

NCERT ZONE

अध्याय के अन्तर्गत

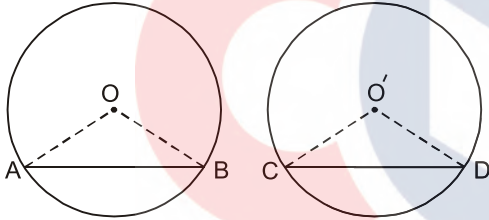
दिए गए प्रश्न एवं उनके उत्तर

? प्रश्नावली | 9.1

प्रश्न 1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : केन्द्र O वाला एक वृत्त है जिसकी एक जीवा AB है। केन्द्र O' वाला एक अन्य वृत्त है जिसकी एक जीवा CD है। दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं और जीवा AB जीवा CD के बराबर है। जीवा AB केन्द्र O पर $\angle AOB$ तथा जीवा CD केन्द्र O' पर $\angle CO'D$ अन्तरित करती है।



सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle CO'D$

रचना : त्रिज्याएँ $OA, OB, O'C$ व $O'D$ खींचिए।

उपपत्ति : ΔAOB तथा $\Delta CO'D$ में,

$$AB = CD \quad (\text{दिया है।})$$

$$OA = O'C$$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।)

$$OB = O'D$$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।)

$$\therefore \Delta AOB \cong \Delta CO'D \quad (\text{S.S.S. से})$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle CO'D \quad (\text{C.P.C.T.})$$

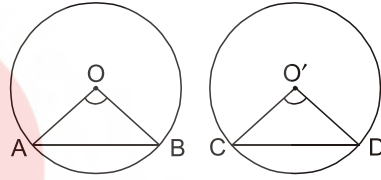
Proved.

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : O तथा O' केन्द्रों वाले दो सर्वांगसम वृत्त हैं जिनकी जीवाएँ AB व CD उनके केन्द्रों O तथा O' पर क्रमशः

$\angle AOB$ व $\angle CO'D$ इस प्रकार अन्तरित करती हैं कि $\angle AOB = \angle CO'D$ है।



सिद्ध करना है : जीवा $AB =$ जीवा CD .

उपपत्ति : ΔAOB और $\Delta CO'D$ में,

$$OA = O'C$$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।)

$$\angle AOB = \angle CO'D \quad (\text{दिया है।})$$

$$OB = O'D$$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।)

$$\Delta AOB \cong \Delta CO'D \quad (\text{S.A.S. से})$$

$$AB = CD \quad (\text{C.P.C.T.})$$

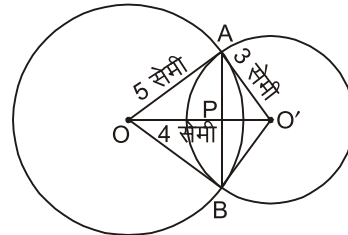
अतः जीवा $AB =$ जीवा CD Proved.

? प्रश्नावली | 9.2

प्रश्न 1. 5 सेमी तथा 3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 सेमी है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : O तथा O' केन्द्रों वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ OA तथा $O'A$ क्रमशः 5 सेमी व 3 सेमी हैं। उनके केन्द्रों के बीच की दूरी $OO' = 4$ सेमी है।



(आभासी चित्र)

2 | गणित ▶ कक्षा-9

ज्ञात करनी है : उभयनिष्ठ जीवा AB की माप।

गणना : $\therefore \Delta OAO'$ की भुजाएँ $O'A = 3$ सेमी,
 $OO' = 4$ सेमी व $OA = 5$ सेमी हैं।

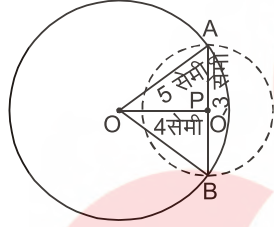
तब, $OA^2 = 25$
 और $O'A^2 + (OO')^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25$
 अर्थात् $OA^2 = O'A^2 + OO'^2$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

अतः $\Delta OAO'$ समकोणीय है।

तथा $\angle AO'O = 90^\circ$

परन्तु APB उभयनिष्ठ जीवा है जो OO' पर लम्ब होना चाहिए।



(वास्तविक चित्र)

अतः P और O' एक ही बिन्दु है अर्थात्

त्रिज्या $AO' =$ उभयनिष्ठ जीवा का भाग AP

\therefore उभयनिष्ठ जीवा का भाग $AP = AO' = 3$ सेमी

\therefore केन्द्र रेखा OO' उभयनिष्ठ जीवा AB की लम्ब-समद्विभाजक होगी।

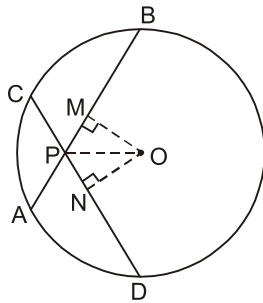
$\therefore AB = 2AP = 2 \times 3 = 6$ सेमी

अतः उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई = 6 सेमी। उत्तर

प्रश्न 2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खण्ड दूसरी जीवा के संगत खण्डों के बराबर हैं।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : O केन्द्र वाले एक वृत्त की AB व CD दो बराबर जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर काटती हैं।



सिद्ध करना है : $AP = CP$ तथा $BP = DP$

रचना : वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB पर OM तथा जीवा CD पर ON लम्ब खींचे। रेखाखण्ड OP खींचा।

उपपत्ति : $\therefore OM \perp AB$

$\Rightarrow \angle OMP = 90^\circ$

और $ON \perp CD \Rightarrow \angle ONP = 90^\circ$

$\therefore \Delta OMP$ और ΔONP समकोणीय हैं।

तब, समकोण ΔOMP तथा ΔONP में,

$OM = ON$ (\therefore जीवा $AB =$ जीवा CD)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ जीवा है।)

$\angle OMP = \angle ONP$ (प्रत्येक 90°)

$\therefore \Delta OMP \cong \Delta ONP$ (R.H.S. से)

$\Rightarrow MP = NP$ (C.P.C.T.) ... (1)

$\therefore OM \perp AB$

$\therefore AM = BM \Rightarrow AP + PM = BM$

$\Rightarrow AP = BM - PM$

$\Rightarrow AP = \frac{1}{2} AB - PM$... (2)

[$\therefore AM = BM = \frac{AB}{2}$]

और $ON \perp CD$

$\therefore CN = DN$

$\therefore CP + PN = DN$

$\Rightarrow CP = DN - PN$

$\Rightarrow CP = \frac{1}{2} CD - PN$

[$\therefore CN = DN = \frac{CD}{2}$]

$\Rightarrow CP = \frac{1}{2} CD - PN$

[$\therefore CD = AB$ तथा

समीकरण (1) से $PN = PM$] ... (3)

अब समीकरण (2) व (3) से,

$AP = CP$

$\therefore AB = CD$ (दिया है।)

$\therefore AP + BP = CP + DP$ (चित्र से)

परन्तु $AP = CP$ (ऊपर सिद्ध किया है।)

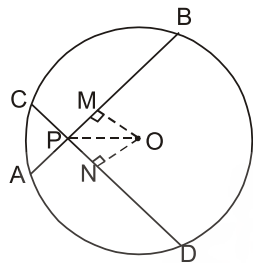
घटाने पर, $BP = DP$

अतः $AP = CP$ और $BP = DP$ अर्थात् एक जीवा AB के खण्ड दूसरी जीवा CD के संगत खण्डों के बराबर हैं।

Proved.

प्रश्न 3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद-बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है। [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : केन्द्र O के वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD जो बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं।



सिद्ध करना है : रेखाखण्ड OP , से जीवाओं AB व CD

द्वारा बने $\angle BPO = \angle DPO$

रचना : केन्द्र O से AB और CD पर क्रमशः OM और ON लम्ब डालें।

उपपत्ति : \therefore जीवा $AB =$ जीवा CD

$\therefore OM = ON$

अब $\triangle OPM$ और $\triangle OPN$ में,

$OM = ON$ (दिया है।)

$\angle OMP = \angle ONP$ (प्रत्येक समकोण है।)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ भुजा है।)

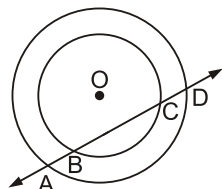
$\therefore \triangle OPM \cong \triangle OPN$ (R.H.S. से)

अतः $\angle MPO = \angle NPO$

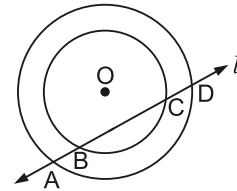
या $\angle BPO = \angle DPO$ (C.P.C.T.)

Proved.

प्रश्न 4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्रीय वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है (देखिए चित्र)। [NCERT EXERCISE]



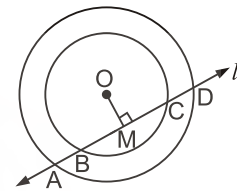
हल : दिया है : दो संकेन्द्रीय वृत्तों का केन्द्र O है। एक ऋजु रेखा l वृत्तों को बिन्दुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेदित करती है।



सिद्ध करना है : $AB = CD$

रचना : वृत्त के केन्द्र O से l पर OM लम्ब डाला।

उपपत्ति : \therefore रेखा l बड़े वृत्त को बिन्दुओं A तथा D पर काटती है।



$\therefore AB$ वृत्त की जीवा है और OM उस पर केन्द्र से डाला गया लम्ब है।

$\therefore AM = MD$... (1)

\therefore रेखा l छोटे वृत्त को बिन्दुओं B तथा C पर काटती है।

$\therefore BC$ वृत्त की जीवा है और OM उस पर केन्द्र से खींचा गया लम्ब है।

$\therefore BM = MC$... (2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

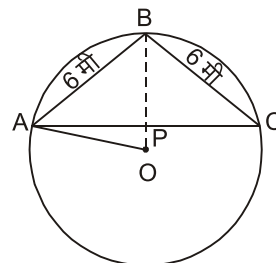
$$AM - BM = MD - MC$$

अतः $AB = CD$ Proved.

प्रश्न 5. एक पार्क में बने 5 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 मीटर हो तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : एक पार्क में 5 मीटर त्रिज्या का एक वृत्त बना है जिसका केन्द्र O है। तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा और मनदीप वृत्त पर क्रमशः A, B व C स्थानों पर खड़ी हैं। रेशमा और सलमा के बीच की दूरी $AB = 6$ मीटर तथा सलमा और मनदीप के बीच दूरी $BC = 6$ मीटर है।



4 | गणित ▶ कक्षा-9

ज्ञात करना है : रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी = AC

गणना : त्रिज्याएँ OA और OB खींचीं और माना कि OB , AC को बिन्दु P पर काटती है।

ΔOAB में, $OA = 5$ मीटर (त्रिज्या), $OB = 5$ मीटर (त्रिज्या) तथा $AB = 6$ मीटर।

माना $OA = 5$ मीटर = a , $OB = 5$ मीटर = b और $AB = 6$ मीटर = c

$$\begin{aligned} \text{तब, अर्द्धपरिमाप } s &= \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{5 + 5 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तब, } \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} \\ &= \sqrt{8 \times 3 \times 3 \times 2} = \sqrt{144} \\ &= 12 \text{ वर्ग मीटर} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{परन्तु } \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times OB \times AP \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times AP \\ &= \frac{5}{2} AP \text{ वर्ग मीटर} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

समीकरण (1) तथा (2) से,

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} AP &= 12 \\ \Rightarrow AP &= \frac{12 \times 2}{5} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

इसी प्रकार, $CP = 4.8$ मीटर

$$\begin{aligned} \therefore AC &= AP + CP \\ &= 4.8 + 4.8 = 9.6 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अतः रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी

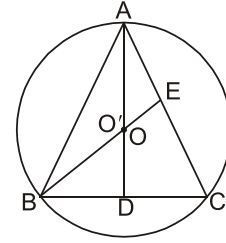
$$AC = 9.6 \text{ मीटर।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. 20 मीटर त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिधि पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : O केन्द्र वाला एक वृत्त के आकार का पार्क है जिसकी त्रिज्या OA या $OB = 20$ मीटर है। वृत्त की परिधि पर तीन लड़के एक-दूसरे से बराबर दूरी पर A, B व C स्थानों पर ऐसे बैठे हैं कि $AB = BC = AC$



ज्ञात करना है : डोरी की लम्बाई AB

रचना : ΔABC की माधिकाएँ AD व BE खींचीं।

गणना : ΔABC में,

$$\begin{aligned} \therefore AB &= BC = AC \\ \therefore \Delta ABC \text{ समबाहु त्रिभुज है जिसकी माधिकाएँ } AD \text{ तथा } BE &\text{ परस्पर बिन्दु } O' \text{ पर काटती हैं।} \\ \text{अब } \therefore AD, \text{ समबाहु त्रिभुज की माधिका है।} \\ \therefore AD \perp BC \text{ और } BD = CD \\ \therefore AD, BC \text{ का लम्ब समद्विभाजक है।} \\ \therefore AD \text{ वृत्त के केन्द्र } O \text{ से जाएगा।} \\ \therefore O \text{ और } O' \text{ एक ही बिन्दु होगा।} \\ \therefore \text{त्रिभुज की माधिकाओं का प्रतिच्छेद-बिन्दु } O' \text{ है।} \\ \therefore AO' : O'D = AO : OD = 2 : 1 \\ \therefore \text{त्रिज्या } OA = 20 \text{ मीटर} \\ \therefore 20 : OD = 2 : 1 \\ \Rightarrow 2 \times OD = 20 \\ \Rightarrow OD = 10 \\ \text{तब, } AD = OA + OD \\ = 20 + 10 = 30 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अब, समकोण ΔADB में,

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 && \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)} \\ &= \left(\frac{1}{2} BC\right)^2 + (30)^2 && \left(\because BD = \frac{1}{2} BC\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + 900 && (\because AB = BC) \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 900$$

$$\therefore AB^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 900$$

$$\Rightarrow \frac{3AB^2}{4} = 900$$

$$\therefore AB^2 = \frac{900 \times 4}{3} = 1200$$

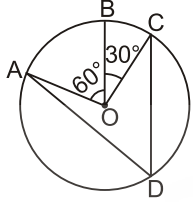
$$\Rightarrow AB = \sqrt{1200} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 10 \times 10} = 20\sqrt{3}$$

अतः प्रत्येक डोरी की लम्बाई = $20\sqrt{3}$ मीटर। उत्तर

? प्रश्नावली | 9.3

प्रश्न 1. निम्नांकित चित्र में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30^\circ$ तथा $\angle AOB = 60^\circ$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]



हल : दिया है : O केन्द्र वाला एक वृत्त है जिसकी परिधि पर A, B और C तीन बिन्दु इस प्रकार हैं कि $\angle AOB = 60^\circ$ और $\angle BOC = 30^\circ$ हैं। चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त की परिधि पर एक बिन्दु D है जो चाप ABC के साथ $\angle ADC$ बनाता है।

ज्ञात करना है : $\angle ADC$

गणना : $\angle AOB = 60^\circ$ और $\angle BOC = 30^\circ$

जोड़ने पर, $\angle AOB + \angle BOC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AOC = 90^\circ$

$\therefore \angle AOC$, चाप ABC द्वारा केन्द्र पर बना कोण है।

\therefore वृत्त की शेष परिधि पर चाप ABC द्वारा बना कोण $\angle ADC$, $\angle AOC$ का आधा होगा।

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

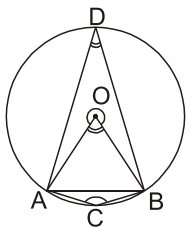
अतः $\angle ADC = 45^\circ$

उत्तर

प्रश्न 2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : एक वृत्त का केन्द्र O है। उसकी एक जीवा AB वृत्त की त्रिज्या OA के बराबर है। वृत्त के लघु चाप ACB पर एक बिन्दु C तथा दीर्घ चाप ADB पर एक बिन्दु D है। चाप ACB द्वारा बिन्दु D पर अन्तरित $\angle ADB$ तथा चाप ADB द्वारा बिन्दु C पर अन्तरित $\angle ACB$ है।



ज्ञात करना है : $\angle ACB$ व $\angle ADB$

विश्लेषण व गणना :

\therefore जीवा $AB =$ वृत्त की त्रिज्या OA या OB

$\therefore AB = OA = OB$

$\therefore \Delta ABC$ समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ जो चाप ACB द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण है

\therefore चाप ACB द्वारा वृत्त की शेष परिधि के बिन्दु D पर अन्तरित $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB$

$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

इसी प्रकार, चाप ADB द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर अन्तरित वृहतकोण $\angle AOB = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

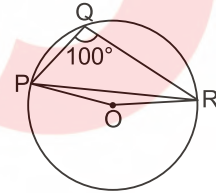
तब चाप ADB द्वारा वृत्त की शेष परिधि के बिन्दु C पर अन्तरित कोण

$\angle ACB = \frac{1}{2}$ वृहतकोण $\angle AOB = \frac{1}{2} \times 300 = 150^\circ$

अतः $\angle ACB = 150^\circ$ तथा $\angle ADB = 30^\circ$ उत्तर

प्रश्न 3. निम्नांकित चित्र में, $\angle PQR = 100^\circ$ है, जहाँ P, Q तथा R , केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]



हल : दिया है : O केन्द्र का एक वृत्त है जिसकी परिधि पर P, Q व R तीन बिन्दु हैं।

ज्ञात करना है : $\angle OPR$

गणना : दीर्घ चाप PR द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना कोण वृहतकोण $\angle POR$ है और इस चाप द्वारा शेष परिधि PQR के बिन्दु Q पर बना $\angle PQR$ है।

$\therefore \angle PQR = \frac{1}{2} \times$ वृहतकोण $\angle POR$

$\therefore 100^\circ = \frac{1}{2} \times$ वृहतकोण $\angle POR$

\Rightarrow वृहतकोण $\angle POR = 200^\circ$

तब, शेष कोण $POR = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$

अब, ΔPOR में, $OR = OP$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore \angle OPR = \angle ORP$

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

6 | गणित ▶ कक्षा-9

पुनः ΔPOR में,

$$\angle OPR + \angle POR + \angle ORP = 180^\circ$$

(\because त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है।)

$$\therefore \angle OPR + 160^\circ + \angle ORP = 180^\circ$$

$$(\because \angle ORP = \angle OPR)$$

$$\therefore 2 \angle OPR = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

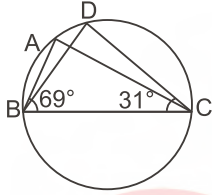
$$\therefore \angle OPR = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

अतः $\angle OPR = 10^\circ$

उत्तर

प्रश्न 4. निम्नांकित चित्र में, $\angle ABC = 69^\circ$ और $\angle ACB = 31^\circ$ हो तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]



हल : दिया है : दी गई आकृति में $\angle ABC = 69^\circ$ और $\angle ACB = 31^\circ$ है।

ज्ञात करना है : $\angle BDC$ का मान।

गणना : ΔABC में,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

(\because त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग 180° होता है।)

$$\therefore \angle BAC + 69^\circ + 31^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (69^\circ + 31^\circ)$$

$$= 180^\circ - 100^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = 80^\circ$$

$\therefore \angle BAC$ व $\angle BDC$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं और $\angle BAC = 80^\circ$ है।

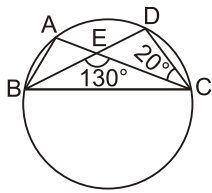
$$\therefore \angle BAC = \angle BDC = 80^\circ$$

अतः $\angle BDC = 80^\circ$

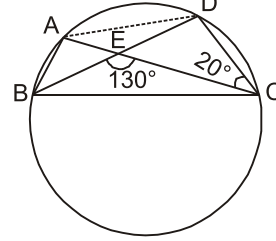
उत्तर

प्रश्न 5. निम्न चित्र में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130^\circ$ तथा $\angle ECD = 20^\circ$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

[NCERT EXERCISE]



हल : दिया है : दी गई आकृति में एक वृत्त की परिधि पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। $\angle BEC = 130^\circ$ तथा $\angle ECD = 20^\circ$ ।



ज्ञात करना है : $\angle BAC$

रचना : AD को मिलाया।

गणना : $\because \angle ECD = 20^\circ$ या $\angle ACD = 20^\circ$

$\therefore \angle ABD$ व $\angle ACD$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD$$

$$\Rightarrow \angle ABD = 20^\circ \quad (\because \angle ACD = 20^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle ABE = 20^\circ$$

$\therefore \Delta ABE$ में $\angle BEC$ बहिष्कोण है।

$$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \angle BEC$$

$$\therefore \angle BAE + 20^\circ = 130^\circ$$

(दिया है, $\angle BEC = 130^\circ$)

$$\therefore \angle BAE = 130^\circ - 20^\circ = 110^\circ$$

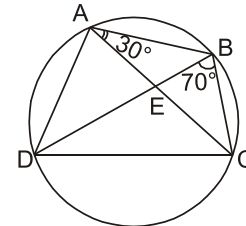
$$\therefore \angle BAC = 110^\circ \quad (\because \angle BAE \equiv \angle BAC)$$

अतः $\angle BAC = 110^\circ$

उत्तर

प्रश्न 6. $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BAC = 30^\circ$ हो तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि $AB = BC$ हो तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए। [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC व BD एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। $\angle DBC = 70^\circ$ व $\angle BAC = 30^\circ$ और $AB = BC$ है।



ज्ञात करना है : $\angle BCD$ और $\angle ECD$

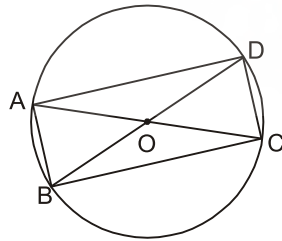
गणना : $\because \angle DAC$ व $\angle DBC$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$
 $\Rightarrow \angle DAC = 70^\circ$ ($\because \angle DBC = 70^\circ$)
 तब, चतुर्भुज $ABCD$ में,
 $\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = 70^\circ + 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle DAB = 100^\circ$
 $\therefore ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है।
 $\therefore \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$
 (सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।)
 $\Rightarrow 100^\circ + \angle BCD = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$
 $\Rightarrow \angle BCD = 80^\circ$
 अब ΔABC में, $AB = BC$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle BAC$
 (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)
 $\therefore \angle ACB = 30^\circ$ ($\because \angle BAC = 30^\circ$)
 ऊपर हम सिद्ध कर चुके हैं कि $\angle BCD = 80^\circ$
 $\Rightarrow \angle ACD + \angle ACB = 80^\circ$ (चित्र से)
 $\Rightarrow \angle ACD + 30^\circ = 80^\circ$ ($\angle ACB = 30^\circ$)
 $\Rightarrow \angle ACD = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$
 $\Rightarrow \angle ECD = 50^\circ$
 ($\because \angle ECD \equiv \angle ACD$)

अतः $\angle BCD = 80^\circ$
 और $\angle ECD = 50^\circ$ उत्तर

प्रश्न 7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है। [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD वृत्त के व्यास हैं जो परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं।



सिद्ध करना है : $ABCD$ एक आयत है।
उपपत्ति : \therefore विकर्ण AC और BD व्यास हैं।

$\therefore AC = BD$
 $\therefore O$ वृत्त का केन्द्र है।
 $\therefore OA = OC$ तथा $OB = OD$
 \therefore चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है।
 $\therefore \angle B = \angle D$ परन्तु $ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज भी है जिससे $\angle B + \angle D = 180^\circ$
 (सम्मुख कोणों का योग $= 180^\circ$)

उक्त दोनों तथ्यों से $\angle B = 90^\circ$
 तथा $\angle D = 90^\circ$
 इसी प्रकार, $\angle A = 90^\circ$
 तथा $\angle C = 90^\circ$

इस प्रकार चतुर्भुज $ABCD$ एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसके अन्तःकोण समकोण हैं।

अतः $ABCD$ एक आयत है। **Proved.**

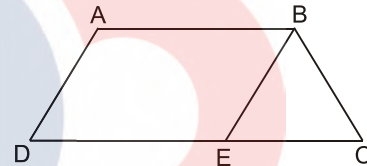
प्रश्न 8. यदि एक समलम्ब की असमान्तर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है। [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में, भुजा $AD =$ भुजा BC

सिद्ध करना है : $ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज होगा।

रचना : AD के समान्तर रेखाखण्ड BE खींचा।

उपपत्ति : समान्तर चतुर्भुज $ABED$ में,



$\angle BAD = \angle BED$... (1)

तथा $AD = BE$

परन्तु $AD = BC$ (दिया है।)

$\therefore BC = BE$

तब ΔBEC एक समद्विबाहु त्रिभुज हुआ।

$\therefore \angle BEC = \angle BCE$

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ... (2)

अब, $\angle BEC + \angle BED = 180^\circ$ (ऋजु कोण)

$\Rightarrow \angle BCE + \angle BAD = 180^\circ$

[समीकरण (1) व (2) से]

$\Rightarrow \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$

इससे स्पष्ट है कि चतुर्भुज $ABCD$ के दो सम्मुख

अन्तःकोणों का योग दो समकोण के बराबर है।

अतः चतुर्भुज $ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है। **Proved.**

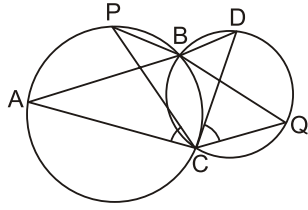
प्रश्न 9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं।

B से जाने वाले दो रेखाखण्ड ABD और PBQ वृत्तों को A, D

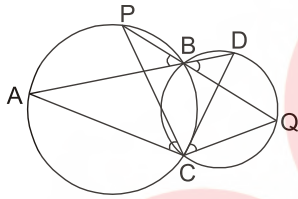
और P, Q पर क्रमशः प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं

(देखिए चित्र)। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।

[NCERT EXERCISE]



हल : दिया है : दो वृत्त दी गई आकृति के अनुसार बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो रेखाखण्ड ABD और PBQ बिन्दु B से जाते हैं। पहला रेखाखण्ड ABD वृत्तों को A व D पर तथा दूसरा PBQ वृत्तों को P व Q पर प्रतिच्छेद करता है। C से P और D को मिलाकर $\angle ACP$ और $\angle QCD$ बनाए गए हैं।



सिद्ध करना है : $\angle ACP = \angle QCD$

उपपत्ति : \therefore रेखाखण्ड ABD और PBQ परस्पर बिन्दु B पर काटते हैं।

$\therefore \angle ABP = \angle QBD$ (शीर्षाभिमुख कोण) ... (1)

$\therefore \angle ABP$ और $\angle ACP$ एक वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$\angle ABP = \angle ACP$... (2)

इसी प्रकार, $\angle QCD$ और $\angle QBD$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।

$\therefore \angle QCD = \angle QBD$... (3)

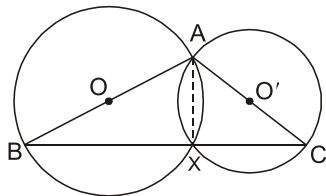
तब समीकरण (1) व (2) से, $\angle ACP = \angle QBD$... (4)

अब समीकरण (3) व (4) से, $\angle ACP = \angle QCD$

अतः $\angle ACP = \angle QCD$ **Proved.**

प्रश्न 10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है। [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाओं AB तथा AC को व्यास मानकर दो वृत्त खींचे गए हैं जो परस्पर बिन्दु X पर काटते हैं।



सिद्ध करना है : बिन्दु X, त्रिभुज की तीसरी भुजा BC पर स्थित है।

रचना : रेखाखण्ड AX खींचिए।

उपपत्ति : \therefore AB वृत्त का व्यास है तथा बिन्दु X वृत्त की परिधि पर स्थित है,

\therefore

$$\angle AXB = 90^\circ$$

(अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।)

पुनः AC वृत्त का व्यास है तथा बिन्दु X वृत्त की परिधि पर स्थित है।

\therefore

$$\angle AXC = 90^\circ$$

(अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।)

तब, $\angle AXB + \angle AXC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

अर्थात् $\angle BXC = 180^\circ = \text{ऋजुकोण}$

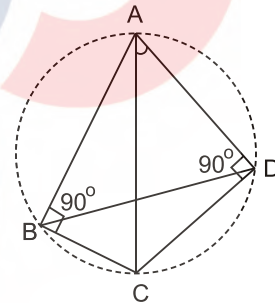
अतः B, X और C एक ही रेखा में स्थित हैं।

\Rightarrow वृत्तों का प्रतिच्छेद-बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

Proved.

प्रश्न 11. उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ [NCERT EXERCISE]

हल : दिया है : $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ दो समकोण त्रिभुज हैं जिनका कर्ण AC उभयनिष्ठ है। रेखाखण्ड BD खींचा गया है।



सिद्ध करना है : $\angle CAD = \angle CBD$

रचना : AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा।

उपपत्ति : $\therefore \triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण AC है।

\therefore

$$\angle B = 90^\circ$$

पुनः $\triangle ADC$ समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण AC है।

\therefore

$$\angle D = 90^\circ$$

तब चतुर्भुज ABCD में,

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

$\therefore ABCD$ चक्रीय चतुर्भुज है।

(\therefore सम्मुख कोणों का योग 180° है।)

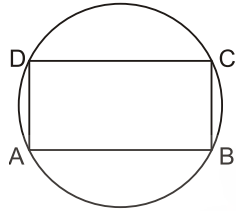
\therefore बिन्दु A, B, C और D एक वृत्त पर हैं।

$\therefore \angle CAD$ और $\angle CBD$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं अतः बराबर होंगे।

अतः $\angle CAD = \angle CBD$ **Proved.** \therefore

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समान्तर चतुर्भुज आयत होता है। **[NCERT EXERCISE]**

हल : दिया है : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। \therefore



सिद्ध करना है : चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति : $\therefore ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, इसके सम्मुख कोणों का योग 180° के बराबर होगा।

$$\angle A + \angle C = 180^\circ \quad \dots(1)$$

परन्तु समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$$\angle A = \angle C$$

अतः समीकरण (1) से, $\angle A = \angle C = 90^\circ$

इसी प्रकार, $\angle B = \angle D = 90^\circ$

$\therefore ABCD$ का प्रत्येक अन्तःकोण 90° के बराबर है।

अतः $ABCD$ एक आयत है।

Proved.

