08 त्रिकोणमिति का परिचय
(Introduction to Trigonometry)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

प्रश्नावली | 8.1

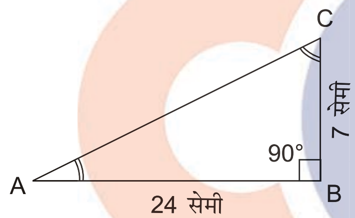
प्रश्न 1. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24$ सेमी और $BC = 7$ सेमी है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A, \cos A$

(ii) $\sin C, \cos C$ **[NCERT EXERCISE]**

हल : समकोण $\Delta\ ABC$ बनाया जिसमें $\angle B = 90°$ है।
तब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



$\therefore \quad AC^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$

$\therefore \quad AC = \sqrt{625} = 25$ सेमी

- **(i)** समकोण $\Delta\ ABC$ में,

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

और $$\cos A = \frac{\angle A \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

अत: $\mathbf{\sin A = \frac{7}{25}}$ तथा $\mathbf{\cos A = \frac{24}{25}}$ **उत्तर**

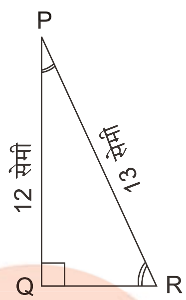
- **(ii)** समकोण $\Delta\,ABC$ में,

$$\sin C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

और $$\cos C = \frac{\angle C \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

अत: $\mathbf{\sin C = \frac{24}{25}}$ तथा $\mathbf{\cos C = \frac{7}{25}}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. दी गई आकृति में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**



हल : समकोण $\Delta\ PQR$ में,

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

या $(12)^2 + QR^2 = (13)^2$

$\Rightarrow QR^2 = (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow QR = 5$ सेमी

$\because$ $$\tan P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle P \text{ की आधार भुजा}}$$

$\therefore$ $$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

और $$\cot R = \frac{\angle R \text{ की आधार भुजा}}{\angle R \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$\therefore$ $$\cot R = \frac{5}{12}$$

अत: $\mathbf{\tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0}$ **उत्तर**

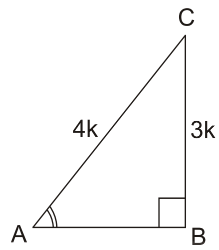
प्रश्न 3. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है, किसी समकोण त्रिभुज में,

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

$\therefore \quad \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{3}{4}$

या $\quad \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4} = k \quad$ (माना)



$\therefore \quad BC = 3\,k$ तथा $AC = 4\,k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

अब समकोण $\Delta\, ABC$ बनाया जिसमें $\angle B = 90°$ है।

तब, समकोण $\Delta\, ABC$ में,

$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\therefore \quad AB^2 + (3\,k)^2 = (4\,k)^2$

$\therefore \quad AB^2 + 9\,k^2 = 16\,k^2$

$\Rightarrow \quad AB^2 = 7\,k^2 \quad \Rightarrow \quad AB = k\sqrt{7}$

तब, $\quad \cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कर्ण भुजा } AC}$

$= \dfrac{k\sqrt{7}}{4\,k} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

तथा $\quad \tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\angle A \text{ की आधार भुजा } AB}$

$= \dfrac{3\,k}{k\sqrt{7}} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

अत: $\mathbf{\cos A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}}$ तथा $\mathbf{\tan A = \dfrac{3}{\sqrt{7}}}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. यदि 15 cot $A = 8$ हो तो sin A और sec A का मान ज्ञात कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है, $15 \cot A = 8 \quad \Rightarrow \quad \cot A = \dfrac{8}{15}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } AB}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{8}{15} = k \quad$ (माना)

$\Rightarrow \quad AB = 8\,k$ तथा $AC = 15\,k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

अब समकोण $\Delta\, ABC$ बनाया जिसमें $\angle B = 90°$

तब, समकोण त्रिभुज ABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= (8\,k)^2 + (15\,k)^2$

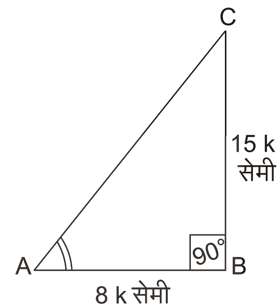
$= 64\,k^2 + 225\,k^2 = 289\,k^2$

$\therefore \quad AC^2 = 289\,k^2$

या $\quad AC = \sqrt{289\,k^2} = 17\,k$ इकाई।

तब, $\quad \sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15\,k}{17\,k}$

$\therefore \quad \sin A = \dfrac{15}{17}$



तथा $\quad \sec A = \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{17\,k}{8\,k}$

$\therefore \quad \sec A = \dfrac{17}{8}$

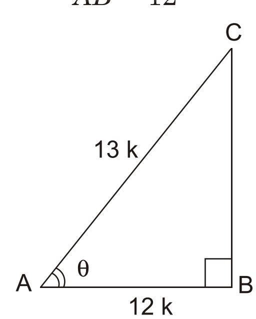
अत: $\mathbf{\sin A = \dfrac{15}{17}}$ तथा $\mathbf{\sec A = \dfrac{17}{8}}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि sec $\theta = \dfrac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : (iii) $\because \sec \theta = \dfrac{13}{12}$

$\therefore \quad \dfrac{\text{कर्ण}}{\angle \theta \text{ की आधार भुजा}} = \dfrac{13}{12}$

$\therefore \quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13}{12} = k \quad$ (माना)



$\therefore \quad AC = 13k$ तथा $AB = 12k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

अब समकोण ΔABC बनाया जिसमें $\angle B = 90°$

तब, समकोण ΔABC में,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

या $\quad (12k)^2 + BC^2 = (13k)^2$

या $\quad BC^2 = (13k)^2 - (12k)^2$

$$= 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$$

$\therefore \quad BC = \sqrt{25k^2} = 5k$

तब, $\quad \sin\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\text{कर्ण भुजा } AC} = \dfrac{5k}{13k}$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{5}{13},$

$\cos\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कर्ण भुजा } AC} = \dfrac{12k}{13k}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{12}{13},$

$\tan\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\angle\theta \text{ की आधार भुजा } AB} = \dfrac{5k}{12k}$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{5}{12},$

$\cot\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{12k}{5k}$

$\Rightarrow \quad \cot\theta = \dfrac{12}{5}$

तथा $\quad \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण भुजा } AC}{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{13k}{5k}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{5}$

अत: अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$, $\cos\theta = \dfrac{12}{13}$, $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{13}{5}$ तथा $\cot\theta = \dfrac{12}{5}$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हों, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$

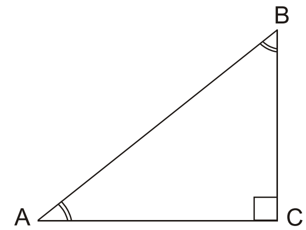
[NCERT EXERCISE]

हल : मान लिया त्रिभुज ABC में $\angle C$ समकोण है।

तब, $\angle A$ तथा $\angle B$ न्यूनकोण होंगे।

$\because \quad \cos A = \cos B$

$\therefore \quad \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } AC}{\text{कर्ण } AB} = \dfrac{\angle B \text{ की आधार भुजा } BC}{\text{कर्ण } AB}$



या $\quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB}$ या $AC = BC$

$\because$ समकोण ΔABC में,

$$AC = BC$$

$\therefore$ ΔABC समकोण समद्विबाहु है।

$\therefore \quad \angle A = \angle B$ **Proved.**

प्रश्न 7. यदि $\cot\theta = \dfrac{7}{8}$, तो

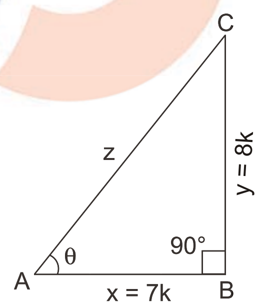
(i) $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$,

(ii) $\cot^2\theta$ का मान निकालिए। [NCERT EXERCISE]

हल : $\because$ दिया है, $\quad \cot\theta = \dfrac{7}{8}$

$\therefore \quad \dfrac{\angle\theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC} = \dfrac{7}{8}$

$\therefore \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{8} = k \quad$ (माना)



$\Rightarrow \quad x = 7k \quad$ तथा $\quad y = 8k$

जहाँ, $AB = x$, $BC = y$ तथा k कोई धन संख्या है।

अब समकोण ΔABC बनाया जिसमें $\angle B = 90°$.

तब समकोण त्रिभुज ABC में, माना कर्ण $AC = z$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow \quad z^2 = (7k)^2 + (8k)^2 = 49k^2 + 64k^2$

$\Rightarrow \quad z^2 = 113k^2 \quad \therefore z = k\sqrt{113}$

तब, $\quad \sin\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की सम्मुख भुजा } BC}{\text{कर्ण भुजा } AC} = \dfrac{y}{z}$

$$= \frac{8k}{k\sqrt{113}} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{8}{\sqrt{113}}$$

और $\cos\theta = \dfrac{\angle\theta \text{ की आधार भुजा } AB}{\text{कर्ण भुजा } AC}$

$= \dfrac{x}{z} = \dfrac{7k}{k\sqrt{113}} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{113}}$

● **(i)** $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$$= \frac{\left(1+\frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{7}{\sqrt{113}}\right)}$$

[$\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान रखने पर]

$$= \frac{(1)^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{(1)^2 - \left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}$$

[सूत्र : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ से]

$$= \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}} = \frac{\frac{(113-64)}{113}}{\frac{(113-49)}{113}}$$

$$= \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}} = \frac{49}{113} \times \frac{113}{64} = \frac{49}{64}$$

अतः $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ का मान $= \mathbf{\dfrac{49}{64}}$ **उत्तर**

● **(ii)** $\cot^2\theta = [\cot\theta]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{49}{64}$

अतः $\cot^2\theta$ का मान $= \mathbf{\dfrac{49}{64}}$ **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है, $3\cot A = 4$

$\Rightarrow \cot A = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)}{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{3} = k$ (माना)

$\therefore$ $AC = 4k$ और $BC = 3k$ जहाँ k एक धन संख्या है।

अब समकोण $\Delta\, ABC$ बनाया जिसमें $\angle B = 90°$.

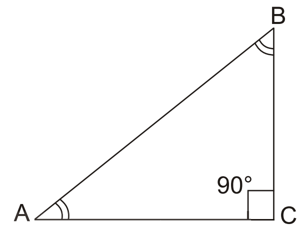
समकोण $\Delta\, ABC$ में,

$AB^2 = BC^2 + CA^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= (3k)^2 + (4k)^2$

$= 9k^2 + 16k^2 = 25k^2$

$\therefore$ $AB = 5k$



तब, $\tan A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)}{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)} = \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{3}{4}$,

$\cos A = \dfrac{\angle A \text{ की आधार भुजा } (AC)}{\text{कर्ण भुजा } (AC)} = \dfrac{4k}{5k} = \dfrac{4}{5}$

तथा $\sin A = \dfrac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा } (BC)}{\text{कर्ण भुजा } (AB)} = \dfrac{3k}{5k} = \dfrac{3}{5}$

तब, $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$

$$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{16} \times \frac{16}{25} = \frac{7}{25}$$

$\therefore$ $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{7}{25}$ ...(1)

और $\cos^2 A - \sin^2 A = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

$= \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$

$\therefore$ $\mathbf{\cos^2 A - \sin^2 A = \dfrac{7}{25}}$ ...(2)

तब, समीकरण (1) व (2) से,

$\mathbf{\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A}$ **उत्तर**

प्रश्न 9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है, समकोण $\Delta\ ABC$ में $\angle B = 90°$

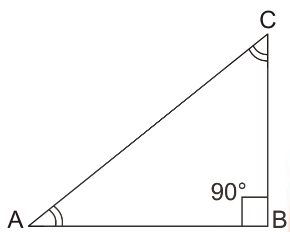
तब, $\angle A + \angle C = 90°$ अर्थात् $\angle A$ तथा $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

तथा $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

माना $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

$\therefore\quad BC = k$ तथा $AB = \sqrt{3}k$



तब, समकोण त्रिभुज ABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$= (\sqrt{3}\,k)^2 + (k)^2 = 3\,k^2 + k^2$

$= 4k^2 = (2\,k)^2$

$\therefore\quad AC = 2\,k$

तब, $\sin A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\,k} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad \sin A = \frac{1}{2}$,

$\cos A = \frac{\angle A \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$

$= \frac{\sqrt{3}\,k}{2\,k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\quad \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

और $\sin C = \frac{\angle C \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$

$= \frac{\sqrt{3}\,k}{2\,k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\quad \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos C = \frac{\angle C \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\,k} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad \cos C = \frac{1}{2}$

- **(i)** $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = \mathbf{1}$

$\therefore$ $\mathbf{\sin A \cos C + \cos A \sin C = 1}$ **उत्तर**

- **(ii)** $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

$\therefore$ $\mathbf{\cos A \cos C - \sin A \sin C = 0}$ **उत्तर**

प्रश्न 10. ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ सेमी और $PQ = 5$ सेमी है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है, समकोण $\Delta\ PQR$ में, $\angle Q = 90°$

$\therefore\quad PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

या $(5)^2 + QR^2 = PR^2$ [$\because PQ = 5$ सेमी]

या $25 = PR^2 - QR^2$

या $25 = (PR + QR)(PR - QR)$

[$\because (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$]

या $25 = 25\,(PR - QR)$

[$\because PR + QR = 25$ सेमी, दिया है]

या $PR - QR = 1$ ...(1)

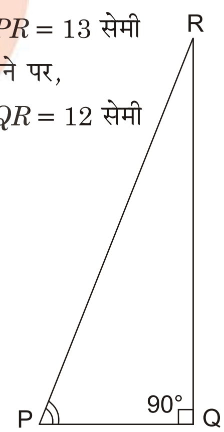
और $PR + QR = 25$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$2PR = 26$ या $PR = 13$ सेमी

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$2QR = 24$ या $QR = 12$ सेमी



अब समकोण $\Delta\ PQR$ में,

$\sin P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$

$= \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$

$\cos P = \frac{\angle P \text{ की आधार भुजा}}{\text{कर्ण}}$

$= \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

व $\tan P = \frac{\angle P \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle P \text{ की आधार भुजा}}$

$= \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

अत: $\mathbf{\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}}$

तथा $\mathbf{\tan P = \frac{12}{5}}$ **उत्तर**

प्रश्न 11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

[NCERT EXERCISE]

(i) tan A का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए sec $A = \frac{12}{5}$

(iii) cos A, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) cot A, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए sin $\theta = \frac{4}{3}$

हल : (i) $\because \tan A = \frac{\angle A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}}$

$\therefore$ tan A का मान 1 से कम तभी हो सकता है जब $\angle A$ की सम्मुख भुजा, $\angle A$ की आधार भुजा से छोटी हो।

परन्तु ऐसा सदैव होना आवश्यक नहीं है।

अतः **कथन ''tan A का मान सदैव 1 से कम होता है'' असत्य है।** **उत्तर**

● **(ii)** $\because \sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\angle A \text{ की आधार भुजा}}$

परन्तु दिया है कि $\sec A = \frac{12}{5} > 1$

जिसका आशय है कि किसी $\angle A$ के लिए समकोण त्रिभुज के कर्ण और $\angle A$ के आधार का अनुपात $12 : 5$ होता है।

यह सदैव सम्भव है क्योंकि कर्ण, समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है।

अतः **कथन ''कोण A के किसी मान के लिए sec $A = \frac{12}{5}$'' सत्य है।** **उत्तर**

● **(iii)** $\because$ cos A कोण A की cosine का संक्षिप्त रूप होता है जबकि cosecant A का संक्षिप्त रूप है cosec A।

अतः **दिया हुआ कथन असत्य है।** **उत्तर**

● **(iv) cot A** का अर्थ $\angle A$ के cotangent से है। स्वतन्त्र रूप में cot का कोई अस्तित्व ही नहीं है।

$\therefore$ cot A, cot और A का गुणनफल कदापि नहीं है।

अतः **दिया हुआ कथन असत्य है।** **उत्तर**

● **(v)** किसी समकोण त्रिभुज में कोण θ के लिए

यदि $\sin\theta = \frac{4}{3}$ तो इसका अर्थ है कि θ की सम्मुख भुजा और कर्ण का अनुपात $4 : 3$ है।

परन्तु कर्ण, समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है।

अतः **दिया गया कथन असत्य है।** **उत्तर**

? प्रश्नावली | 8.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$ **[NCERT EXERCISE]**

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$ **[NCERT EXERCISE]**

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$ **[NCERT EXERCISE]**

(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$ **[NCERT EXERCISE]**

(v) $\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$ **[NCERT EXERCISE]**

हल : (i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

अतः **$\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60° = 1$** **उत्तर**

● **(ii)** $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= (2 \times 1) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

अतः **$2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60° = 2$** **उत्तर**

● **(iii)** $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times 2(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \times \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2[(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2]}$$

$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$$= \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2(6-2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\times 4} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

अतः $\dfrac{\textbf{cos 45°}}{\textbf{sec 30° + cosec 30°}} = \dfrac{\mathbf{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{\mathbf{8}}$ **उत्तर**

● **(iv)** $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} \times \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}-4}$$

[हर व अंश दोनों में हर के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3})^2-(4)^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3})^2+(4)^2-2\times 4\times 3\sqrt{3}}{27-16}$$

$[\because (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab,$
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$

$$= \frac{27+16-24\sqrt{3}}{11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

अतः $\dfrac{\textbf{sin 30° + tan 45° − cosec 60°}}{\textbf{sec 30° + cos 60° + cot 45°}}$

$$= \frac{\mathbf{43-24\sqrt{3}}}{\mathbf{11}}$$ **उत्तर**

● **(v)** $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

$$= \frac{\left[5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\left[4\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{1+3}{4}} = \frac{\frac{67}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12}$$

अतः $\dfrac{\mathbf{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}}{\mathbf{\sin^2 30° + \cos^2 30°}}$

$$= \frac{\mathbf{67}}{\mathbf{12}}$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए—

(i) $\dfrac{\mathbf{2\tan 30°}}{\mathbf{1+\tan^2 30°}}$ **बराबर है :**

[2019, NCERT EXERCISE]

(a) sin 60° (b) cos 60°
(c) tan 60° (d) sin 30°.

हल : $\dfrac{\mathbf{2\tan 30°}}{\mathbf{1+\tan^2 30°}} = \dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{4}$$

$[\because 3 = \sqrt{3}\times\sqrt{3}]$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° \quad \left[\because \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°\right]$$

अतः **विकल्प (a) सही है।** **उत्तर**

(ii) $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$ **बराबर है :** **[NCERT EXERCISE]**

(a) $\tan 90°$ (b) 1

(c) $\sin 45°$ (d) 0.

हल : $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} = \frac{1-(1)^2}{1+(1)^2}$

$= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

अत: **विकल्प (d) सही है।** **उत्तर**

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है जबकि A बराबर है : **[NCERT EXERCISE]**

(a) 0° (b) 30°

(c) 45° (d) 60°.

हल : $\sin 2A = 2 \sin A$

यदि $A = 0°$,

तो $\sin 2A = \sin 2 \times 0° = \sin 0° = 0$

और $2 \sin A = 2 \sin 0° = 2 \times 0 = 0$

$\therefore$ जब $A = 0°$, तब $\sin 2A = 2 \sin A$

अत: **विकल्प (a) सही है।** **उत्तर**

प्रश्न 3. यदि $\tan (A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A+B \le 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है, $\tan (A+B) = \sqrt{3}$

या $\tan (A+B) = \tan 60°$

$\Rightarrow$ $A+B = 60°$ ...(1)

तथा $\tan (A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या $\tan (A-B) = \tan 30°$

$\Rightarrow$ $A-B = 30°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$2A = 90°$ या $A = 45°$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$2B = 30°$ या $B = 15°$

अत: $\boldsymbol{A = 45°}$ तथा $\boldsymbol{B = 15°}$ **उत्तर**

प्रश्न 4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं? कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

(i) $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$.

(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$

(v) $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

हल : (i) मान लिया कि $A = 30°$ तथा $B = 30°$

तो $\sin (A+B) = \sin (30° + 30°)$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और $\sin A + \sin B = \sin 30° + \sin 30°$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\therefore$ $\sin (A+B) \neq \sin A + \sin B$

अत: **दिया गया कथन असत्य है।** **उत्तर**

- **(ii)** $\because$ $\sin 0° = 0, \sin 30° = \frac{1}{2}, \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

  $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90° = 1$

$\therefore$ θ का मान बढ़ने पर $\sin \theta$ का मान भी बढ़ता है परन्तु यह $\theta = 90°$ तक ही सही है, आगे नहीं।

अत: **दिया गया कथन सत्य है।** **उत्तर**

- **(iii)** $\because$ $\cos 0° = 1, \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

  $\cos 60° = \frac{1}{2}$ और $\cos 90° = 0$

स्पष्ट है कि θ का मान बढ़ने पर $\cos \theta$ के मान में वृद्धि नहीं होती अर्थात् घटता है।

अत: **दिया गया कथन असत्य है।** **उत्तर**

- **(iv)** $\because$ $\sin \theta = \cos \theta$

$\therefore$ $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$ या $\tan \theta = 1$

$\Rightarrow$ $\tan \theta = \tan 45°$

$\Rightarrow$ $\theta = 45°$

$\therefore$ θ के सभी मानों के लिए $\sin \theta \neq \cos \theta$

अत: **दिया गया कथन असत्य है।** **उत्तर**

- **(v)** त्रिकोणमितीय अनुपातों के विभिन्न मानों के लिए संकलित सारणी को देखने से स्पष्ट है कि $\cot 0° =$ अनिर्धारित

$\therefore$ $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

अत: **दिया गया कथन सत्य है।** **उत्तर**

? प्रश्नावली | 8.3

प्रश्न 1. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : $\because$ हम जानते हैं cot A और cosec A में सम्बन्ध '$\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$' है और cosec A और sin A में सम्बन्ध प्रतिलोम का है।

$$\therefore \quad \sin A = \frac{1}{\text{cosec } A} = \frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

तब, $\mathbf{\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}}$ **उत्तर**

इसी प्रकार,

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

या
$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A} = \sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 A}} = \sqrt{\frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$

तब, $\mathbf{\sec A = \dfrac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}}$ **उत्तर**

और $\mathbf{\tan A = \dfrac{1}{\cot A}}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec A के पदों में लिखिए। **[NCERT EXERCISE]**

हल : (i) $\because \sin A = \dfrac{1}{\text{cosec } A}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

$[\because \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \tan^2 A}{\tan^2 A}}}$$

$\left[\because \cot A = \dfrac{1}{\tan A}\right]$

$$= \frac{\sqrt{\tan^2 A}}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{\sqrt{(1 + \tan^2 A) - 1}}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sqrt{\sec^2 A}} \quad [\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$$

$\therefore$ $\mathbf{\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}}$ **उत्तर**

(ii) $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$ **उत्तर**

(iii) $\tan A = \sqrt{\tan^2 A}$

$$= \sqrt{(1 + \tan^2 A) - 1}$$

$$= \mathbf{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$[\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$

$\therefore$ $\mathbf{\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}}$ **उत्तर**

(iv) $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 A) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$[\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$

$\therefore$ $\mathbf{\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}}$ **उत्तर**

(v) $\text{cosec } A = \sqrt{\text{cosec}^2 A}$

$$= \sqrt{1 + \cot^2 A} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}}$$

$[\because \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

$$= \sqrt{\frac{1 + \tan^2 A}{\tan^2 A}} \quad \left[\because \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2 A}{(1 + \tan^2 A) - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^2 A}{\sec^2 A - 1}}$$

$[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$\therefore$ **cosec** $A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ **उत्तर**

प्रश्न 3. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :

(i). $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है :

[2019, NCERT EXERCISE]

(a) 1 (b) 9

(c) 8 (d) 0.

हल : $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

$= 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$

$[\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$

$= 9 \times 1 = 9$

अत: विकल्प **(b)** सही है। **उत्तर**

(ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \text{cosec } \theta)$ बराबर है :

[2013; NCERT EXERCISE]

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) −1.

हल : $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \text{cosec } \theta)$

$$= \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)\left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}$$

$\left[\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \text{ तथा } \text{cosec} = \dfrac{1}{\sin\theta}\right]$

$$= \frac{[(\sin \theta + \cos \theta) + 1]\,[(\sin \theta + \cos \theta) - 1]}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cos \theta}$$

[सूत्र $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से]

$$= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$[\because (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$$= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

अत: विकल्प **(c)** सही है। **उत्तर**

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है :

[2012, 15; NCERT EXERCISE]

(a) $\sec A$ (b) $\sin A$

(c) $\text{cosec } A$ (d) $\cos A$.

हल : $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$$

$\left[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \text{ तथा } \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}\right]$

$$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}(1 - \sin A)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$$

[सूत्र $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से]

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

[सूत्र $1 - \sin^2 A = \cos^2 A$ से]

$= \cos A$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है :

[NCERT EXERCISE]

(a) $\sec^2 A$ (b) −1

(c) $\cot^2 A$ (d) $\tan^2 A$.

हल : $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$

$$= \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$$

$\left[\begin{array}{l}\because 1 + \tan^2 A = \sec^2 A, \\ 1 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A\end{array}\right]$

$$= \left[\frac{\sec A}{\text{cosec } A}\right]^2$$

$\left[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A} \text{ तथा } \text{cosec } A = \dfrac{1}{\sin A}\right]$

$$= \left[\frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\sin A}}\right]^2 = \left[\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin A}{\cos A}\right]^2 = [\tan A]^2 \quad \left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$= \tan^2 A$

अत: विकल्प **(d)** सही है। **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून हैं :

(i) $\mathbf{(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

[NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= (\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$\left[\because \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$

$$[\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta]$$

$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

[गुणनखण्डन से]

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \textbf{R.H.S.}$$

अत: $\mathbf{(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ **Proved.**

(ii) $\mathbf{\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sec\theta}$

[NCERT EXERCISE]

अथवा $\mathbf{\dfrac{\cot\theta}{\text{cosec}\,\theta+1} + \dfrac{\text{cosec}\,\theta+1}{\cot\theta} = 2\sec\theta}$

[2015]

हल : L.H.S. $= \dfrac{\cot\theta}{\text{cosec}\,\theta+1} + \dfrac{\text{cosec}\,\theta+1}{\cot\theta}$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}+1} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}+1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$\left[\because \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + 1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab]$$

$$= \frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1+1+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{2+2\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$= 2\sec\theta =$ **R.H.S.**

(iii) $\mathbf{\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta}$

[2018, NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= \dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$\left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ तथा } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$[\because a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$$= \frac{1 + \sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$ [$(\sin\theta - \cos\theta)$ के निरसन से]

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} + 1$$

$\left[\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\right]$

$= \sec\theta \,.\, \operatorname{cosec}\theta + 1$

$= 1 + \sec\theta \,.\, \operatorname{cosec}\theta =$ **R.H.S.**

अतः $\mathbf{\frac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1 - \tan\theta}}$

$\mathbf{= 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta}$ **Proved.**

(iv) $\mathbf{\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}}$ **[NCERT EXERCISE]**

हल : L.H.S. $= \frac{1 + \sec A}{\sec A}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} \quad \left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= \frac{\frac{\cos A + 1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{(1 + \cos A)}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$$

$$= \frac{1 + \cos A}{1}$$

$$= \frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)}$$

[हर व अंश को $(1 - \cos A)$ से गुणा करने पर]

$$= \frac{(1)^2 - (\cos A)^2}{1 - \cos A}$$

[सूत्र : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ से]

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A}$$

$[\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A]$

$$= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \text{R.H.S.}$$

अतः $\mathbf{\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}}$

(v) सर्वसमिका $\mathbf{\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A}$ को लागू करके

$$\mathbf{\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A}$$

[NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$

$$= \frac{\frac{\cos A - \sin A + 1}{\sin A}}{\frac{\cos A + \sin A - 1}{\sin A}}$$

[हर व अंश प्रत्येक को $\sin A$ से भाग देने पर]

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$$

$\left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ तथा } \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}\right]$

$$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A) - 1}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A) - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

$[\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A) - (\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

$[\because (a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)]$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)[1 - (\operatorname{cosec} A - \cot A)]}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

[सार्व लेने पर]

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

[$(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)$ के निरसन से]

$= (\operatorname{cosec} A + \cot A) =$ **R.H.S.**

अतः $\mathbf{\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A}$

Proved.

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

[NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1-\sin A)(1+\sin A)}}$

[हर व अंश दोनों को हर के संयुग्मी $(1+\sin A)$ से गुणा करने पर]

$= \sqrt{\dfrac{(1+\sin A)^2}{(1-\sin^2 A)}}$

[सूत्र : $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ से]

$= \dfrac{(1+\sin A)}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \dfrac{1+\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$

$[\because 1-\sin^2 A = \cos^2 A]$

$= \dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$\left[\because \dfrac{1}{\cos A} = \sec A \text{ तथा } \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A\right]$

$= \sec A + \tan A =$ **R.H.S.**

अतः $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ **Proved.**

(ix) $(\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[2019; NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= (\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$= \left(\text{cosec } A - \dfrac{1}{\text{cosec } A}\right)\left(\sec A - \dfrac{1}{\sec A}\right)$

$\left[\because \sin A = \dfrac{1}{\text{cosec } A} \text{ तथा } \cos A = \dfrac{1}{\sec A}\right]$

$= \dfrac{\text{cosec}^2 A - 1}{\text{cosec } A} \times \dfrac{\sec^2 A - 1}{\sec A}$

$= \dfrac{\cot^2 A}{\text{cosec } A} \times \dfrac{\tan^2 A}{\sec A}$

$[\because \text{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A \text{ तथा } \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$

$= \dfrac{(\cot A \cdot \tan A)^2}{\dfrac{1}{\sin A} \times \dfrac{1}{\cos A}}$

$\left[\because \text{cosec } A = \dfrac{1}{\sin A} \text{ तथा } \sec A = \dfrac{1}{\cos A}\right]$

$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{\tan A} \times \tan A\right)^2}{\dfrac{1}{\sin A \cos A}}$ $\left[\because \cot A = \dfrac{1}{\tan A}\right]$

$= \dfrac{(1)^2}{\dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}}$

$[\because 1 = \sin^2 A + \cos^2 A]$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 A}{\sin A \cos A} + \dfrac{\cos^2 A}{\sin A \cos A}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\sin A}}$

$\left[\because \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A, \dfrac{\cos A}{\sin A} = \cot A\right]$

$= \dfrac{1}{\tan A + \cot A} =$ **R.H.S.**

अतः $(\text{cosec } A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$ **Proved.**

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

[NCERT EXERCISE]

अथवा $1 + \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \sec^2 A$ **[2019]**

हल : $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \dfrac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$

$[\because 1+\tan^2 A = \sec^2 A \text{ तथा } 1+\cot^2 A = \text{cosec}^2 A]$

$= \left(\dfrac{\sec A}{\text{cosec } A}\right)^2$

$= \left(\dfrac{\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{1}{\sin A}}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= (\tan A)^2$$

$$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \text{ तथा } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \tan^2 A \quad ...(1)$$

पुनः $\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2$

$$\left[\because \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A - 1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{-\frac{1-\tan A}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left((1-\tan A) \times -\frac{\tan A}{(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= (-\tan A)^2$$

$$= \tan^2 A$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A \quad ...(2)$$

तब समीकरण (1) व (2) से,

$$\left(\frac{\mathbf{1+\tan^2 A}}{\mathbf{1+\cot^2 A}}\right) = \left(\frac{\mathbf{1-\tan A}}{\mathbf{1-\cot A}}\right)^2 = \mathbf{\tan^2 A}$$

Proved.

समीकरण (2) से,

$$\left(\frac{1-\tan^2 A}{1-\cot^2 A}\right)^2 = \sec^2 A - 1$$

$$[\because 1+\tan^2 A = \sec^2 A]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{1+\left(\frac{1-\tan^2 A}{1-\cot^2 A}\right) = \sec^2 A} \qquad \textbf{Proved.}$$

(vii) $\mathbf{\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta}$

[2019; NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1)} \quad \text{[सार्व लेने पर]}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{(1-2\sin^2\theta)}{[2(1-\sin^2\theta)-1]}$$

$$[\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta \text{ रखने पर }]$$

$$= \tan\theta \times \frac{(1-2\sin^2\theta)}{[2-2\sin^2\theta - 1]}$$

$$= \tan\theta \times \frac{(1-2\sin^2\theta)}{(1-2\sin^2\theta)} \quad [\text{हर को सरल करने पर }]$$

$= \tan\theta =$ **R.H.S.** [निरसन से]

अतः $\mathbf{\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta}$ **Proved.**

(viii) $\mathbf{(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A}$

[2013; NCERT EXERCISE]

हल : L.H.S. $= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \sec A$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A + 2\cos A \sec A$$

$$\left[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \sec^2 A = 1+\tan^2 A, \operatorname{cosec}^2 A = 1+\cot^2 A\right]$$

$$= 1 + (1 + \tan^2 A) + (1 + \cot^2 A) + 2 \sin A \times \frac{1}{\sin A} + 2 \cos A \times \frac{1}{\cos A}$$

$$\left[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \text{ तथा } \sec A = \frac{1}{\cos A}\right]$$

$$= 1 + 1 + \tan^2 A + 1 + \cot^2 A + 2 + 24$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A = \textbf{R.H.S.}$$

अतः $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

Proved.

●