08 चतुर्भुज (Quadrilaterals)

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

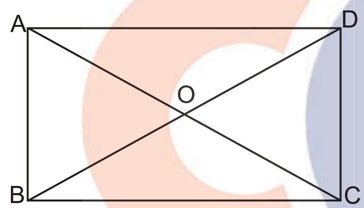
प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइए कि वह एक आयत है। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। जिसमें विकर्ण $AC = BD$ है। विकर्णों का प्रतिच्छेद-बिन्दु O है।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC और BD हैं जो O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



तथा $AC = BD$

$\Rightarrow$ $AO + OC = BO + OD$ (चित्र से) ...(1)

$\because$ AC और BD समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं और बिन्दु O पर काटते हैं।

$\therefore$ $AO = OC$ और $BO = OD$ ...(2)

तब समीकरण (1) व (2) से,

$AO + AO = BO + BO$

$\Rightarrow$ $AO = BO$

$\therefore$ $AO = BO = CO = OD$

तब $\Delta\, OAD$ में,

$AO = OD$

$\Rightarrow$ $\angle ADO = \angle DAO$

($\because$ त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

$\because$ $\angle AOB, \Delta\, OAD$ का बहिष्कोण है

$\therefore$ $\angle AOB = \angle DAO + \angle ADO$

$\Rightarrow$ $\angle AOB = \angle DAO + \angle DAO$

($\because \angle ADO = \angle DAO$)

$\Rightarrow$ $\angle AOB = 2\angle DAO$ ...(3)

और $\Delta\, OAB$ में भी, $AO = OB$

$\Rightarrow$ $\angle ABO = \angle BAO$

($\because$ त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

$\therefore$ $\angle AOD, \Delta\, OAB$ का बहिष्कोण है,

$\therefore$ $\angle AOD = \angle BAO + \angle ABO$

$\Rightarrow$ $\angle AOD = \angle BAO + \angle BAO$

($\because \angle ABO = \angle BAO$)

$\Rightarrow$ $\angle AOD = 2\angle BAO$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर,

$\angle AOB + \angle AOD = 2\angle DAO + 2\angle BAO$

$\angle BOD = 2\,(\angle DAO + \angle BAO)$

$= 2\angle BAD$ (चित्र से)

$\Rightarrow$ $2\angle BAD = 180°$

(क्योंकि BOD एक ऋजु रेखा है।)

$\Rightarrow$ $\angle BAD = 90°$

$\therefore$ चतुर्भुज $ABCD$ में, $\angle A = 90°$

$\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है

तथा $\angle A + \angle D = 180°$ (अन्त:कोणों का योग)

$\therefore$ $\angle D = \angle A$

$\Rightarrow$ $\angle D = 90°$ ($\because \angle A = 90°$)

तब $\angle B$ और $\angle C$ में से भी प्रत्येक $90°$ होगा।

$\because$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में,

$AB = CD$ और $BC = DA$

और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

अत: **समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।**

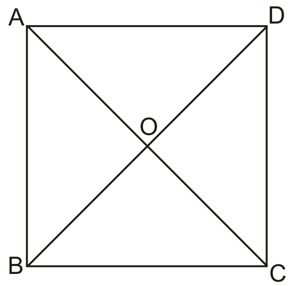
Proved.

प्रश्न 2. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $AC = BD$ और $\angle AOB$ एक समकोण या $90°$ है।



उपपत्ति : चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$

और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

तब $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ BCD$ समकोण त्रिभुज हैं।

अब $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ DCB$ में,

$AB = DC$ (वर्ग की भुजाएँ हैं।)

$\angle B = \angle C$ (प्रत्येक 90°)

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DCB$ (S.A.S. से)

$\Rightarrow$ $AC = BD$ (C.P.C.T.)

$\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$

$\therefore$ $AB = CD$ और $BC = DA$

$\therefore$ चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज भी है।

$\therefore$ इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर (बिन्दु O पर) समद्विभाजित करेंगे।

$\therefore$ $AO = BO = CO = DO$

अब $\Delta\ AOB$ और $\Delta\ COB$ में,

$AO = CO$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$AB = CB$ (वर्ग की भुजाएँ हैं।)

$BO = BO$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\therefore$ $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COB$ (S.S.S. से)

$\Rightarrow$ $\angle AOB = \angle COB$ (C.P.C.T.) ...(1)

परन्तु AOC (विकर्ण) एक ऋजु रेखा है,

$\therefore$ $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) के हल से,

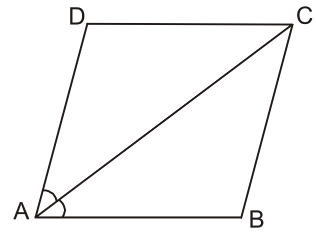
$\angle AOB = \angle COB = 90°$

अत: **वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।** **Proved.**

प्रश्न 3. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि **[NCERT EXERCISE]**

(i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।



हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है अर्थात्

$\angle BAC = \angle DAC$

सिद्ध करना है : (i) विकर्ण AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : (i) $\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ $AB \parallel CD$ तथा $BC \parallel DA$

$\because$ $AB \parallel CD$ और AC एक तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle BAC = \angle ACD$ (एकान्तर कोण) ...(1)

इसी प्रकार, $BC \parallel DA$ और AC एक तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle DAC = \angle ACB$ (एकान्तर कोण) ...(2)

AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

$\Rightarrow$ $\angle BAC = \angle DAC$

$\therefore$ समीकरण (1) व (2) से, $\angle ACB = \angle ACD$

अर्थात् **AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।**

Proved.

● **(ii)** $\because$ $\angle BAC = \angle DAC$ और $\angle DAC = \angle ACB$

$\therefore$ $\angle BAC = \angle ACB$

तब $\Delta\ ABC$ में, $\angle BAC = \angle ACB$

$\Rightarrow$ $BC = AB$

($\because$ त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।)

परन्तु $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

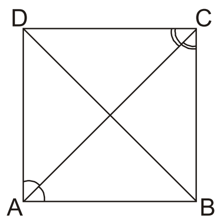
$\therefore$ $AB = CD$ तथा $BC = DA$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$

$\Rightarrow$ **चतुर्भुज $ABCD$ एक समचतुर्भुज होगा।** **Proved.**

प्रश्न 4. $ABCD$ एक आयत है जिसमें विकर्ण AC दोनों कोणों A और C को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि (i) $ABCD$ एक वर्ग है (ii) विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को समद्विभाजित करता है। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ व $\angle C$ दोनों को समद्विभाजित करता है। BD आयत का दूसरा विकर्ण है।



सिद्ध करना है : (i) चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

(ii) $BD, \angle B$ और $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : (i) $\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है

$\therefore$ $AB = CD$ तथा $\angle A = 90°$

$\because$ विकर्ण $AC, \angle A$ तथा $\angle C$ दोनों को समद्विभाजित करता है

$\therefore$ $\angle BAC = \angle DAC$ और $\angle BCA = \angle DCA$

$\Delta\ ABC$ तथा $\Delta\ ADC$ में,

$\angle BAC = \angle DAC$ (दिया है।)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\angle BCA = \angle DCA$ (दिया है।)

$\therefore$ $\Delta\ ABC \cong \Delta\ ADC$ (A.S.A. से)

$\therefore$ $AB = DA$ (C.P.C.T.) ...(1)

$\because$ चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = CD;\ BC = DA;$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$ तथा $\angle A = 90°$ [समीकरण (1) से]

अत: **चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है। Proved.**

● **(ii)** $\Delta\ BCD$ में,

$BC = CD \Rightarrow \angle BDC = \angle CBD$ ...(1)

($\because$ त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

अब वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती हैं

अर्थात् $AB || CD$ और BD तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle BDC = \angle ABD$ (एकान्तर कोण) ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle ABD = \angle CBD$

अर्थात् $BD, \angle B$ का समद्विभाजक है।

इसी प्रकार, $BC || DA$ और BD तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle CBD = \angle ADB$ (एकान्तर कोण) ...(3)

समीकरण (1) व (3) से,

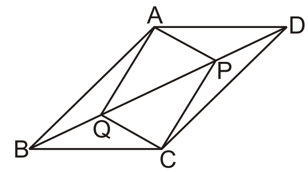
$\angle BDC = \angle ADB$ अर्थात् $BD, \angle D$ का समद्विभाजक है।

अत: **$BD, \angle B$ तथा $\angle D$ दोनों को समद्विभाजित करता है। Proved.**

प्रश्न 5. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि **[NCERT EXERCISE]**

(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) $AP = CQ$



(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है और BD उसका एक विकर्ण है। BD पर P और Q दो बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $DP = BQ$ है। $AP,\ AQ, CP$ व CQ रेखाखण्ड खींचे गए हैं जिनसे चतुर्भुज $APCQ$ बनता है।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta\ APD \cong \Delta\ CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta\ AQB \cong \Delta\ CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : $\because$ चतुर्भुज $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ $AB = CD$ तथा $BC = DA$

और $AB || CD$ तथा $BC || DA$

● **(i)** $\because$ $BC || DA$ और BD एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle ADB = \angle CBD \Rightarrow \angle ADP = \angle CBQ$ (एकान्तर कोण)

अब, $\Delta\ APD$ और $\Delta\ CQB$ में,

$DA = BC$ (दिया है।)

$\angle ADP = \angle CBQ$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$DP = BQ$ (दिया है।)

$\therefore$ **$\Delta\ APD \cong \Delta\ CQB$** (S.A.S. से) **Proved.**

● **(ii)** $\because$ $\Delta\ APD \cong \Delta\ CQB$

$\Rightarrow$ **$AP = CQ$** (C.P.C.T.) **Proved.**

● **(iii)** $\because$ $AB || CD$ और BD तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle\ ABD = \angle\ BDC$

$\Rightarrow$ $\angle ABQ = \angle PDC$ (एकान्तर कोण)

अब $\Delta\ AQB$ और $\Delta\ CPD$ में,

$AB = CD$ (दिया है।)

$\angle ABQ = \angle PDC$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

$BQ = DP$ (दिया है।)

$\therefore$ **$\Delta\ AQB \cong \Delta\ CPD$** (S.A.S. से) **Proved.**

● **(iv)** $\because$ $\Delta\ AQB \cong \Delta\ CPD$

$\therefore$ **$AQ = CP$** (C.P.C.T.) **Proved.**

● **(v)** चतुर्भुज $APCQ$ में सम्मुख भुजाएँ $AP = CQ$ और $AQ = CP$ [भाग (i) तथा (iv) से]

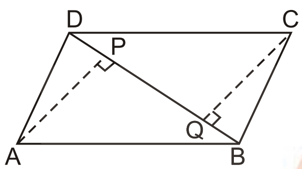
अत: **चतुर्भुज $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।**

Proved.

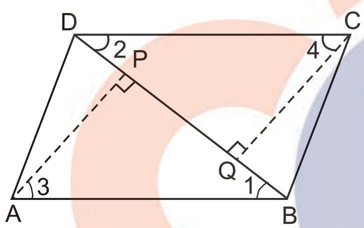
प्रश्न 6. $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा AP और CQ शीर्षों A और C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) $AP = CQ$ **[NCERT EXERCISE]**



हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण BD है। BD पर शीर्ष A से AP और शीर्ष C से CQ लम्ब खींचा गया है।



सिद्ध करना है : (i) $\Delta\ APB \cong \Delta\ CQD$

(ii) $AP = CQ$

उपपत्ति : (i) $\because$ चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है

$\therefore$ $AB = CD$ तथा $AB \parallel CD$

$\because$ $AB \parallel CD$ और विकर्ण BD एक तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle ABD = \angle BDC$ (एकान्तर कोण)

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$ ...(1)

$\because$ $AP \perp BD \Rightarrow \angle APB = 90°$

$\therefore$ $\Delta\ APB$ में,

$\angle PAB = 180° - (\angle APB + \angle ABP)$

($\because$ त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है।)

$\Rightarrow$ $\angle PAB = 180° - (90° + \angle 1) = 90° - \angle 1$

$\Rightarrow$ $\angle 3 = 90° - \angle 1$

इसी प्रकार, $CQ \perp BD \Rightarrow \angle CQD = 90°$

$\therefore$ $\Delta\ CQD$ में, $\angle QCD = 180° - (\angle CQD + \angle CDQ)$

$= 180° - 90° - \angle 2$

$= 90° - \angle 2$

$\Rightarrow$ $\angle 4 = 90° - \angle 1$ ($\because \angle 1 = \angle 2$)

$\because$ $\angle 3 = 90° - \angle 1$ और $\angle 4 = 90° - \angle 1$

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$ ...(2)

तब $\Delta\ APB$ और $\Delta\ CQD$ की तुलना करने पर,

$\angle 1 = \angle 2$ [समीकरण (1) से]

$AB = CD$ (दिया है।)

$\angle 3 = \angle 4$ [समीकरण (2) से]

$\therefore$ **$\Delta\ APB \cong \Delta\ CQD$** (A.S.A. से) **Proved.**

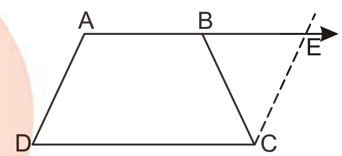
● **(ii)** $\because \Delta\ APB \cong \Delta\ CQD$

$\therefore$ **$AP = CQ$** (C.P.C.T.) **Proved.**

प्रश्न 7. $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$



(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD है।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है।

सिद्ध करना है : (i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle\ C = \angle\ D$

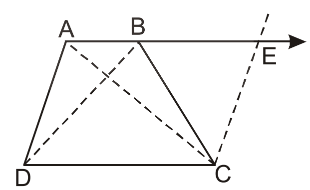
(iii) $\Delta\ ABC \cong \Delta\ BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD

रचना : विकर्ण AC तथा BD खींचे।

AB को आगे बढ़ाया और बिन्दु C से DA के समान्तर रेखा खींची जो बढ़ी हुई AB को बिन्दु E पर काटे।

उपपत्ति : (i) $\because$ समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel DC$ और AB को बढ़ाया गया है।



$\therefore$ $AE \parallel DC$ ...(1)

और $AD \parallel CE$ (रचना से) ...(2)

$\therefore$ चतुर्भुज $ADCE$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\Rightarrow$ $\angle DAE = \angle DCE$ (सम्मुख कोण) ...(3)

और $\angle ADC = \angle AEC$ (सम्मुख कोण) ...(4)

$\because$ $AB \parallel DC$ और BC एक तिर्यक रेखा है

$\therefore$ $\angle BCD = \angle CBE$ (एकान्तर कोण) ...(5)

$\because$ चतुर्भुज $ADCE$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $AD = CE$

परन्तु दिया है कि $AD = BC$

$\therefore$ $BC = CE$

$\angle BEC = \angle CBE$ ...(6)

($\because$ त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।)

अब समान्तर चतुर्भुज $ADCE$ में,

$\angle A = \angle DCE$ [समीकरण (3) से]

$= \angle BCD + \angle BCE$ (चित्र से)

$= \angle CBE + \angle BCE$ [समीकरण (5) से]

$= \angle BEC + \angle BCE$ [समीकरण (6) से]

$= \angle CBA$

($\because \angle CBA, \Delta\ BCE$ का बहिष्कोण है।)

$\Rightarrow$ $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{B}$ (समलम्ब $ABCD$ में) **Proved.**

- **(ii)** $\because AB \| CD$ और AD तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle A + \angle D = 180°$ (अन्त:कोणों का योग)

$\Rightarrow$ $\angle D = 180° - \angle A$

$\Rightarrow$ $\angle D = 180° - \angle B$

[$\because \angle A = \angle B$ भाग (i) से]

इसी प्रकार, $AB \| CD$ और BC तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle ABC + \angle BCD = 180°$ (अन्त:कोणों का योग)

$\Rightarrow$ $\angle BCD = 180° - \angle ABC$

$\Rightarrow$ $\angle C = 180° - \angle B$

तब $\angle C$ व $\angle D$ की तुलना करने पर,

$\angle \boldsymbol{C} = \angle \boldsymbol{D}$ **Proved.**

- **(iii)** $\Delta\ ABC$ और $\Delta\ BAD$ में,

$BC = AD$ (दिया है।)

$\angle A = \angle B$ [भाग (i) से]

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\therefore$ $\boldsymbol{\Delta\ ABC \cong \Delta\ BAD}$ (S.A.S. से)

- **(iv)** $\because$ $\Delta\ ABC \cong \Delta\ BAD$

$\therefore$ $AC = BD$ (C.P.C.T.)

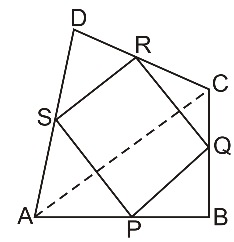
अत: **समलम्ब का विकर्ण $\boldsymbol{AC}$ = विकर्ण $\boldsymbol{BD}$**

Proved.

? प्रश्नावली | 8.2

प्रश्न 1. $ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति)। AC उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि

(i) $SR \| AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$ है।



(ii) $PQ = SR$ है।

(iii) $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ में P, Q, R व S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य-बिन्दु हैं। P, Q, R व S को ऋजु रेखाखण्ड PQ, QR, RS व SP द्वारा जोड़कर चतुर्भुज $PQRS$ प्राप्त किया गया है।

सिद्ध करना है : (i) $SR \| AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$

(ii) $PQ = SR$

(iii) $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : (i) $\Delta\ ACD$ में,

CD का मध्य-बिन्दु R तथा AD का मध्य-बिन्दु S है।

$\because$ किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर और तीसरी भुजा का आधा होता है।

अत: **रेखाखण्ड $\boldsymbol{SR \| AC}$**

और $\boldsymbol{SR = \frac{1}{2} AC}$ होगा। ...(1) **Proved.**

- **(ii)** $\Delta\ ABC$ में,

AB का मध्य-बिन्दु P है और BC का मध्य-बिन्दु Q है।

$\therefore$ रेखाखण्ड $PQ \| AC$ और $PQ = \frac{1}{2} AC$ ...(2)

अब समीकरण (1) और (2) से,

$PQ \| SR$ और $PQ = SR$

अत: $\boldsymbol{PQ = SR}$ **Proved.**

- **(iii)** ऊपर सिद्ध हुआ है कि $PQ \| SR$

और $PQ = SR$

$\because$ चतुर्भुज $PQRS$ में PQ और RS सम्मुख भुजाओं का युग्म है जो परस्पर बराबर भी है और समान्तर भी।

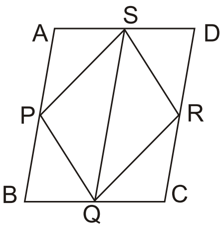
अत: **चतुर्भुज $\boldsymbol{PQRS}$ एक समान्तर चतुर्भुज होगा।**

Proved.

प्रश्न 2. $ABCD$ एक समचतुर्भुज है और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज $PQRS$ एक आयत है।

[NCERT EXERCISE]

हल :



दिया है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। जिसकी भुजाओं AB, BC, CD, DA के मध्य-बिन्दु क्रमशः P, Q, R, S हैं।

सिद्ध करना है : $PQRS$ एक आयत है।

रचना : रेखाखण्ड QS को मिलाया।

उपपत्ति : $\because ABCD$ एक समचतुर्भुज है,

$$AB = BC = CD = DA \text{ तथा } \angle A = \angle C$$

और $\angle B = \angle D$

$\because$ P, Q, R, S क्रमशः AB, BC, CD, DA के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore$ $AP = BP = BQ = CQ = CR$
$= RD = DS = AS$

$\Delta\, APS$ और $\Delta\, QCR$ में,

$AP = CR$ (दिया है।)

$\angle A = \angle C$ (दिया है।)

$AS = CQ$ (दिया है।)

$\therefore$ $\Delta\, APS \cong \Delta\, CRQ$ (S.A.S. से)

$\Rightarrow$ $PS = QR$ (C.P.C.T.) ...(1)

$\Delta\, PBQ$ तथा $\Delta\, RDS$ में,

$BP = DR$ (दिया है।)

$\angle B = \angle D$ (दिया है।)

$BQ = DS$ (दिया है।)

$\therefore$ $\Delta\, PBQ \cong \Delta\, RDS$ (S.A.S. से)

$\Rightarrow$ $PQ = RS$ (C.P.C.T.) ...(2)

$\because$ $AB \parallel CD$ और बिन्दु Q तथा S क्रमशः BC और DA के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore$ $QS \parallel AB$ तथा $QS = CD$

$\because$ $QS \parallel AB$ और PS तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ $\angle PSQ = \angle APS$ (एकान्तर कोण)

परन्तु $\angle APS = \angle ASP$ ($\because AS = AP$)

$\therefore$ $\angle PSQ = \angle ASP$ ...(3)

इसी प्रकार,

$\angle RSQ = \angle DSR$ ...(4)

$\because$ $\angle ASP + \angle PSQ + \angle RSQ + \angle DSR = 180°$
(एक रेखा पर बने कोण)

$\therefore$ $\angle PSQ + \angle PSQ + \angle RSQ + \angle RSQ = 180°$
[समीकरण (3) व (4) से]

$\therefore$ $2(\angle PSQ + \angle RSQ) = 180°$

$\therefore$ $2\angle S = 180°$ या $\angle S = 90°$
($\because \angle S = \angle PSQ + \angle RSQ$) ...(5)

समीकरण (1) और (2) से,

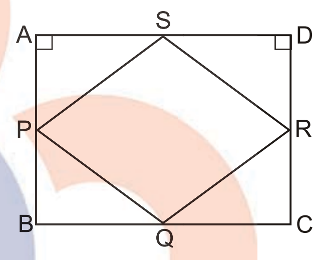
$PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है और समीकरण (5) से उसका एक अन्तःकोण समकोण है।

अतः **$PQRS$ एक आयत है।** **Proved.**

प्रश्न 3. $ABCD$ एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है जिसकी भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु क्रमशः P, Q, R और S हैं। रेखाखण्ड PQ, QR, RS और SP एक चतुर्भुज $PQRS$ बनाते हैं।



सिद्ध करना है : चतुर्भुज $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : $\Delta\, APS$ और $\Delta\, DRS$ में,

$AS = DS$ ($\because S, AD$ का मध्य-बिन्दु है)

$\angle A = \angle D$ (आयत के अन्तःकोण)

और $AP = DR$ ($\because P, AB$ का तथा R, CD का मध्य-बिन्दु है तथा $AB = CD$)

$\therefore$ $\Delta\, APS \cong \Delta\, DRS$ (S.A.S. से)

$\Rightarrow$ $SP = SR$ (C.P.C.T.) ...(1)

$\Delta\, APS$ और $\Delta\, BPQ$ में,

$AP = BP$ ($\because P, AB$ का मध्य-बिन्दु है)

$\angle A = \angle B$ (आयत के अन्तःकोण)

$AS = BQ$ ($\because AD = BC$ और S तथा Q इनके क्रमशः मध्य-बिन्दु हैं)

$\therefore$ $\Delta\, APS \cong \Delta\, BPQ$ (S.A.S. से)

$\therefore$ $SP = QP$ (C.P.C.T.) ...(2)

$\Delta\, APS$ और $\Delta\, CRQ$ में,

$AP = CR$ $\left(\because AP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = RC\right)$

$\angle A = \angle C$ (प्रत्येक समकोण)

$AS = CQ$ $\left(\because AS = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = QC\right)$

$\therefore \quad \Delta\, APS \cong \Delta\, CRQ$ (S.A.S. से)

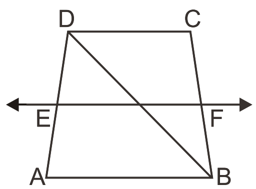
$\therefore \quad SP = QR$ (C.P.C.T.) ...(3)

समीकरण (1), (2) और (3) से,

$SP = RS = PQ = QR$

$\therefore$ ***PQRS* एक समचतुर्भुज है।** **Proved.**

प्रश्न 4. *ABCD* एक समलम्ब है, जिसमें *AB* || *DC* है। साथ ही, *BD* एक विकर्ण है और *E* भुजा *AD* का मध्य-बिन्दु है। *E* से होकर एक रेखा *AB* के समान्तर खींची गई है, जो *BC* को *F* पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि *F* भुजा *BC* का मध्य-बिन्दु है। **[NCERT EXERCISE]**



हल : दिया है : चतुर्भुज $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \| CD$ है। BD, समलम्ब $ABCD$ का एक विकर्ण है। भुजा AD का मध्य-बिन्दु E है। E से AB के समान्तर एक रेखा EF खींची गई है जो BC को बिन्दु F पर तथा BD को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है : F, BC का मध्य-बिन्दु है।

उपपत्ति : $\Delta\, ABD$ में, बिन्दु E भुजा AD का मध्य-बिन्दु है और चूँकि EF, AB के समान्तर है।

$\therefore$ बिन्दु O, BD को समद्विभाजित करेगा अर्थात् O, भुजा BD का मध्य-बिन्दु है।

$\because \quad AB \| CD$ और $EF \| AB$

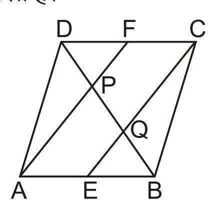
$\therefore \quad EF \| CD$ या $OF \| CD$

अब $\Delta\, BCD$ में,

$\because$ O, BD का मध्य-बिन्दु है और $OF \| CD$, जो BC को F पर प्रतिच्छेद करती है।

अत: ***F*, *BC* का मध्य-बिन्दु है।** **Proved.**

प्रश्न 5. एक समान्तर चतुर्भुज *ABCD* में *E* और *F* क्रमशः भुजाओं *AB* और *CD* के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि रेखाखण्ड *AF* और *EC* विकर्ण *BD* को समत्रिभाजित करते हैं। **[NCERT EXERCISE]**



हल : दिया है : $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। बिन्दु E और F क्रमश: उसकी भुजाओं AB तथा CD के मध्य-बिन्दु हैं। उसका विकर्ण BD, रेखाखण्डों AF तथा CE से क्रमश: बिन्दुओं P और Q पर विभक्त होता है।

सिद्ध करना है : BD को AF और CE तीन बराबर भागों में बाँटते हैं अर्थात् $DP = PQ = QB$

उपपत्ति : $\because$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad AB \| CD$ तथा $AB = CD$

और E तथा F क्रमश: AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore \quad AE \| CF$ और $AE = CF$

$\Rightarrow$ $AECF$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad AF \| CE$ ...(1)

या $\quad AP \| EQ$ ...(2)

और $\quad PF \| CQ$ ...(3)

$\because$ $\Delta\, DQC$ में, बिन्दु F, भुजा CD का मध्य-बिन्दु है (ज्ञात है।)

और $\quad PF \| CQ$ [समीकरण (3) से]

$\therefore$ P, DQ का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore \quad DP = PQ$ ...(4)

पुन: $\Delta\, ABP$ में,

बिन्दु E भुजा AB का मध्य-बिन्दु है और $EQ \| AP$ [समीकरण (2) से]

$\therefore$ Q, BP का मध्य-बिन्दु है।

$QB = PQ$ ...(5)

समीकरण (4) और (5) से,

$DP = PQ = QB$

अत: **रेखाखण्ड *AF* और *CE*, विकर्ण *BD* को तीन बराबर भागों में विभक्त करते हैं।** **Proved.**

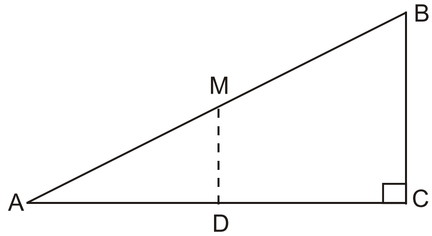
प्रश्न 6. *ABC* एक त्रिभुज है जिसका कोण *C* समकोण है। कर्ण *AB* के मध्य-बिन्दु *M* से होकर *BC* के समान्तर खींची गई रेखा *AC* को *D* पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

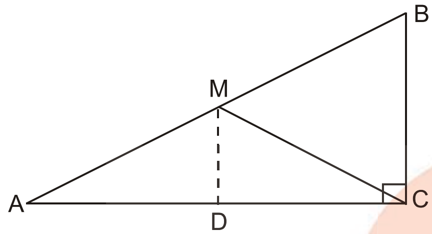
(i) *D*, भुजा *AC* का मध्य-बिन्दु है।

(ii) $MD \perp AC$ है।

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ में $\angle C$ समकोण है और AB कर्ण है जिसका मध्य-बिन्दु M है। बिन्दु M से एक रेखा BC के समान्तर खींची गई है जो AC को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करती है।





सिद्ध करना है : (i) D भुजा AC का मध्य-बिन्दु है।

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

रचना : रेखाखण्ड CM खींचा।

उपपत्ति : (i) ΔABC में,

$\because$ M कर्ण AB का मध्य-बिन्दु है और M से BC के समान्तर खींची गई रेखा AC को बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करती है जिससे $MD \parallel BC$ है।

अत: **बिन्दु D, AC का मध्य-बिन्दु** होगा। **Proved.**

- **(ii)** $\because MD \parallel BC$ और तिर्यक रेखा AC इन्हें प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore \quad \angle MDA = \angle C$

$\therefore \quad \angle MDA = 90°$ $\quad (\because \angle C = 1$ समकोण$)$

$\therefore \quad MD \perp AD$ या $MD \perp AC$

अत: $\mathbf{MD \perp AC}$ **Proved.**

- **(iii)** ΔMDA तथा ΔMDC में,

$AD = CD$ $(\because D, AC$ का मध्य-बिन्दु है।)

$\angle MDA = \angle MDC$ $\quad (MD \perp AC)$

$MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

$\Delta MDA \cong \Delta MDC$ (S.A.S. से)

$\therefore \quad MA = CM$ (C.P.C.T.)

परन्तु M, AB का मध्य-बिन्दु है जिससे

$$MA = \frac{1}{2} AB$$

अत: $\mathbf{CM = MA = \frac{1}{2} AB}$ **Proved.**