिकतम घात = 2

∴ यह बहुपद द्विघाती है। उत्तर

● (iv) बहुपद $1 + x$ में चर x की अधिकतम घात 1 है।

∴ यह बहुपद रैखिक है। उत्तर

2 | गणित ▶ कक्षा-9

- (v) बहुपद $3t$ में चर t की अधिकतम घात 1 है।
∴ यह बहुपद रैखिक है।

- (vi) बहुपद r^2 में चर r की अधिकतम घात 2 है।
∴ यह बहुपद द्विघाती है।

- (vii) बहुपद $7x^3$ में चर x की अधिकतम घात 3 है।
∴ यह बहुपद त्रिघाती है।

उत्तर

• (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

$\therefore p(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1)(1) = -1$

उत्तर

$p(1) = (1 - 1)(1 + 1) = (0)(2) = 0$ उत्तर

$p(x) = (2 - 1)(2 + 1) = (1)(3) = 3$ उत्तर

प्रश्न 3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान

निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं :

[NCERT EXERCISE]

(i) $p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2); x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2; x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$

हल : (i) $p(x) = 3x + 1$
 $\Rightarrow p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

$\therefore -\frac{1}{3}, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

• (ii) $p(x) = 5x - \pi$

$\Rightarrow p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$

$\therefore \frac{4}{5}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

उत्तर

• (iii) $p(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow p(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\therefore 1, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

और $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\therefore -1, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

• (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$\Rightarrow p(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = (0)(-3) = 0$

$\therefore -1, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

और $p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = 3(0) = 0$

$\therefore 2, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

• (v) $p(x) = x^2$

$\Rightarrow p(0) = 0^2 = 0$

$\therefore 0, p(x)$ का एक शून्यक है।

उत्तर

?प्रश्नावली | 2.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

[NCERT EXERCISE]

हल : माना बहुपद $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

- (i) $x = 0$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$p(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 3$

- (ii) $x = -1$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 = -5 - 4 + 3 = -6$

- (iii) $x = 2$ पर बहुपद $p(x)$ का मान

$p(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 16 + 3 = -3$

प्रश्न 2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0)$, $p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

हल : (i) $p(y) = y^2 - y + 1$

$\therefore p(0) = 0^2 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

उत्तर

$p(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

उत्तर

$p(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

उत्तर

- (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$\therefore p(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = 2$

उत्तर

$p(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3 = 2 + 1 + 2 - 1 = 4$

उत्तर

$p(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3 = 2 + 2 + 8 - 8 = 4$

उत्तर

- (iii) $p(x) = x^3$

$\therefore p(0) = (0)^3 = 0$

उत्तर

$p(1) = (1)^3 = 1$

उत्तर

$\therefore p(2) = (2)^3 = 8$

उत्तर

- (vi) $p(x) = lx + m$
 $\Rightarrow p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$
 $\therefore -\frac{m}{l}, p(x)$ का एक शून्यक है।

- (vii) $p(x) = 3x^2 - 1$
 $\Rightarrow p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$
 $\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}, p(x)$ का एक शून्यक है।
 और $p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{2}{3} - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0$

- (viii) $p(x) = 2x + 1$
 $\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$
 $\therefore \frac{1}{2}, p(x)$ का शून्यक नहीं है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$
- (iii) $p(x) = 2x + 5$ (iv) $p(x) = 3x - 2$
- (v) $p(x) = 3x$
- (vi) $p(x) = ax; a \neq 0$
- (vii) $p(x) = cx + d; c \neq 0, c, d$

संख्याएँ हैं।

हल : (i) बहुपद $p(x) = x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow x = -5 \end{aligned}$$

$$\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = -5$$

• (ii) बहुपद $p(x) = x - 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow x - 5 = 0 \\ &\Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = 5$$

• (iii) बहुपद $p(x) = 2x + 5$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\therefore p(x) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow 2x = -5 \\ &\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ &\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

- (iv) बहुपद $p(x) = 3x - 2$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow 3x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow 3x = 2 \\ &\Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ &\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- (v) बहुपद $p(x) = 3x$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow 3x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \\ &\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = 0 \end{aligned}$$

- (vi) बहुपद $p(x) = ax; a \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow ax = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \quad (\because a \neq 0) \\ &\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = 0 \end{aligned}$$

- (vii) बहुपद $p(x) = cx + d, c \neq 0$ का शून्यक ज्ञात करने के लिए इसे शून्य के बराबर रखते हैं।

$$\begin{aligned} &\therefore p(x) = 0 \\ &\Rightarrow cx + d = 0 \\ &\Rightarrow cx = -d \\ &\Rightarrow x = -\frac{d}{c} \quad (\because c \neq 0) \\ &\therefore p(x) \text{ का शून्यक} = -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखण्ड $x + 1$ है। [NCERT EXERCISE]

- (i) $x^3 + x^2 + x + 1$
- (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- (iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
- (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

4 | गणित ▶ कक्षा-9

हल : माना $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

- (i) माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
 $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल
 $= p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
 \therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

- (ii) माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
 $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल
 $= p(-1)$
 $= (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$
 \therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

- (iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
 $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल
 $= p(-1)$
 $= (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$
 $= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1 \neq 0$
 \therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

- (iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$
 $p(x)$ को $x + 1$ से भाग देने पर शेषफल
 $= p(-1)$
 $= (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$
 $= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \neq 0$
 \therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore x + 1, p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

प्रश्न 2. गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, g(x) = x + 1$ [NCERT EXERCISE]

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$ [NCERT EXERCISE]

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$ [NCERT EXERCISE]

हल : (i) माना $g(x) = 0$

$$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$\therefore p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-1)$
 $= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$
 $= -2 + 1 + 2 - 1 = 0$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उत्तर

● (ii) माना $g(x) = 0$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$\therefore p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल = $p(-2)$
 $= (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$
 $= -8 + 12 - 6 + 1$
 $= -1 \neq 0$

\therefore शेषफल शून्य नहीं है।

$\therefore g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।

उत्तर

● (iii) माना $g(x) = 0$

$$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$\therefore p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल = $p(3)$
 $= (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$
 $= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$

\therefore शेषफल शून्य है।

$\therefore g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

उत्तर

प्रश्न 3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1), p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो :

[NCERT EXERCISE]

(i) $p(x) = x^2 + x + k$

(ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

(iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

हल : माना $x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = 1$$

● (i) $p(x) = x^2 + x + k$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$$\therefore p(1) = 0$$

$$\Rightarrow (1)^2 + 1 + k = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + k = 0$$

$$\Rightarrow k = -2$$

● (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$$\therefore p(1) = 0$$

$$\Rightarrow 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + k + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow k = -(2 + \sqrt{2})$$

● (iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$

$\therefore x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है

$$\therefore p(1) = 0$$

$$\Rightarrow k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2} - 1$$

उत्तर

उत्तर

उत्तर

- (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$
 $\because x - 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।
 $\therefore p(1) = 0$
 $\Rightarrow k(1)^2 - 3(1) + k = 0$
 $\Rightarrow 2k = 3$
 $\Rightarrow k = \frac{3}{2}$

उत्तर

प्रश्न 4. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1$
 $= 12x^2 - 4x - 3x + 1$
 $[\because 12 \times 1 = 12, (-4) \times (-3) = 12,$
 $-4 - 3 = -7]$
 $= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$
 $= (3x - 1)(4x - 1)$

उत्तर

- (ii) $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3$
 $(\because 2 \times 3 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 + 1 = 7)$
 $= 2x(x + 3) + 1(x + 3)$
 $= (x + 3)(2x + 1)$

उत्तर

- (iii) $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6$
 $[\because 6 \times (-6) = -36, 9 \times (-4) = -36,$
 $9 - 4 = 5]$
 $= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$
 $= (2x + 3)(3x - 2)$

उत्तर

- (iv) $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$
 $[\because 3 \times (-4) = -12, -4 + 3 = -1]$
 $= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$
 $= (3x - 4)(x + 1)$

उत्तर

प्रश्न 5. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
 $\Rightarrow p(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$
 $= x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1)$
 $= (x^2 - 1^2)(x - 2)$
 $= (x^2 - b^2) = (a - b)(a + b)]$
 $= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

उत्तर

- (ii) माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

यहाँ अचर पद = 5

5 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 5$

$x = -1$ पर शेषफल

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$$
 $= -1 - 3 + 9 - 5 = 0$

∴ शेषफल शून्य है।

∴ $x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$$\begin{aligned} &= x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5 \\ &= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5 \\ &= (x + 1)(x^2 - 4x - 5) \\ &= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5) \\ &\quad [\because 1 \times (-5) = -5, -5 + 1 = -4] \\ &= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)] \\ &= (x + 1)(x - 5)(x + 1) \\ &= (x + 1)^2(x - 5) \end{aligned}$$

उत्तर

- (iii) माना $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

यहाँ अचर पद = 20

20 के अपवर्तक = $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$
 $x = -1$ पर शेषफल

$$p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$$
 $= -1 + 13 - 32 + 20 = 0$

∴ शेषफल शून्य है।

∴ $x + 1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$$\begin{aligned} &= x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20 \\ &= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20 \\ &= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 12x + 20) \\ &= (x + 1)(x^2 + 2x + 10x + 20) \\ &\quad (\because 1 \times 20 = 20, 10 \times 2 = 20, 10 + 2 = 12) \\ &= (x + 1)[x(x + 2) + 10(x + 2)] \\ &= (x + 1)(x + 2)(x + 10) \end{aligned}$$

उत्तर

- (iv) माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

$$= 2y^3 - 2y + y^2 - 1$$

$$= 2y(y^2 - 1) + 1(y^2 - 1)$$

$$= (y^2 - 1)(2y + 1)$$

$$= (y^2 - b^2)(2y + 1)$$

$$= (y - 1)(y + 1)(2y + 1)$$

$$[\because a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)] \text{ उत्तर}$$

?प्रश्नावली | 2.4

प्रश्न 1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) $(x+4)(x+10)$
- (ii) $(x+8)(x-10)$
- (iii) $(3x+4)(3x-5)$
- (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$
- (v) $(3-2x)(3+2x)$

हल : (i) $(x+4)(x+10)$

$$\begin{aligned} &= x^2 + x(4+10) + (4)(10) \\ &[:: (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab] \\ &= x^2 + 14x + 40 \end{aligned}$$

उत्तर

- (ii) $(x+8)(x-10)$

$$= x^2 + x(8-10) + (8)(-10)$$

$$\begin{aligned} &[:: (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab] \\ &= x^2 - 2x - 80 \end{aligned}$$

उत्तर

- (iii) $(3x+4)(3x-5)$

$$\begin{aligned} &= (3x)^2 + 3x(4-5) + (4)(-5) \\ &[:: (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab] \\ &= 9x^2 - 3x - 20 \end{aligned}$$

उत्तर

- (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &[:: (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= y^4 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

उत्तर

- (v) $(3-2x)(3+2x) = (3)^2 - (2x)^2$

$$\begin{aligned} &[:: (a-b)(a+b) = a^2 - b^2] \\ &= 9 - 4x^2 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) 103×107 (ii) 95×96
- (iii) 104×96

हल : (i) 103×107

$$\begin{aligned} &= (100+3) \times (100+7) \\ &= (100)^2 + 100 \times (3+7) + 3 \times 7 \\ &[:: (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab] \\ &= 100 \times 100 + 100 \times 10 + 3 \times 7 \\ &= 10000 + 1000 + 21 \\ &= 11021 \end{aligned}$$

उत्तर

- (ii) 95×96

$$\begin{aligned} &= (100-5)(100-4) \\ &= (100)^2 + 100 \times (-5-4) + (-5)(-4) \\ &[:: (x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab] \end{aligned}$$

$$= 100 \times 100 + 100 \times (-9) + (-5)(-4)$$

$$= 10000 - 900 + 20$$

उत्तर

- (iii) $104 \times 96 = (100+4) \times (100-4)$

$$= (100)^2 - (4)^2$$

$$[:: (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= 10000 - 16 = 9984$$

उत्तर

प्रश्न 3. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखण्डन कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

- (i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$

$$(iii) x^2 - \frac{y^2}{100}$$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2$

$$= (3x)^2 + 2(3x)(y) + (y)^2$$

$$= (3x+y)^2$$

$$[:: a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2]$$

- (ii) $4y^2 - 4y + 1 = (2y)^2 - 2(2y)(1) + 1^2$

$$= (2y-1)^2$$

$$[:: a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2]$$

- (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$

$$[:: a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= \left(x - \frac{y}{10}\right)\left(x + \frac{y}{10}\right)$$

उत्तर

प्रश्न 4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

- (i) $(x+2y+4z)^2$

$$(ii) (2x-y+z)^2$$

$$(iii) (-2x+3y+2z)^2$$

$$(iv) (3a-7b-c)^2$$

$$(v) (-2x+5y-3z)^2$$

$$(vi) \left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

- (i) $(x+2y+4z)^2$

$$= x^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2x(2y)$$

$$+ 2(2y)(4z) + 2(4z)x$$

$$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$$

उत्तर

- (ii)
$$(2x - y + z)^2$$

$$= (2x)^2 + (-y)^2 + z^2 + 2(2x)(-y)$$

$$+ 2(-y)z + 2z(2x)$$

$$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx \text{ उत्तर}$$

- (iii)
$$(-2x + 3y + 2z)^2$$

$$= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y)$$

$$+ 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x)$$

$$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx \text{ उत्तर}$$

- (iv)
$$(3a - 7b - c)^2$$

$$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)$$

$$(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca \text{ उत्तर}$$

- (v)
$$(-2x + 5y - 3z)^2$$

$$= (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y)$$

$$+ 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$$

$$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx \text{ उत्तर}$$

- (vi)
$$\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$+ 1^2 + 2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)$$

$$+ 2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1) + 2(1)\left(\frac{1}{4}a\right)$$

$$= \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 1 - \frac{1}{4}ab - b + \frac{1}{2}a \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 5. गुणनखण्डन कीजिए : [NCERT EXERCISE]

- (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$
- (ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

हल : इनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

- $$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
- (i)
$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$$

$$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y)$$

$$+ 2(3y)(-4z) + 2(-4z)(2x)$$

$$= (2x + 3y - 4z)^2 \text{ उत्तर}$$

- (ii)
$$2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$$

$$= (-\sqrt{2}x)^2 + y^2 + (2\sqrt{2}z)^2 + 2(-\sqrt{2}x)(y) + 2(y)(2\sqrt{2}z) + 2(-\sqrt{2}x)(2\sqrt{2}z)$$

$$= (-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)^2 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) $(2x + 1)^3$

(ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

हल : (i) $(2x + 1)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\therefore (2x + 1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \text{ उत्तर}$$

(ii) $(2a - 3b)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$= x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$$

$$\therefore (2a - 3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)(3b)$$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 18ab(2a - 3b)$$

$$= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2 \text{ उत्तर}$$

(iii) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)$$

$$= \left(\frac{3}{2}x + 1\right)$$

$$= \frac{27x^3}{8} + 1 + \frac{9x}{2}\left(\frac{3x}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \text{ उत्तर}$$

(iv) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3$ के प्रसार के लिए निम्नलिखित सर्वसमिका का प्रयोग करेंगे :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{3}y\right)^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)$$

$$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy\left(x - \frac{2}{3}y\right)$$

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$
 $= (3y + 5z) [(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$
 $[सर्वसमिका x^3 + y^3 = (x + y)$
 $(x^2 - xy + y^2) से]$
 $= (3y + 5z) (9y^2 - 15yz + 25z^2)$ उत्तर

• (ii) $64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$
 $= (4m - 7n) [(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$
 $[सर्वसमिका x^3 - y^3 = (x - y)$
 $(x^2 + xy + y^2) से]$
 $= (4m - 7n) (16m^2 + 28mn + 49n^2)$ उत्तर

प्रश्न 11. गुणनखण्डन कीजिए : [NCERT EXERCISE]

$$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$$

हल : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$
 $= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)z$
 $= (3x + y + z) [(3x)^2 + y^2 + z^2 - (3x)y$
 $- yz - z(3x)]$

[सर्वसमिका $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)$
 $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) से]$
 $= (3x + y + z) (9x^2 + y^2 + z^2$
 $- 3xy - yz - 3zx)$ उत्तर

प्रश्न 12. सत्यापित कीजिए : [NCERT EXERCISE]

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2} (x + y + z)$$
 $\times [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

हल : हम जानते हैं कि
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy$
 $- 2yz - 2zx) \Rightarrow$
 $= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x^2 + y^2 - 2xy)$
 $+ (y^2 + z^2 - 2yz) + (z^2 + x^2 - 2zx)]$
 $[\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2]$
 $= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2$
 $+ (y - z)^2 + (z - x)^2]$
 Proved.

प्रश्न 13. यदि $x + y + z = 0$ हो तो दिखाइए कि

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$
 है। [NCERT EXERCISE]

हल : हम जानते हैं कि
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2$
 $+ z^2 - xy - yz - zx)$

$x + y + z = 0$ रखने पर,
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2$
 $- xy - yz - zx) = 0$
 $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \text{Proved.}$

प्रश्न 14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

हल : (i) माना $-12 = x, 7 = y, 5 = z$

$x + y + z = -12 + 7 + 5 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

यदि $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3(-12)(7)(5)$

$= -1260 \quad \text{उत्तर}$

• (ii) माना $28 = x, -15 = y, -13 = z$

$x + y + z = 28 - 15 - 13 = 0$

हम जानते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

यदि $x + y + z = 0$

$(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$= 3(28)(-15)(-13)$

$= 16380 \quad \text{उत्तर}$

प्रश्न 15. नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लम्बाई और चौड़ाई के लिए सम्भव व्यंजक दीजिए :

[NCERT EXERCISE]

(i) क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$,

(ii) क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : (i) आयत का क्षेत्रफल $= 25a^2 - 35a + 12$

लम्बाई \times चौड़ाई $= 25a^2 - 35a + 12$

$= 25a^2 - 20a - 15a + 12$

$[\because 25 \times 12 = 300; 300 = (-20)(-15);$

$-20 - 15 = -35]$

$= 5a(5a - 4) - 3(5a - 4)$

$= (5a - 4)(5a - 3)$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव हैं :

यदि लम्बाई $= 5a - 4$ तो चौड़ाई $= 5a - 3$ उत्तर

यदि लम्बाई $= 5a - 3$ तो चौड़ाई $= 5a - 4$ उत्तर

• (ii) आयत का क्षेत्रफल $= 35y^2 + 13y - 12$
 $= 35y^2 + 28y - 15y - 12$
 $[\because 35 \times (-12) = -420; -420 = 28 \times (-15);$
 $28 - 15 = 13]$

10 | गणित ▶ कक्षा-9

$$= 7y(5y+4) - 3(5y+4) \quad \therefore \quad \text{घनाभ की विमाएँ} = 3, x \text{ और } (x-4)$$

$$= (5y+4)(7y-3) \quad \text{उत्तर}$$

यहाँ पर दो परिणाम सम्भव हैं :

यदि लम्बाई $= 5y + 4$ तो चौड़ाई $= 7y - 3$ उत्तर

यदि लम्बाई $= 7y - 3$ तो चौड़ाई $= 5y + 4$ उत्तर

प्रश्न 16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं कि विमाओं के लिए सम्भव व्यंजक क्या हैं?

[NCERT EXERCISE]

(i) आयतन : $3x^2 - 12x$

(ii) आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : (i) घनाभ का आयतन $= 3x^2 - 12x$

$$\Rightarrow \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} = 3x^2 - 12x$$

$$= 3x(x-4)$$

● (ii) घनाभ का आयतन $= 12ky^2 + 8ky - 20k$

$$\Rightarrow \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} = 12ky^2 + 8ky - 20k$$

$$= 4k(3y^2 + 2y - 5)$$

$$= 4k(3y^2 + 5y$$

$$- 3y - 5)$$

$$[\because 3 \times (-5) = -15; -15 = 5 \times (-3);$$

$$5 - 3 = 2]$$

$$= 4k[y(3y+5)$$

$$- 1(3y+5)]$$

$$= 4k(3y+5)(y-1)$$

●

